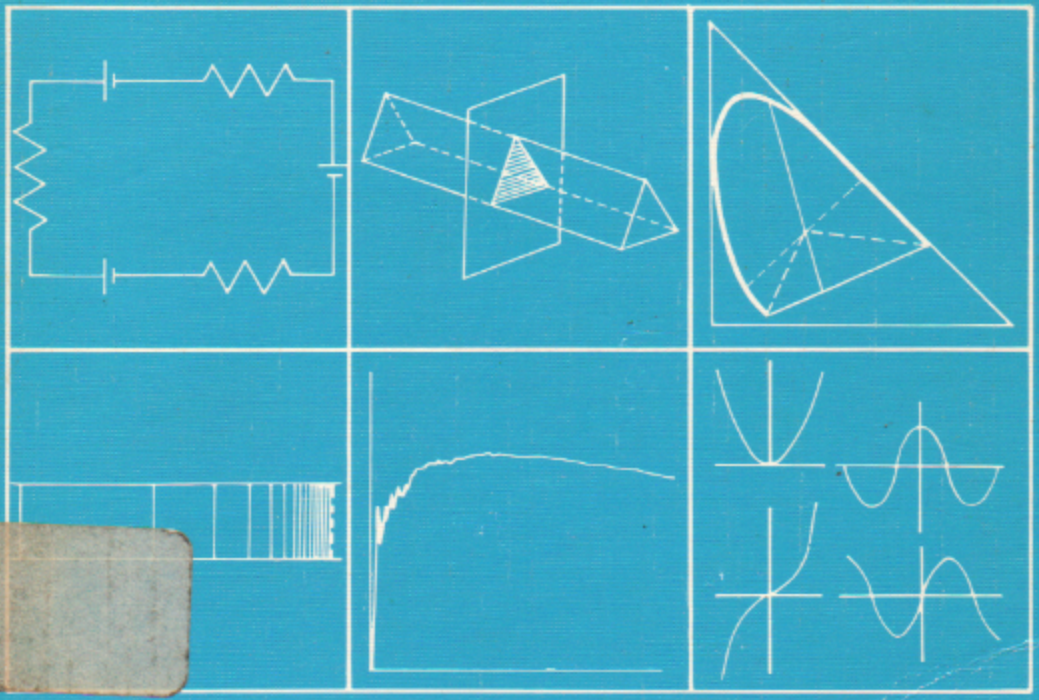
Iniciación a la física

Julián Fernández Ferrer
Marcos Pujal Carrera

Tomo II



editorial reverté, s.a.

INICIACIÓN A LA FÍSICA

61544

Dr. JULIÁN FERNÁNDEZ FERRER, F.I.M.A.

Catedrático de la Escuela Técnica Superior
de Ingenieros Industriales, Barcelona

AHORROS DE CAJA DE ALICANTE Y MURCIA
BIBLIOTECA GABRIEL MIRÓ
ALICANTE

Dr. MARCOS PUJAL CARRERA

Catedrático de la Escuela Técnica Superior
de Ingenieros Industriales, Tarrasa

INICIACIÓN A LA FÍSICA

AHORROS DE CAJA DE ALICANTE Y MURCIA
BIBLIOTECA GABRIEL MIRÓ
ALICANTE

Tomo II

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Barcelona - Bogotá - Buenos Aires - Caracas - México

Propiedad de EDITORIAL REVERTÉ, S. A. Encarnación, 86. Barcelona (24)

Reservados todos los derechos. Ninguna parte del material cubierto por este título de propiedad literaria puede ser reproducida, almacenada en un sistema de informática o transmitida de cualquier forma o por cualquier medio electrónico, mecánico, fotocopia, *grabación* u otros métodos sin el previo y expreso permiso por escrito del editor.

Edición en español

© **EDITORIAL REVERTÉ, S. A., 1984**

© **Dr. Julián Fernández Ferrer**

Impreso en España - Printed in Spain

Depósito Legal B.9927–85

ISBN - 84 - 291 - 4272 - X Obra completa

ISBN - 84 - 291 - 4198 - 7 Tomo 1

I. G. Sorpama. Paraguay 12, Barcelona

Indice de materias

CAPÍTULO 1. — ELECTROSTÁTICA 1

1.1 Carga eléctrica 1
1.2 Estructura eléctrica de la materia 4
1.3 Inducción electrostática 5
1.4 Fórmula de Coulomb 7
1.5 Unidades de carga 9

CAPÍTULO 2. — EL CAMPO ELECTROSTÁTICO 11

2.1 Campo eléctrico 11
2.2 Dipolo eléctrico 14
2.3 Flujo eléctrico 17
2.4 Campo creado por una distribución de cargas homogénea, plana e indefinida 17
2.5 Campo creado por dos distribuciones de cargas planas, paralelas, homogéneas y opuestas 18
2.6 Campo y cargas en un conductor en equilibrio 18
2.7 Campo en la superficie de un conductor en equilibrio . . . 19
2.8 Campo creado por una distribución de cargas con simetría esférica 21
2.9 Potencial eléctrico 23
2.10 Potencial de un conductor en equilibrio 24
2.11 Potencial creado por una distribución de cargas con simetría esférica 26
2.12 Generador electrostático Van de Graaf 27
2.13 Energía de una partícula cargada en un campo eléctrico . . 28
2.14 Experimento de Millikan; electrón-volt 29

CAPÍTULO 3. — DIELÉCTRICOS Y CAPACIDAD 32

3.1 Polarización de un dieléctrico 32
3.2 Constante dieléctrica 35
3.3 Inducción eléctrica 35
3.4 Fuerzas entre cargas situadas en un medio material . . . 36
3.5 Teorema de los elementos correspondientes 37
3.6 Capacidad de un conductor aislado 38
3.7 Condensadores 39
3.8 Capacidad de los condensadores plano, esférico y cilíndrico . 41
3.9 Energía de un condensador cargado 43
3.10 Asociación de condensadores 45

CAPÍTULO 4. — CORRIENTE CONTINUA 49

4.1 Corriente eléctrica 49
4.2 Densidad de corriente 51
4.3 Ley de Ohm 53
4.4 Resistencia, conductancia, resistividad y conductividad; sus unidades 55
4.5 Variación de la resistividad con la temperatura; termómetro de resistencia 56
4.6 Ley de Joule 57
4.7 Generador eléctrico 59
4.8 Asociación de generadores 61
4.9 Receptor; fuerza contraelectromotriz 62
4.10 Circuito con varios generadores y resistencias en serie . . 63
4.11 Leyes de Kirchhoff 65
4.12 Asociación de resistencias 68
4.13 Teorema de la superposición 70
4.14 Puente de Wheatstone 72
4.15 Carga y descarga de un condensador 73

CAPÍTULO 5. — CONDUCCIÓN EN SÓLIDOS, LÍQUIDOS Y GASES. PILAS ELÉCTRICAS 77

5.1 Conducción en cuerpos sólidos 77
5.2 Semiconductores 81
5.3 Semiconductores con impurezas 83
5.4 Conducción en líquidos 84
5.5 Ley de Faraday 86
5.6 Conductibilidad del electrolito 87
5.7 Energía de extracción y diferencia de potencial de contacto . 88
5.8 Efectos termoeléctricos 90
5.9 Par termoeléctrico 94
5.10 Teoría de las pilas; potencial de electrodo 95
5.11 Polarización de los electrodos 97
5.12 Acumulador de plomo 98
5.13 Pilas de combustible 99
5.14 Conducción en gases 100
5.15 Descarga luminosa 103

CAPÍTULO 6. — CAMPO MAGNÉTICO 107

6.1 Acción mutua de dos corrientes paralelas 109
6.2 Campo magnético de inducción 109
6.3 Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético uniforme 111
6.4 Ciclotrón 112
6.5 Carga específica del electrón 114
6.6 Espectrógrafo de masas de Bainbridge 116
6.7 Acción de un campo magnético sobre un elemento de corriente 117
6.8 Acción de un campo magnético sobre una espira 119
6.9 Acción de un campo magnético sobre un solenoide recto . . 122
6.10 Campo creado por un elemento de corriente 123
6.11 Campo creado por una carga en movimiento 124

6.12 Campo magnético creado por una corriente rectilínea indefinida; ley de Ampère 125
6.13 Campo magnético creado por una espira circular en un punto de su eje 127
6.14 Campo creado por un solenoide 129
6.15 Fuerzas que se ejercen dos corrientes paralelas 131
6.16 Osciloscopio de rayos catódicos 132
6.17 Partícula cargada en movimiento en un campo electromagnético; efecto Hall 135
6.18 Magnetohidrodinámica 138

CAPÍTULO 7. — PROPIEDADES MAGNÉTICAS DE LA MATERIA . . 141

7.1 Comportamiento de un material en un campo magnético no uniforme 141
7.2 Interpretación del paramagnetismo y del diamagnetismo . . 142
7.3 Intensidad de imanación 144
7.4 Susceptibilidad y permeabilidad magnética 146
7.5 Ferromagnetismo 147
7.6 Dominios de Weiss 150
7.7 Imanes permanentes 154
7.8 Polos magnéticos 155
7.9 Circuitos magnéticos 158

CAPÍTULO 8. — INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA 162

8.1 Evidencia experimental de la inducción electromagnética . . 162
8.2 Ley de Faraday 165
8.3 Ley de Lenz 169
8.4 Corrientes de Foucault 170
8.5 Betatrón 171
8.6 Inducción mutua 173
8.7 Autoinducción 175
8.8 Bobina de inducción 177
8.9 Energía electromagnética de una corriente 178
8.10 Descarga oscilante de un condensador 180

CAPÍTULO 9. — CORRIENTE ALTERNA 184

9.1 Valor eficaz de una función periódica 184
9.2 Derivada e integral de una función sinusoidal del tiempo . 185
9.3 Corriente alterna 186
9.4 Circuito RLC serie recorrido por una c. a. 186
9.5 Circuito con resistencia y autoinducción 191
9.6 Circuito con resistencia y capacidad 191
9.7 Impedancias en serie 191
9.8 Impedancias en paralelo 193
9.9 Resonancia 195
9.10 Potencia de una c. a. 200

CAPÍTULO 10. — MEDIDAS ELÉCTRICAS Y MAQUINARIA . . . 203

10.1 Galvanómetro de cuadro móvil 203
10.2 Amperímetros y voltímetros 206

10.3 Potenciómetro 209
10.4 Electrodinamómetro y wattímetro 211
10.5 Generadores electromagnéticos de c. a. y c. c. 212
10.6 Excitación de las dinamos 216
10.7 Fuerza electromotriz de una dinamo 216
10.8 Motores de c. c. 218
10.9 Transformador 219
10.10 Corrientes trifàsicas 223
10.11 Campo magnético giratorio 226
10.12 Motor de inducción 227

CAPÍTULO 11. — ELECTRÓNICA 230

11.1 Emisión termoiónica 230
11.2 Diodos 231
11.3 Rectificación 235
11.4 Triodos 239
11.5 Transistores 242
11.6 Amplificación 244
11.7 Oscilador 249

CAPÍTULO 12. — ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS 252

12.1 Ecuaciones de Maxwell 253
12.2 Ondas electromagnéticas 256
12.3 Experiencias de Hertz 262
12.4 Espectro electromagnético 263
12.5 Efecto fotoeléctrico 264
12.6 Rayos X 267
12.7 Efecto Compton 269

CAPÍTULO 13. — ÓPTICA 272

13.1 Breve exposición histórica de las ideas acerca de la luz . . 272
13.2 Óptica geométrica 275
13.3 Velocidad de la luz 276
13.4 Consecuencias del principio de Fermat: reflexión y refracción 280
13.5 Ángulo límite y reflexión total 284

CAPÍTULO 14. — SISTEMAS ÓPTICOS 286

14.1 Dioptrios 286
14.2 Dioptrio esférico 288
14.3 Dioptrio plano 294
14.4 Marcha de la luz a través de una lámina de caras paralelas e imágenes producidas 297
14.5 Marcha de la luz a través de un prisma 298
14.6 Sistemas ópticos centrados 301
14.7 Planos focales y focos 305
14.8 Fórmulas de Newton 305
14.9 Aumento lateral; puntos y planos principales 306
14.10 Aumento angular; puntos nodales 308
14.11 Ecuación de los puntos conjugados tomando como orígenes los puntos principales 309

14.12 Determinación gráfica de las imágenes 311
14.13 Sistemas telescópicos o afocales 312
14.14 Combinación de sistemas ópticos centrados 313

CAPÍTULO 15. — LENTES Y ESPEJOS 317

15.1 Lentes esféricas 317
15.2 Centro óptico de una lente 321
15.3 Asociación de lentes 324
15.4 Lentes delgadas 326
15.5 Reflexión como caso particular de la refracción: espejos . . 328
15.6 Combinación de espejos y lentes 332

CAPÍTULO 16. — INSTRUMENTOS ÓPTICOS 333

16.1 El ojo como instrumento óptico 333
16.2 Defectos de convergencia y de acomodación 335
16.3 Agudeza visual 336
16.4 Lupa 337
16.5 Microscopio 339
16.6 Anteojo astronómico 342
16.7 Anteojo terrestre 344
16.8 Telescopio reflector 345
16.9 Cámara fotográfica 346
16.10 Aparato de proyección 347

CAPÍTULO 17. — ÓPTICA FÍSICA 349

17.1 Teoría ondulatoria de la luz 349
17.2 Interferencias luminosas; coherencia 351
17.3 Experimento de Young 354
17.4 Espejos de Fresnel y dispositivos similares 359
17.5 Interferencias en láminas de caras paralelas 361
17.6 Anillos de Newton 365
17.7 Ondas estacionarias 366
17.8 Películas antirreflectoras 366
17.9 Refractometría interferencial 367
17.10 Interferómetro de Michelson 369
17.11 Difracción 371
17.12 Difracción debida a una rendija 374
17.13 Difracción producida por una abertura circular 379
17.14 Difracción por dos rendijas 380
17.15 Red de difracción 383
17.16 Poder separador de los instrumentos ópticos 389
17.17 Microscopio de contraste de fase 392

CAPÍTULO 18. — POLARIZACIÓN DE LA LUZ 395

18.1 Luz polarizada 395
18.2 Polarización por reflexión 396
18.3 Cristales anisótropos 400
18.4 Prisma polarizador de Nicol 405
18.5 Polarización elíptica 409

18.6 Observación, a través de un analizador, de la luz que ha atravesado una lámina cristalina 412
18.7 Dicroísmo 415
18.8 Anisotropía accidental 417
18.9 Polarización rotatoria 419
18.10 Dispersión rotatoria 421
18.11 Polarimetría 422
18.12 Polarización rotatoria magnética 423

CAPÍTULO 19. — ESPECTROS 425

19.1 Espectroscopio de prisma 425
19.2 Espectroscopio de red 428
19.3 Espectros de emisión 429
19.4 Espectros de absorción 431
19.5 Análisis espectral 431
19.6 Espectroscopía de microondas 432
19.7 Espectrografía de rayos X 432

CAPÍTULO 20. — ENERGÍA· RADIANTE 438

20.1 Radiación térmica 438
20.2 Magnitudes características de la radiación térmica . . . 439
20.3 Ley de Kirchhoff 441
20.4 Cuerpo negro 442
20.5 Espectro del cuerpo negro 443
20.6 Ley de Planck; hipótesis cuántica 445
20.7 Consecuencias de la ley de Planck 448
20.8 Cuerpos no negros 449
20.9 Pirómetros basados en las leyes de la radiación térmica . . 450
20.10 Fotoluminiscencia 450

CAPÍTULO 21. — FOTOMETRÍA. COLOR 452

21.1 Flujo luminoso e intensidad luminosa; focos extensos . . 452
21.2 Iluminación de una superficie 454
21.3 Fotometría práctica 457
21.4 Curva espectral de luminosidad de una radiación 458
21.5 Difusión; factor de luminancia 459
21.6 Sensación de color 460
21.7 Colores del espectro. Temperatura de color 461
21.8 Mezcla de colores 463
21.9 Diagrama de cromaticidad 467
21.10 Determinación del color de un cuerpo 469

CAPÍTULO 22. — FÍSICA ATÓMICA 472

22.1 Series espectrales 472
22.2 Primeras ideas acerca de la estructura atómica 475
22.3 Mecánica ondulatoria 479
22.4 Algunas nociones de Mecánica cuántica 482
22.5 Algunos aspectos de la Electrónica cuántica; maser y laser . 485

CAPÍTULO 23. — FÍSICA NUCLEAR Y PARTÍCULAS ELEMENTALES . 490

23.1 Algunas propiedades de los núcleos 490
23.2 Radiactividad natural 491
23.3 Desintegración radiactiva; período y vida media 492
23.4 Neutrón 494
23.5 Energía nuclear de enlace; fisión y fusión 496
23.6 Modelos nucleares 498
23.7 Partículas elementales 500
23.8 Interacciones fuertes y débiles 503
23.9 Paridad 503
23.10 Otros principios de conservación 506

CAPÍTULO 24. — TEORÍA DE LA RELATIVIDAD RESTRINGIDA . . 508

24.1 Relatividad galileana y Electrodinámica 509
24.2 Consecuencias y experimentos fundamentales de comprobación 512
24.3 Principio de relatividad de Einstein 516
24.4 Constancia de la celeridad de la luz en el vacío 517
24.5 Simultaneidad 519
24.6 Transformación de Lorentz 521
24.7 Interpretación geométrica de la transformación de Lorentz . 526
24.8 Línea de universo y diagrama de Minkowski 527
24.9 Caso general 532
24.10 Contracción de Lorentz 532
24.11 Relatividad de la simultaneidad 534
24.12 Dilatación de los intervalos de tiempo 536
24.13 Comprobación experimental de la dilatación del tiempo . . 537
24.14 Composición de velocidades 538
24.15 La luz en un medio en movimiento: coeficiente de arrastre de Fizeau 541
24.16 Efecto Doppler 542
24.17 Formulación cinemática cuadrivectorial 545
24.18 Dinámica relativista 547
24.19 Masa relativista 550
24.20 Energía de una partícula; fórmulas de Einstein 553
24.21 Sistemas de partículas 555
24.22 Algunas aplicaciones a la Física nuclear 559

Cuestionario 565

Respuestas al cuestionario 577

Problemas 581

Índice alfabético 607

INICIACIÓN A LA FÍSICA

CAJA DE AHORROS DE ALICANTE Y MURCIA
BIBLIOTECA GABRIEL MIRÓ
ALICANTE

1

Electrostática

La humanidad ha observado desde siempre el fenómeno conocido por el nombre de *rayo* que se produce en las tormentas y que constituye, probablemente, el primer contacto con cierto tipo de fenómenos que integran la parte de la Física conocida por el nombre de Electricidad. No obstante, el primer experimento que pudiéramos llamar «de laboratorio» correspondiente a esta rama de la Física lo realizó TALES DE MILETO 600 años antes de Cristo, frotando una barrita de ámbar y observando que atraía a pedacitos de materiales ligeros, cosa que no ocurría en ausencia de frotamiento. Este hecho nos indica, a nosotros, que no se trata de atracciones gravitatorias, las cuales tienen lugar tanto si se frota el ámbar como si no, y que serán mucho menos intensas, ya que no son perceptibles en condiciones normales. Como en griego se llama al ámbar «elektron», las atracciones observadas se denominan *eléctricas* y de aquí el nombre de Electricidad.

Posteriormente, se vio que algunos otros cuerpos presentaban el mismo efecto que el ámbar, pero no es hasta el año 1600 en que WILLIAM GILBERT (1544-1603) descubre que son muchos los cuerpos que presentan dicho efecto y les da el nombre de *cuerpos eléctricos* para diferenciarlos de los cuerpos que no presentan el efecto ámbar, tales como los metales y todos los cuerpos que hoy llamamos *conductores*. En realidad, la *electrización por frotamiento* también la presentan los conductores si no se agarran directamente con la mano sino a través de un cuerpo aislador (los eléctricos de Gilbert) según demostró CHARLES FRANÇOIS DE CISTERNAY DUFAY (1698-1739). A este científico francés se debe también el descubrimiento de las dos clases de electricidad que estudiaremos a continuación. Es de resaltar el largo lapso que media entre los descubrimientos de TALES y de DUFAY.

1.1 Carga eléctrica. Para introducir las ideas más simples de Electricidad, comenzaremos por considerar un dispositivo llamado *péndulo*

eléctrico consistente en una bolita ligera de médula de saúco suspendida de un hilo de seda. Al aproximarle una barra de ámbar frotada con una piel de conejo, la bolita se sentirá atraída y se desviará el péndulo hasta alcanzar una posición de equilibrio en la cual la resultante del peso y de la fuerza de atracción eléctrica sea una fuerza dirigida según el hilo del péndulo y que será equilibrada por la tensión de dicho hilo. La medida del ángulo que forma con la vertical y el conocimiento del peso de la bolita nos permitirán conocer la fuerza de atracción.

Si llegamos a tocar la bolita con la barra de ámbar, observaremos que aquélla es repelida violentamente. Diremos que el péndulo se ha electrizado con electricidad procedente de la barra de ámbar. Si electrizamos otro péndulo con electricidad de otra barra de ámbar frotada análogamente y lo aproximamos al primero, observaremos que ambos péndulos se desvían por repulsión mutua. En cambio, si el segundo péndulo se hubiera electrizado con electricidad procedente de una varilla de vidrio frotada con un pañuelo de seda, los péndulos se atraerían. Esto nos sugiere la existencia de dos clases diferentes de electricidad. Podríamos electrizar muchos péndulos por contacto con distintos cuerpos frotados pero siempre dichos péndulos se comportarían como si hubieran sido electrizados por el ámbar o por el vidrio frotados de la manera antes mencionada, es decir, si dos péndulos A y B se repelen (cualesquiera que sean los cuerpos con que se hubieran puesto en contacto previamente), si A atrae a otro péndulo electrizado C, también lo atraerá B, y si A repelía a C, lo mismo haría B. En cambio, si A y B se atraían, sus acciones sobre C serían opuestas (si uno lo atrae, el otro lo repele).

No hay duda, pues, de que existen dos clases de electricidad. DUFAY les había dado los nombres de «fluido vítreo» (a la que posee el vidrio frotado con seda) y «fluido resinoso» (a la del ámbar), pero BENJAMÍN FRANKLIN (1706-1790) las llamó, respectivamente, *positiva* y *negativa*. Esta denominación es totalmente arbitraria y de igual manera podía haber llamado positiva a la electricidad del ámbar y negativa a la del vidrio. Si así lo hubiera hecho, hubiera sido algo más simple la descripción de la conducción de corriente en los metales (§ 4.3).

Podemos ahora resumir los experimentos anteriores diciendo que «cargas de igual signo se repelen y cargas de signo contrario se atraen». Esta afirmación viene corroborada por la experiencia en todos los casos.

Volvamos a los péndulos A, B y C. Al poner A en presencia de C le ejerce una fuerza. Si al sustituir A por B ejerce sobre C la misma

fuerza, diremos que A y B poseen la misma *carga eléctrica*. Si colocamos ahora A y B juntos en la misma posición relativa a C que antes, observaremos que la fuerza que le ejercen es *doble* que antes.

Más generalmente: supongamos que las fuerzas que ejerzan sobre C los péndulos A y B no sean iguales sino que guarden entre sí una razón dada

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{Q_A}{Q_B} \tag{1.1}$$

donde Q_A y Q_B son dos números. Si colocamos juntos A y B frente a C en la misma posición relativa que antes, veremos que la fuerza a que está sometido C es $F_A + F_B$ y de (1.1) resulta

$$\frac{F_A + F_B}{F_A} = \frac{Q_A + Q_B}{Q_A} \tag{1.2}$$

Los números Q_A y Q_B reciben el nombre de *carga eléctrica* de los péndulos A y B respectivamente, y de lo anteriormente dicho se desprende que el efecto de la carga Q_A más el de la carga Q_B es el mismo que produciría una carga única igual a $Q_A + Q_B$. Como podemos definir así la igualdad y la suma de cargas eléctricas, resulta que la carga eléctrica es una magnitud física. Para medirla, podríamos tomar como unidad la carga Q_B, por ejemplo, y la ec. (1.1) nos permitiría medir la carga Q_A a partir de medidas de las fuerzas F_A y F_B.

Podríamos medir (desde luego, con un procedimiento más preciso que el indicado) la carga eléctrica de una varilla de vidrio frotada con seda y la carga que adquiere la seda en el proceso de frotamiento. En tal caso veríamos que dichas cargas serían de signos opuestos pero iguales en valor absoluto. Quiere esto decir que la carga *total* (suma algebraica de cargas positivas y negativas) no ha variado. Es decir, el frotamiento no ha hecho más que separar unas cargas de signos opuestos que se hallaban mezcladas contrarrestando sus efectos. Esto constituye un ejemplo de una ley general de la Física conocida por el nombre de Principio de *conservación de la carga eléctrica* que dice que *la carga eléctrica total de un sistema aislado permanece invariable*. Este principio, válido incluso en Física relativista, lo admitimos porque todas las consecuencias que de él se derivan vienen corroboradas por la experiencia. Así, por ejemplo, el gas contenido en un recipiente aislado (es decir, al que no se dejan llegar cargas eléctricas) se *ioniza* al ser atravesado por radiaciones ultravioletas; pero dicha ionización tiene lugar formándose simultáneamente una carga positiva y una carga negativa de igual valor absoluto (por ej.: si el

gas es hidrógeno se forman un protón y un electrón). A lo largo de este libro tendremos ocasión de examinar otros muchos ejemplos de conservación de la carga eléctrica.

1.2 Estructura eléctrica de la materia. Existen en la actualidad múltiples evidencias de que la materia es el resultado de la agrupación de partículas elementales que constituyen los átomos. Por el momento, indicaremos que el átomo consta de una parte central llamada *núcleo,* a la cual está asociada casi toda su masa y que tiene carga positiva, rodeada de partículas cargadas negativamente, llamadas *electrones.* Estos electrones son unas 1850 veces más ligeros que las partículas integrantes del núcleo, llamadas *nucleones,* y que pueden clasificarse en *protones* y *neutrones,* según tengan carga eléctrica o no. La carga del protón es, según se indicó en § 1.1, de igual valor absoluto que la del electrón, pero positiva.

En general, los cuerpos materiales son *neutros,* es decir, contienen tantas cargas positivas como negativas. Si un cuerpo pierde electrones o adquiere cargas positivas, quedará cargado positivamente; si adquiere electrones o pierde cargas positivas, quedará cargado negativamente. Al frotar la barra de ámbar con la piel de conejo, los pelos de ésta pierden electrones que pasan al ámbar, el cual queda cargado negativamente, mientras la piel lo es positivamente por tener un defecto de electrones. En cambio, al frotar el vidrio con seda, ésta arranca electrones de aquél. El hielo a bajas temperaturas puede perder electrones y fijar protones. Las nubes altas contienen cargas positivas, probablemente fijadas sobre las moléculas del hielo.

De todo lo anterior, podemos intuir que la carga eléctrica de un cuerpo estará constituida por un múltiplo entero de la carga del electrón (o del protón si es positiva), la cual constituiría una unidad natural de carga eléctrica. En efecto, son muchos los experimentos que han conducido a confirmar tal hipótesis por caminos muy diferentes, siendo de destacar como el más preciso para la determinación de la *carga eléctrica elemental* el realizado en 1910 por R. A. MILLIKAN (1868-1953) y que estudiaremos en detalle en el § 2.14.

Los cuerpos sólidos tienen sus átomos distribuidos tridimensionalmente de manera ordenada constituyendo lo que se llama una red cristalina. Estas redes pueden tener estructuras muy variadas, según cuál sea el cuerpo. En el caso de los metales, los átomos están lo suficientemente próximos como para que los electrones más externos lleguen a estar equidistantes de los núcleos de dos átomos vecinos, con lo que las fuerzas de atracción ejercidas por uno y otro núcleo sobre el electrón se compensan y éste puede escapar del átomo al que

pertenecía con un dispendio de energía muy pequeño. La agitación térmica puede ser suficiente para proporcionar esta energía y así cada átomo puede perder uno o varios electrones que deambularán libremente por los (para ellos) inmensos espacios vacíos existentes en el interior del cristal. Dichos electrones reciben el nombre de electrones *libres* o de *conducción*. Los demás electrones que no puedan abandonar el átomo al que pertenecen reciben el nombre de electrones *ligados*.

Un determinado material puede contribuir con muchos electrones libres, en cuyo caso se dice que es un *buen conductor*. En cambio, si para arrancar un electrón de un átomo fuera preciso gastar una energía muy grande, la agitación térmica podría liberar muy pocos electrones y el cuerpo sería un *mal conductor*. Ejemplo de estos últimos son los cuerpos que GILBERT llamó eléctricos, y buenos conductores son los metales. Comprendemos que para electrizar por frotamiento un buen conductor sea necesario interponer entre él y la mano un cuerpo que no permita la circulación de las cargas, pues si no los múltiples electrones libres existentes en la Tierra pasarían al conductor a través del cuerpo humano atraídos por las cargas positivas no compensadas de los átomos que hubieran perdido un electrón, neutralizándolos. Los cuerpos eléctricos de GILBERT se llaman, a veces, *aisladores* o *aislantes*, pero es preferible llamarles malos conductores o *dieléctricos*, pues no existen cuerpos perfectamente aisladores, ya que todos presentan una cantidad mayor o menor de electrones libres.

1.3 Inducción electrostática. Consideremos un conductor C neutro y aislado al que aproximamos un cuerpo A cargado positivamente. Los electrones libres de C se sentirán atraídos por la carga positiva de A y se desplazarán tendiendo a ponerse lo más cerca de ella (extremo izquierdo de C en fig. 1.1). Ello significa que en C podemos considerar tres regiones: el extremo izquierdo en el que existe un

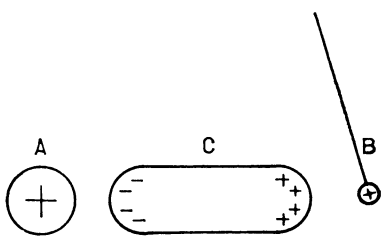


FIG. 1.1 Inducción electrostática.

exceso de electrones, la región central de la que han emigrado electrones libres hacia la izquierda pero que han sido sustituidos por electrones que inicialmente se hallaban más a la derecha, por lo que en la región central hay compensación de cargas. Y por último, el extremo derecho del que han salido electrones hacia la izquierda que no han podido ser sustituidos por otros, por lo que queda un defecto de electrones y por tanto una carga positiva. Esto puede comprobarse acercando al extremo derecho un péndulo *B* cargado positivamente y viendo que es repelido.

Se alcanza, pues, un estado de equilibrio en el cual cada electrón libre queda sometido a las atracciones de las cargas positivas de *A* y *C* y a las repulsiones de los demás electrones, compensándose entre sí todas las acciones.

Si ahora conectáramos *C* con la Tierra, electrones libres de ésta pasarían a *C* atraídos por las cargas positivas neutralizando a éstas, con lo que *C* quedaría con una carga neta negativa. Interrumpiendo la conexión con Tierra, *C* conservaría su carga negativa y habríamos logrado cargarlo por influencia o *inducción electrostática.*

En el ejemplo de la figura 1.1, *A* podía influir también sobre otros conductores en presencia y la distribución de las cargas en *C* sería, posiblemente, otra. Ahora bien, si *C* fuera un conductor hueco y *A* quedara en su interior (fig. 1.2) rodeado casi por completo por *C*, la influencia se dice que es *total.*

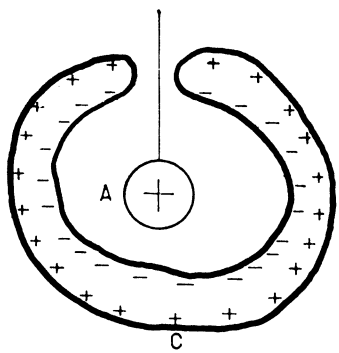


FIG. 1.2 Influencia total.

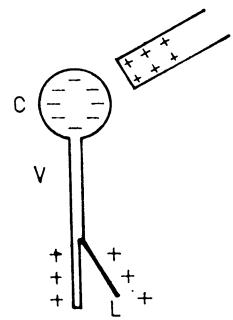


FIG. 1.3 Principio del electroscopio.

El fenómeno de la inducción electrostática constituye la base del funcionamiento del *electroscopio,* instrumento constituido por un conductor *C* (fig. 1.3) de forma conveniente que se prolonga en forma de varilla *V* que tiene adosada una delgada lámina *L* también con-

ductora. Esta lámina suele ser de oro a fin de que pueda ser muy delgada y por tanto ligera. En tal caso se dice que se trata de un electroscopio de pan de oro. Al acercar al conductor C un cuerpo cargado, la inducción electrostática hace que en C aparezcan cargas de signo opuesto a las del cuerpo influyente, mientras que en la lámina L y en el extremo de la varilla aparecen cargas del mismo signo, las cuales, al repelerse, hacen que L se separe de la varilla alcanzando una posición de equilibrio bajo la acción de su peso y de las fuerzas de repulsión.

Supongamos que el conductor C sea un cilindro hueco de manera que podamos introducir en él cuerpos cargados y la influencia sea total. Introduzcamos primero una varilla de vidrio frotada con seda cuidando que no toque a las paredes del cilindro (fig. 1.4 *a*). En éstas se inducirá una carga negativa y en la laminilla L aparecerán cargas positivas que se repelerán con las que aparecen en el extremo de la varilla V. Si ahora introdujéramos el pañuelo de seda con que se frotó el vidrio veríamos que la laminilla L caería a la posición vertical, con lo que se indicaría que la carga total en el interior del cilindro es nula, lo que constituiría una comprobación del principio de conservación de la carga eléctrica.

1.4 Fórmula de Coulomb. La balanza de torsión descrita en § 7.12 del tomo I ideada por CHARLES AUGUSTIN DE COULOMB (1736-1806) fue aprovechada por él mismo para estudiar cómo varían con la distancia las fuerzas que se ejercen dos cargas eléctricas. Las bolitas A y B eran iguales, de médula de saúco y de unos 5 mm de diámetro. La bola A estaba sujeta al extremo de una varilla aislante fija a la caja de la balanza (fig. 1.5). La B estaba unida al extremo de la cruz ais-

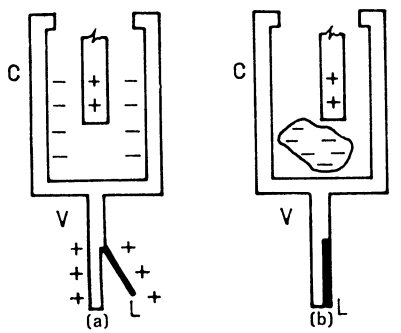


FIG. 1.4. Comprobación de la conservación de la carga eléctrica.

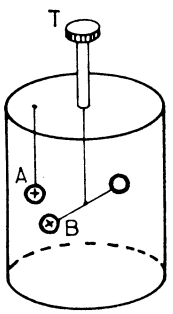


FIG. 1.5 Balanza de Coulomb.

lante suspendida de un hilo de plata muy fino. Electrizaba A y ponía B en contacto con ella con lo que se repartía por igual la carga entre ellas por ser ambas iguales. Al soltarlas se repelían y la torsión del hilo permitía determinar la fuerza de repulsión en condiciones de equilibrio. La distancia entre A y B en estas condiciones puede variarse con ayuda del tornillo T, con lo que varía la fuerza repulsiva. Tras múltiples y cuidadosas medidas, COULOMB llegó a la conclusión de que la fuerza, para cargas eléctricas constantes, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa A y B. Operando después con cargas de signos opuestos, halló el mismo resultado para el caso de fuerzas atractivas.

Como conocía la teoría de la Gravitación Universal de NEWTON (§ 7.11, tomo I), intuyó que la fuerza debía ser proporcional a las cargas eléctricas en presencia y así, una vez hecha una medida como la anteriormente citada, puso en contacto la bola A con otra bola C igual pero neutra. Ello hacía que la carga se repartiera por igual entre A y C y al repetir la medida para igual distancia de equilibrio, halló una fuerza mitad. Esto lo repitió múltiples veces y llegó al resultado que ya nosotros preveíamos a partir de la definición dada en § 1.1 para la carga eléctrica. La expresión de la ley que rige la fuerza que se ejercen *dos cargas puntuales*, es decir, existentes en cuerpos de tamaño muy pequeño frente a las distancias que los separan es, pues,

$$F = k \frac{Q\,Q'}{r^2} \tag{1.3}$$

donde Q y Q' son las cargas en presencia, r la distancia que los separa y k un coeficiente de proporcionalidad que depende del medio interpuesto y, claro está, del sistema de unidades de medida que se emplee.

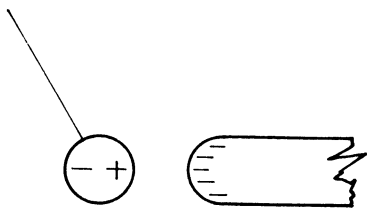


FIG. 1.6 Atracción del péndulo descargado.

Podemos ahora comprender la atracción que ejerce un cuerpo cargado sobre un péndulo eléctrico no electrizado. Al aproximar una

barra de ámbar frotada con una piel al péndulo eléctrico, se produce en la bolita de éste el fenómeno de la inducción electrostática que hace que los electrones libres se alejen todo lo posible de la barra de ámbar frotada. En consecuencia, las cargas positivas del péndulo quedan más cerca del ámbar que las negativas y como la fuerza (atractiva sobre las primeras, repulsiva sobre las segundas) es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, la atracción sobre las cargas próximas será mayor que la repulsión sobre las alejadas, dando una fuerza resultante atractiva.

1.5 Unidades de carga. La fórmula de Coulomb (ec. 1.3) que podemos admitir por estar corroboradas por la experiencia todas las consecuencias que de ella se deducen, presenta un coeficiente k que depende del medio en que se hallen las cargas y del sistema de unidades adoptado. Si se efectúan las medidas en el vacío (en el aire resulta igual con gran aproximación), el valor de k dependerá sólo de las unidades; ello lleva a considerar la posibilidad de adoptar como unidad de carga eléctrica una que sea de aplicación cómoda y así se pensó en que empleando el sistema cgs para las unidades mecánicas podría tomarse como unidad de carga eléctrica la que correspondiera a $k = 1$ en la ecuación 1.3. Con ello se establecen las bases del sistema de unidades electrostáticas cgs. Así pues, la unidad electrostática de carga eléctrica (modernamente llamada *statcoulomb*) será *la carga que, puesta en presencia de otra igual en el vacío a 1 cm de distancia, la repele con la fuerza de 1 dyna.*

Este sistema de unidades electrostáticas cgs pretendía expresar todas las magnitudes en función de las tres fundamentales: longitud, masa y tiempo. Por ello al coeficiente de proporcionalidad k se le consideraba abstracto y según se desprende de la fórmula de Coulomb, las dimensiones de la carga serían

$$[Q] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}$$

que presenta el inconveniente de los exponentes fraccionarios de difícil interpretación física. Por otra parte, las cargas eléctricas que se manejan en procesos industriales hacen que el statcoulomb resulte una unidad incómoda por su pequeñez y ello llevó a considerar una unidad práctica, a la que se da el nombre de *coulomb* (C) que se define por la equivalencia

$$1\ \text{C} = 2{,}998 \times 10^9\ \text{statcoulomb}$$

No debemos considerar el coulomb simplemente como un múltiplo de una unidad pequeña sino como una cuarta unidad fundamental

que junto con el metro, el kilogramo y el segundo constituyen la base del sistema giorgi de unidades. Ello obliga a dar a k dimensiones y así debe ser, pues representa la propiedad del espacio de transmitir las fuerzas *eléctricas* y en virtud de la equivalencia entre el coulomb y el statcoulomb, su valor para el sistema giorgi puede comprobarse que es $k = 8{,}9875 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$.

Hoy en día suele emplearse el sistema giorgi *racionalizado* caracterizado por escribir la fórmula de Coulomb en la forma

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ'}{r^2} \tag{1.4}$$

con lo que muchas fórmulas de Electricidad aparecen sin un factor 4π que aparecería al utilizar un sistema no racionalizado. Por otra parte, el sistema giorgi (racionalizado o no) presenta la ventaja de que al tomar una cuarta unidad fundamental, que por el momento podemos considerar que es el coulomb, todas las magnitudes tienen dimensiones que pueden expresarse en función de las de la longitud, masa, tiempo y carga eléctrica afectadas de exponentes *enteros*. Así, por ejemplo, la constante ε_0 de la ecuación 1.4 denominada *permitividad del vacío* tiene por dimensiones

$$[\varepsilon_0] = M^{-1} L^{-3} T^2 Q^2$$

y su valor en este sistema giorgi racionalizado es

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/J \cdot m}$$

2

El Campo Electrostático

2.1 Campo eléctrico. La región del espacio que rodea a una carga puntual Q situada en un punto O presenta propiedades de las que carece en ausencia de Q. Por ejemplo, al colocar en uno de sus puntos una carga Q', ésta está sometida a una fuerza dada por la ecuación 1.4 si existe Q, fuerza que no se ejercería en ausencia de dicha carga Q. La perturbación del espacio que origina esta carga puede describirse asociando a cada uno de sus puntos un vector $\mathbf{E}$ al que llamaremos *campo eléctrico* y que definiremos de la manera siguiente. En un punto P de la región del espacio que rodea a la carga puntual Q coloquemos una *carga de prueba* q suficientemente pequeña para no alterar sensiblemente las propiedades del espacio. Dicha carga de prueba se hallará sometida a una fuerza $\mathbf{F}$ de dirección OP, sentido de alejamiento de O o el opuesto según que Q y q sean del mismo signo o de signos opuestos y de módulo

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q\,q}{r^2} \tag{2.1}$$

según se deduce de la ecuación (1.4). El vector $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$ asociado a P será independiente de la carga de prueba y constituirá un campo newtoniano (cf. § 3.7, tomo I) de masa agente

$$c = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \tag{2.2}$$

es decir,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r^2} \tag{2.3}$$

Es evidente, en virtud de la repulsión entre cargas de igual signo y de la atracción entre cargas de signo contrario, que si $Q > 0$, $\mathbf{E}$ estará dirigido radialmente y en el sentido de alejamiento de la carga Q

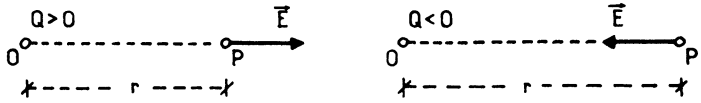


FIG. 2.1 Campo creado en P por una carga Q.

creadora del campo, y que si $Q < 0$ el sentido de $\mathbf{E}$ sería el opuesto (fig. 2.1).

Por tanto, el campo $\mathbf{E}$ quedará definido por la ecuación vectorial

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}(P - O) \tag{2.4}$$

ya que r es el módulo del vector $P - O$.

Las líneas de fuerza son rectas concurrentes en la carga Q (figura 2.2 *a*).

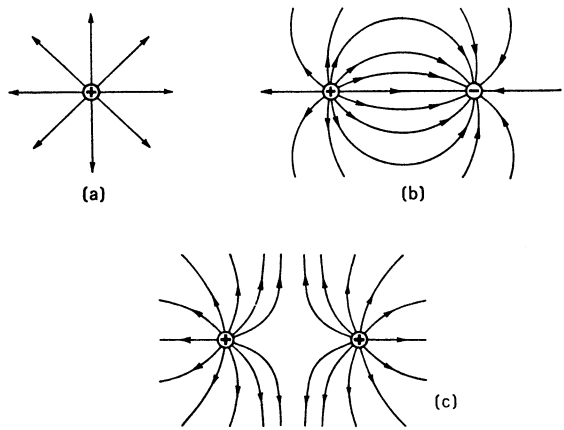


FIG. 2.2 Campo creado por *a*) una carga puntual única; *b*) dos cargas puntuales de signos opuestos e igual valor absoluto; *c*) dos cargas puntuales iguales.

En el caso de existir varias cargas, Q_1, Q_2, ..., Q_N, situadas en diversos puntos, O_1, O_2, ..., O_N, la fuerza que ejercerían sobre la carga de prueba q en P sería la suma vectorial de las fuerzas que sobre q ejercerían por separado las cargas del sistema, y manteniendo la definición de campo eléctrico $\mathbf{E}$ como *fuerza por unidad de carga* resultará que el campo eléctrico resultante sería la suma de los campos creados en P por cada una de las cargas por separado. O sea que,

en virtud de lo dicho en § 3.7 del tomo I será un campo newtoniano creado por las masas agentes

$$c_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}, \quad c_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}, \quad \ldots, \quad c_N = \frac{Q_N}{4\pi\varepsilon_0}$$

situadas en O_1, O_2, ..., O_N, respectivamente. En la figura 2.2 *b* y *c* se han representado los campos creados por dos cargas opuestas e iguales, respectivamente.

Las dimensiones del campo eléctrico serán las de una fuerza dividida por una carga eléctrica, por lo que en el sistema giorgi serán $M\,L\,T^{-2}\,Q^{-1}$.

Ejemplo. En tres vértices de un cuadrado de área 2,00 m² se hallan situadas las cargas $Q_A = 1{,}0 \times 10^{-8}$ C, $Q_B = 3{,}0 \times 10^{-8}$ C y $Q_C = -2{,}0 \times 10^{-8}$ C. Determinar el campo eléctrico existente en el cuarto vértice y en el centro del cuadrado.

Tomemos el cuarto vértice D como origen de coordenadas y definamos los ejes de abscisas y ordenadas por los lados $\overline{DC}$ y $\overline{DA}$, respectivamente. Llamaremos X_A, Y_A a las componentes del campo eléctrico creado en D por Q_A; X_B, Y_B a las del campo creado por Q_B en D, y X_C, Y_C a las del creado en D por Q_C.

Examinando la figura 2.3 *a* y teniendo en cuenta la ecuación 2,3 y que $1/4\pi\varepsilon_0 = 8{,}9875 \times 10^9$ si empleamos unidades giorgi, tenemos:

$$X_A = 0 \qquad Y_A = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_A}{\overline{AD}^2} = -45$$

$$X_B = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_B}{\overline{BD}^2}\cos\frac{\pi}{4} = -48 \qquad Y_B = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_B}{\overline{BD}^2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -48$$

$$X_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_C}{\overline{CD}^2} = +90 \qquad Y_C = 0$$

de donde, las componentes cartesianas del campo resultante en D son

$$E_X = X_A + X_B + X_C = +42 \qquad E_Y = Y_A + Y_B + Y_C = -93$$

luego

$$E = \sqrt{E_X^2 + E_Y^2} = 102 \text{ N/C}$$

y el ángulo que formaría este campo con el semieje positivo de abscisas sería

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{93}{42}\right) = -65^\circ\,42'$$

Si ahora consideramos el centro del cuadrado (fig. 2.3 *b*) tendremos que $\mathbf{E}_A$ y $\mathbf{E}_C$ son vectores de igual dirección y sentido dirigidos de O a C, mientras

que $\mathbf{E}_B$ es perpendicular a ellos y dirigido hacia D. Teniendo en cuenta que $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = 1$ m, tenemos:

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_A}{\overline{AO}^2} = 90 \text{ N/C}; \quad E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_B}{\overline{BO}^2} = 270 \text{ N/C}$$

y

$$E_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_C}{\overline{CO}^2} = 180 \text{ N/C}$$

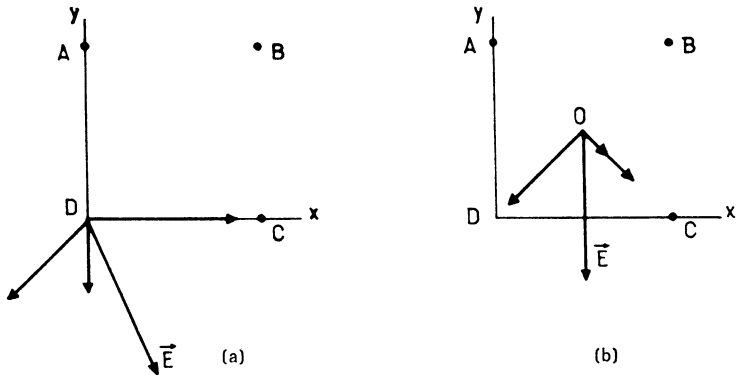


FIG. 2.3

Componiendo $\mathbf{E}_A$ y $\mathbf{E}_C$ tenemos un vector de igual dirección y sentido cuyo módulo es

$$E_A + E_C = 270 \text{ N/C}$$

y como $\mathbf{E}_B$ es perpendicular a él, el campo $\mathbf{E}$ resultante en O será perpendicular a CD, dirigido hacia abajo y de módulo

$$E = 270\sqrt{2} = 380 \text{ N/C}$$

2.2 Dipolo eléctrico. Dos cargas eléctricas de igual valor absoluto q pero de signos opuestos, separadas por una pequeña distancia d (fig. 2.4) constituyen un *dipolo eléctrico*. Representando por $\mathbf{d}$ al vector con origen en la carga $-q$ y extremo en la carga $+q$ al vector

$$\mathbf{p} = q\,\mathbf{d} \tag{2.5}$$

se le da el nombre de *momento eléctrico* del dipolo, o momento dipolar. El campo creado por el dipolo en puntos próximos a él sería análogo al representado en la figura 2.2 b y no vamos a entrar en detalles acerca de él. En cambio, sí vamos a estudiar el campo creado por el dipolo en un punto P situado respecto a las cargas a distancias mucho mayores que d (fig. 2.4). El campo será el debido al sistema de dos cargas $+q$ y $-q$ situadas en los puntos A y B que, en virtud de la ecuación 2.4 será

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{P-A}{\overline{PA}^3} - \frac{P-B}{\overline{PB}^3}\right] \tag{2.6}$$

Pero

$$\left.\begin{aligned} P-A &= (P-O)+(O-A) = (P-O) - \tfrac{1}{2}\,\mathbf{d} \\ P-B &= (P-O)+(O-B) = (P-O) + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{d} \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

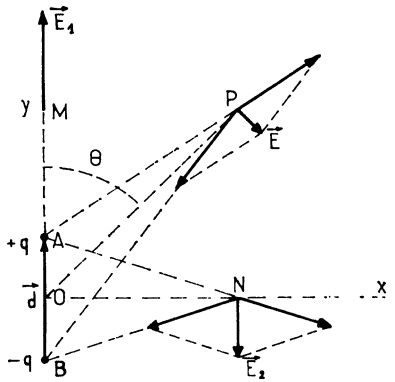


FIG. 2.4 Dipolo eléctrico.

y sustituyendo las ecuaciones (2.7) en la (2.6)

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{\overline{PA}^3}\left[(P-O) - \frac{\mathbf{d}}{2}\right] - \frac{1}{\overline{PB}^3}\left[(P-O) + \frac{\mathbf{d}}{2}\right]\right\} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\left[\frac{1}{\overline{PA}^3} - \frac{1}{\overline{PB}^3}\right](P-O) - \left(\frac{1}{\overline{PA}^3} + \frac{1}{\overline{PB}^3}\right)\frac{\mathbf{d}}{2}\right\} \tag{2.8}$$

Ahora bien, aplicando el teorema del coseno a los triángulos AOP y BOP (fig. 2.4) tenemos

$$\overline{PA}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{OA}^2 - 2\,\overline{OA}\cdot\overline{OP}\,\cos\theta$$

$$\overline{PB}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{OB}^2 + 2\,\overline{OB}\cdot\overline{OP}\,\cos\theta$$

y llamando r a $\overline{OP}$ estas ecuaciones quedan en la forma

$$\left.\begin{aligned} \overline{PA}^2 &= r^2\left[1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d}{r}\cos\theta\right] \\ \overline{PB}^2 &= r^2\left[1 + \frac{d^2}{4r^2} + \frac{d}{r}\cos\theta\right] \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Supondremos que d es lo suficientemente pequeño frente a r como para poder despreciar d^2/r^2 frente a la unidad, con lo que las ecuaciones 2.9 quedarían

$$\overline{PA}^2 \simeq r^2\left[1-\frac{d}{r}\cos\theta\right]$$
$$\overline{PB}^2 \simeq r^2\left[1+\frac{d}{r}\cos\theta\right] \tag{2.10}$$

El Análisis Matemático enseña que

$$(1+x)^a = 1 + a\,x + \frac{a(a-1)}{2!}\,x^2 + \ldots$$

siendo a un número que puede ser fraccionario, luego si $a = -\frac{3}{2}$ y elevamos las ecuaciones 2.10 a $-\frac{3}{2}$ tendremos

$$\overline{PA}^{-3} \simeq r^{-3}\left(1+\frac{3}{2}\,\frac{d}{r}\cos\theta+\ldots\right)$$
$$\overline{PB}^{-3} \simeq r^{-3}\left(1-\frac{3}{2}\,\frac{d}{r}\cos\theta+\ldots\right) \tag{2.11}$$

donde pueden despreciarse los términos de grado superior al primero en virtud de la pequeñez de d/r. De las ecuaciones (2.11) tenemos

$$\frac{1}{\overline{PA}^3}-\frac{1}{\overline{PB}^3} \simeq \frac{1}{r^3}\,3\,\frac{d}{r}\cos\theta$$
$$\frac{1}{\overline{PA}^3}+\frac{1}{\overline{PB}^3} \simeq \frac{2}{r^3}$$

que sustituidas en la ecuación (2.8) dan

$$\mathbf{E} \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[3\,\frac{d\cos\theta}{r^4}(P-O)-\frac{\mathbf{d}}{r^3}\right]$$

o, en virtud de la ecuación (2.5)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3p\cos\theta}{r^4}(P-O)-\frac{1}{r^3}\mathbf{p}\right] \tag{2.12}$$

El campo en un punto M del eje OY (fig. 2.4) estará dirigido según *dicho* eje en la forma indicada y su módulo se obtiene fácilmente teniendo en cuenta que en tal caso $\theta = 0$ y $|P-O| = r$

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3p}{r^3}-\frac{p}{r^3}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{2p}{r^3}$$

En cambio, el campo en un punto N del eje OX será paralelo al anterior y de sentido contrario y podemos obtener su módulo haciendo $\theta = \pi/2$. Queda en tal caso:

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{p}{r^3}$$

2.3 Flujo eléctrico. Hemos visto que el campo eléctrico es newtoniano y, por tanto, su flujo saliente a través de una superficie cerrada vendrá dado por el teorema de Gauss (§ 3.7, tomo I), es decir, será igual al producto de 4π por la masa agente total existente en el interior de la superficie cerrada. Ahora bien, como en el caso actual las masas agentes son (cf. § 2.1)

$$c_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}, \quad c_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}, \quad \ldots, \quad c_i = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0}, \quad \ldots$$

la expresión del teorema de Gauss (ec. 3.14, tomo I) quedará en la forma

$$\Phi = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0} \tag{2.13}$$

lo cual significa que *el flujo eléctrico saliente a través de una superficie cerrada cualquiera es igual a la carga total existente en su interior dividida por la permitividad del vacío* ε_0.

Resulta inmediato que las dimensiones del flujo eléctrico son, en el sistema giorgi,

$$[\Phi] = M L^3 T^{-2} Q^{-1}$$

2.4. Campo creado por una distribución de cargas homogénea, plana e indefinida. Consideremos una distribución plana e indefinida de cargas distribuida con continuidad de manera que áreas iguales contengan cargas asimismo iguales, siendo σ la densidad superficial de cargas o carga por unidad de superficie. Consideremos dos elementos de superficie dS iguales y situados simétricamente respecto al plano de las cargas. Dichos elementos los consideraremos como bases de un cilindro que tomaremos como superficie de Gauss.

Por razón de simetría, las líneas de fuerza del campo eléctrico han de ser normales al plano de las cargas, y los campos en ambas bases del cilindro serán opuestos y de igual módulo. El flujo saliente a través de la superficie de Gauss será la suma de los flujos a través de las bases, pues a través de la superficie lateral del cilindro es nulo por ser tangente a ella el campo. Así pues, el flujo total saliente será

$$\Phi = 2E\,dS$$

Por otra parte, la carga total existente en el interior del cilindro será $\sigma\,dS$, pues no hay más carga que la interceptada por éste en el plano, y aplicando el teorema de Gauss tendremos

$$2\,E\,dS = \frac{\sigma\,dS}{\varepsilon_0}$$

de donde

$$E = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0} \tag{2.14}$$

y vemos que el módulo y dirección del campo eléctrico son independientes del punto del espacio que se considere.

2.5 Campo creado por dos distribuciones de cargas planas, paralelas, homogéneas y opuestas. Si tenemos dos distribuciones planas, paralelas de densidades de carga constantes $+\sigma$ y $-\sigma$, determinarán en el espacio tres regiones: una comprendida entre los planos y dos exteriores.

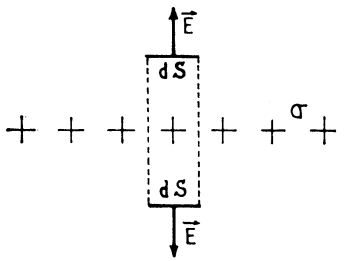


FIG. 2.5 Campo de una distribución plana homogénea.

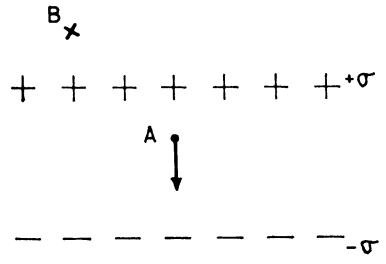


FIG. 2.6 Distribuciones opuestas, planas y paralelas.

En un punto A de la primera, cada distribución de cargas crea un campo de módulo dado por la ecuación (2.14), ambos de igual sentido, pues el de alejamiento de las cargas positivas coincide en dicha región con el de acercamiento a las negativas. En consecuencia, en la región comprendida entre las cargas se tendrá un campo *uniforme*, es decir, que en todos los puntos tendrá iguales dirección, sentido y módulo, siendo éste

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{2.15}$$

En cambio, en los puntos de las regiones exteriores (p. ej. B en fig. 2.6) los campos creados por una y otra distribución son de igual módulo (ec. 2.14) y dirección, pero de sentidos opuestos, lo que hace que en todos los puntos exteriores a la región determinada por los dos planos el campo sea nulo.

2.6 Campo y cargas en un conductor en equilibrio. El movimiento totalmente desordenado de los electrones libres existentes en un conductor y el gran número de ellos hace que, por término medio, el número de electrones que abandonen un elemento de volumen del conductor por unidad de tiempo sea igual al número de los que lle-

gan a él. Todo sucede como si los electrones no hubieran abandonado sus posiciones iniciales, y ello hace que se pueda considerar que se hallan en reposo. No obstante, podemos evitar esta consideración definiendo un *conductor en equilibrio electrostático* como aquel en el cual *las cargas móviles se desplazan sin efectuar ni consumir trabajo.* Los electrones libres se comportan como las moléculas de un gas (cfr. cap. 18, tomo I), que también se mueven, cuando el gas está en equilibrio, sin efectuar ni consumir trabajo alguno. De aquí que muchas veces se habla del *gas electrónico* al referirse a los electrones libres en un conductor.

Ahora bien, si en el interior de un conductor no fuera nulo el campo eléctrico **E**, sobre una carga libre se ejercería una fuerza y al moverse aquélla la fuerza efectuaría un trabajo y el conductor no estaría en equilibrio electrostático, luego: *en todos los puntos interiores a un conductor en equilibrio el campo eléctrico es nulo.* En los puntos de la superficie del conductor no será necesaria tal restricción, pues bastará que el campo sea normal a ella en todos sus puntos, ya que, en tal caso, al desplazarse las cargas móviles sobre la superficie, el desplazamiento y la fuerza serían siempre perpendiculares y el trabajo efectuado sería nulo.

Tomemos ahora una superficie S cuyos puntos sean todos interiores a un conductor en equilibrio (fig. 2.5). Como en ellos es nulo el campo, también lo será el flujo a través de S, y el teorema de Gauss (ec. 2.13) exige que sea nula la carga total interior a S cualquiera que ésta sea, con tal que todos sus puntos sean interiores al conductor. Luego, en el interior de un conductor en equilibrio las cargas de uno y otro signo se compensan exactamente, *si el conductor está cargado y en equilibrio electrostático su carga debe hallarse sobre su superficie.*

2.7 Campo en la superficie de un conductor en equilibrio. Ya hemos visto que en la superficie del conductor el campo ha de ser normal a ella en todos los puntos. Vamos ahora a calcular su módulo. Para ello consideremos un elemento dS de la superficie del conductor y un punto A frente a ella situado a una distancia despreciable frente a las dimensiones transversales del elemento dS (fig. 2.8). Consideremos un elemento de superficie paralelo a dS que pase por A y esté limitado por las normales a la superficie del conductor en los puntos del contorno de dS. Por las condiciones impuestas, el área de este elemento sólo diferirá de dS en infinitésimos de orden superior y el flujo a través de él valdrá $E\,dS$, ya que el campo **E** es normal al elemento de superficie. Este elemento, junto con el tubo definido por las

normales mencionadas y una superficie S en forma de bolsa (fig. 2.8) cuyos puntos sean todos interiores al conductor, constituyen una superficie cerrada de Gauss. El flujo saliente a través de ella será la suma del flujo a través del elemento que pasa por A, que ya hemos dicho vale $E\,dS$, más el flujo a través de las paredes del tubo, que es nulo por ser el campo tangente a las paredes, más el flujo a través de la bolsa S, que es también nulo por serlo el campo en todos los puntos por ser interiores al conductor. Es decir, que el flujo total saliente a través de la superficie de Gauss se reduce a $E\,dS$.

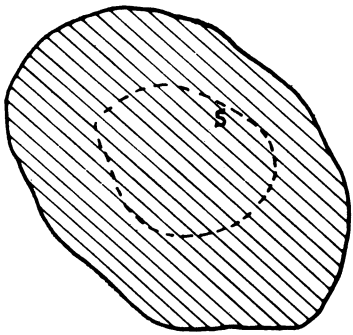


FIG. 2.7 No hay campo ni carga en el interior de un conductor en equilibrio.

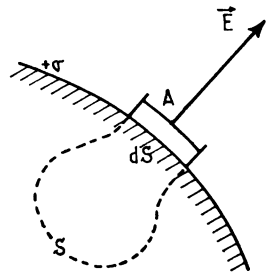


FIG. 2.8 Campo en la superficie de un conductor.

Por otra parte, en el interior de esta superficie no puede haber más carga eléctrica que la existente en el elemento de superficie del conductor, que será $\sigma\,dS$, siendo σ la densidad superficial de carga, la cual podrá variar de unos puntos a otros de la superficie del conductor. En consecuencia, la aplicación del teorema de Gauss (ec. 2.13) nos permite escribir

$$E\,dS = \frac{\sigma\,dS}{\varepsilon_0}$$

de donde

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{2.16}$$

Así pues, el campo será mayor en los puntos próximos a lugares de la superficie en que exista una gran densidad de carga eléctrica. Es evidente que si ésta fuera negativa, el resultado negativo de la ecuación 2.16 corresponde al hecho de que el campo apuntaría hacia el conductor, y podemos afirmar, pues, que las líneas de fuerza salen de los puntos donde hay carga positiva y llegan a los que tienen carga negativa.

La carga de un conductor se distribuye por su superficie de manera que en las partes de mayor curvatura es donde se tiene mayor densidad de carga. En consecuencia, si un conductor tiene partes puntiagudas, en la superficie de las puntas existe un campo muy intenso. Las moléculas del aire ambiente pueden ionizarse a causa del campo tan intenso, y las partículas con carga de igual signo que la carga del conductor son repelidas fuertemente dando origen al llamado *viento eléctrico,* que puede desviar la llama de una cerilla, o a *efluvios* que se manifiestan mediante fenómenos luminosos. Las

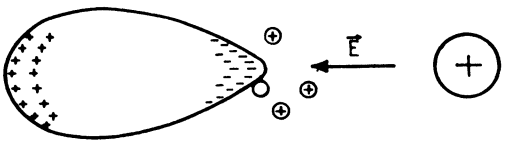


FIG. 2.9 Poder de las puntas.

partículas cargadas con electricidad de signo contrario serán fuertemente atraídas por el conductor y se descargarán en él, neutralizando parte de su carga. A consecuencia de ello, el conductor pierde su carga por las puntas y el fenómeno recibe el nombre de *poder de las puntas.* Este fenómeno también puede servir para cargar un conductor enfrentando una de sus puntas a un conductor cargado. Por influencia, en la punta se acumulará una gran densidad de cargas de signo contrario (fig. 2.9), que irán neutralizando las partículas cargadas que llegan atraídas por el intenso campo existente en la punta, con lo que resulta que el cuerpo adquiere una carga del mismo signo que la del cuerpo inductor. Si suponemos que éste es una nube y que el otro cuerpo está conectado a tierra, las cargas (positivas en fig. 2.9) se neutralizarían y el resultado sería que se descargaría la nube cediendo su carga a la punta y pasando luego a tierra. Éste es el efecto del pararrayos de FRANKLIN.

2.8 Campo creado por una distribución de cargas con simetría esférica. Si tenemos un conductor esférico cargado, su carga se distribuirá uniformemente por la superficie y nos encontraremos en el caso del campo newtoniano creado por una capa esférica de masas agentes (§ 3.9, tomo I), por lo que el campo creado en los puntos *exteriores* será el mismo que crearía la carga total del conductor supuesta concentrada en su centro, mientras que en los puntos interiores el campo será nulo. Esto es cierto tanto si el conductor esférico es macizo como si presentara alguna cavidad, ya que las cargas

eléctricas sólo se distribuyen por la superficie exterior, según razonaremos más adelante (§ 2.10).

Así pues, podemos llevar a una gráfica en abscisas la distancia r del punto en que se calcula el campo al centro de la esfera, y en ordenadas el módulo del campo, con lo que obtendremos una gráfica

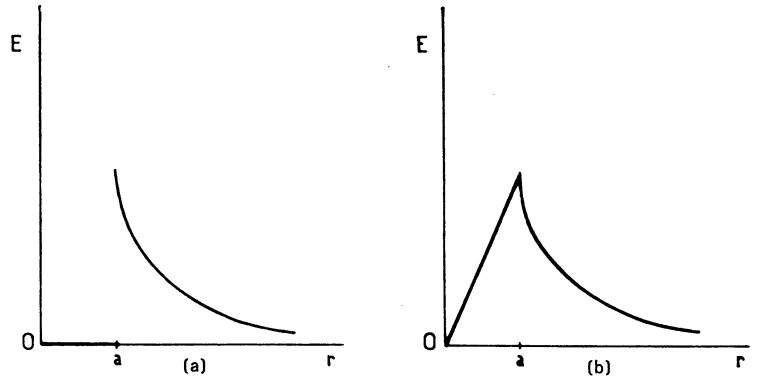


FIG. 2.10 *a*) Campo creado por un conductor esférico de radio a. b) Campo creado por una distribución espacial de cargas, de densidad constante.

como la de la figura 2.10 *a*, ya que para los puntos interiores ($r < a$) el campo es nulo, y para los demás ($r \geqslant a$) el campo es radial y el módulo vale

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \tag{2.17}$$

En los puntos de la superficie, como

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

la ecuación 2.16 nos da el mismo resultado que la 2.17 al hacer $r = a$. Observemos que en la superficie del conductor el campo sufre una discontinuidad.

Si en lugar de un conductor tuviéramos una distribución *espacial* esférica de carga cuya densidad ρ sólo dependiera de r, el campo creado en los puntos exteriores también coincidiría con el que crearía la carga total de la esfera al concentrarla en su centro (cfr. § 3.10, tomo I), mientras que en los puntos interiores el campo sería igual al creado en el punto a distancia r ($r < a$) por la carga de la esfera

de radio r supuesta concentrada en su centro. En la figura 2.10 *b* hemos representado el caso correspondiente a una densidad espacial (carga por unidad de volumen) ρ = constante.

Se comprende que para $r \geqslant a$ el campo se distribuye de igual manera que en el caso del conductor esférico. En cambio, para $r < a$ sólo cuenta la carga q de la esfera concéntrica con la distribución y radio r que es

$$q = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

y el campo que crea en el punto a distancia r del centro vale

$$E = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \left(\frac{4}{3} \pi \rho r \right) = \frac{1}{3 \varepsilon_0} \rho r$$

que si es ρ = const. constituye una relación de proporcionalidad entre E y r.

2.9 Potencial eléctrico.* El campo electrostático (campo creado por un sistema de cargas en equilibrio) es newtoniano y por tanto deriva de un potencial que para el campo creado por una carga puntual única será, teniendo en cuenta la ecuación 2.2,

$$V = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{Q}{r} \tag{2.18}$$

(cfr. ec. 3.9, tomo I) si se toma en el infinito el cero de potencial. Con esta última consideración, el campo creado por un sistema de cargas derivará de un potencial

$$V = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \sum \frac{Q_i}{r_i} \tag{2.19}$$

donde r_i es la distancia del punto P donde se calcula el potencial a la carga Q_i (cfr. ec. 3.10, tomo I).

Ahora bien, la definición de campo eléctrico dada en § 2.1 nos dice que es la fuerza que se ejerce sobre la unidad positiva de carga. Su circulación entre dos puntos o ddp (cfr. § 3.3, tomo I), también llamada *tensión*, será, pues, el trabajo que efectúa la fuerza que se ejerce sobre la unidad de carga al pasar de uno a otro punto, y en concreto, *el potencial eléctrico de un punto es el trabajo que hay*

* Repásese § 3.3, tomo I.

que efectuar contra las fuerzas del campo para traer la unidad positiva de carga desde el infinito a dicho punto. Se supone, desde luego, potencial nulo en los puntos infinitamente alejados del sistema de cargas creadoras del campo.

La unidad de potencial en el sistema giorgi es el *volt* (V), que será *el potencial existente en un punto tal que para traer desde el infinito hasta él una carga positiva de 1 C sea necesario efectuar un trabajo de 1 J contra las fuerzas del campo.*

Naturalmente, si para llevar de un punto A a otro B una carga positiva de 1 C es necesario efectuar contra las fuerzas del campo un trabajo de 1 J, la ddp entre dichos puntos será de 1 V, siendo más elevado el potencial de B que el de A.

Por ser conservativo el campo electrostático, su circulación a lo largo de una curva cerrada ha de ser nula, y ello hace que *las líneas de fuerza del campo electrostático no puedan cerrarse sobre sí mismas,* pues si fueran cerradas y calculásemos la circulación a lo largo de una de ellas, sería positiva o negativa, según que tomáramos el sentido del campo o el opuesto para el recorrido, pero no nula.

Ya veíamos (§ 2.7) que de las cargas positivas salen líneas de fuerza y a las negativas llegan. Eventualmente, las líneas de fuerza pueden provenir del infinito o ir a parar a él. Ahora bien, una línea de fuerza no puede nacer en el infinito e ir a morir a él, pues la circulación a lo largo de ella nos daría la ddp entre dos puntos del infinito que ya sabemos es nula.

Si en vez de llevar 1 C de A a B lleváramos Q coulomb, el trabajo que tendríamos que efectuar contra las fuerzas del campo sería Q veces mayor que la ddp, o sea

$$W = Q\,(V_B - V_A) \tag{2.20}$$

Este trabajo es igual, claro está, al que efectuarían las fuerzas del campo al volver la carga Q de B a A. De la ecuación 2.20 se deduce que las dimensiones del potencial son las de un trabajo dividido por una carga, es decir,

$$[V] = M\,L^2\,T^{-2}\,Q^{-1}$$

Asimismo, la unidad de campo eléctrico N/C que habíamos empleado hasta ahora, equivale al volt/metro (V/m) según resulta inmediatamente. Es costumbre expresar siempre los campos eléctricos en V/m.

2.10 Potencial de un conductor en equilibrio. En § 2.6 definíamos el conductor en equilibrio electrostático diciendo que en él pue-

den desplazarse las cargas sin efectuar ni consumir trabajo. Es decir, si A y B son dos puntos cualesquiera de un conductor en equilibrio $W = 0$ en la ecuación 2.20 y ello exige que $V_A = V_B$, es decir, que *todos los puntos de un conductor en equilibrio se hallan al mismo potencial.* La superficie del conductor es una superficie equipotencial y el campo es normal a ella en todos sus puntos y está dirigido hacia los potenciales decrecientes (cfr. § 3.4, tomo I). Ahora bien, en § 2.7 acabamos de ver que el campo está dirigido hacia el exterior de los conductores en los puntos de su superficie que tienen carga positiva y hacia el interior de los mismos en los puntos cargados negativamente. Ello significa que si un conductor tiene cargas positivas repartidas por toda su superficie, ésta presenta un máximo relativo de potencial en la región del espacio en que se halle el conductor (fig. 2.11 *a*). Si las cargas fueran negativas, el conductor presentaría un mínimo relativo de potencial (fig. 2.11 *b*).

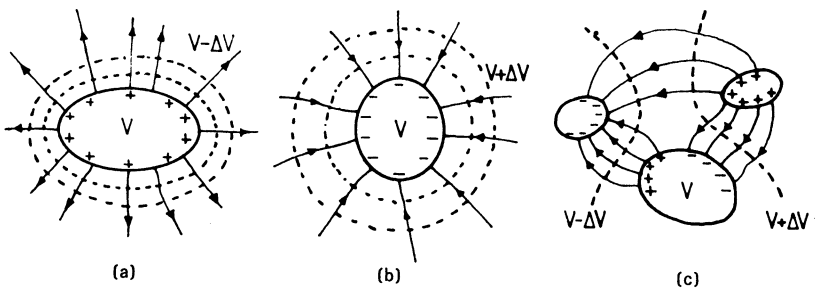


FIG. 2.11 *a*) Las superficies equipotenciales que rodean al conductor corresponden a potenciales más bajos que el de éste. *b*) Las superficies equipotenciales que rodean al conductor corresponden a potenciales más altos que el de éste. *c*) La superficie del conductor no presenta máximo ni mínimo de potencial.

Si el conductor se hallara en presencia de otros cargados con cargas de signos diferentes, en su superficie podrían aparecer cargas inducidas, positivas en unas zonas y negativas en otras (fig. 2.11 *c*). El conductor sigue teniendo el mismo potencial en todos sus puntos, pero no es ni máximo ni mínimo.

Ahora bien, una línea de fuerza no puede partir de un punto de un conductor en equilibrio e ir a parar a otro punto del mismo conductor, pues la circulación del campo a lo largo de ella no sería nula, lo que entrañaría una ddp entre dos puntos del mismo conductor y éste no estaría en equilibrio. Esto hace que en una cavidad de un conductor hueco no haya campo eléctrico, pues como las líneas de fuerza no pueden ser cerradas, de haber campo tendrían que ir de un

punto a otro del conductor. Así, dicha cavidad quedaría protegida contra las acciones eléctricas exteriores (fig. 2.12) y el conductor constituye una *pantalla eléctrica*. En las paredes de la cavidad no puede haber carga eléctrica. En efecto: Si aparecieran cargas, saldrían líneas de fuerza de las positivas y llegarían a las negativas, lo cual es imposible, pues ya hemos razonado que en la cavidad el campo es nulo.

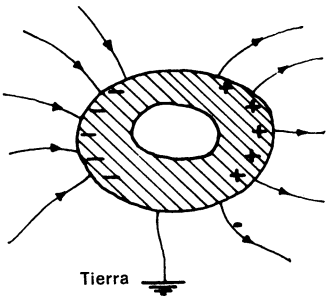


FIG. 2.12 Pantalla eléctrica.

Si se une a tierra el conductor, su potencial será en todos los puntos el de la Tierra, que podemos considerar nulo por haber puntos de la Tierra tan alejados del sistema que podemos considerarlos en el infinito.

El efecto es recíproco. Si en el interior de la cavidad colocáramos cargas, el campo de éstas no saldría fuera del conductor. En los circuitos de radio es frecuente *blindar* cables y otros elementos de circuito con el fin de evitar que en ellos se induzcan cargas a causa de campos generados en otras partes del montaje. En los laboratorios de alta tensión, los operarios trabajan en el interior de jaulas metálicas unidas a tierra, con lo que quedan protegidos de las posibles descargas exteriores. Son las llamadas *jaulas de Faraday,* así llamadas en recuerdo de su inventor MICHAEL FARADAY (1791-1867).

2.11 Potencial creado por una distribución de cargas con simetría esférica. Los potenciales de los que derivan los campos descritos en § 2.8 se estudiaron ya en §§ 3.9 y 3.10 del tomo I, resultando que en los puntos exteriores a la distribución el potencial es igual al que crearía toda la carga concentrada en el centro de la esfera. Es decir, tomando en el infinito el cero de potenciales

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \tag{2.21}$$

donde Q es la carga total.

En los puntos interiores a la capa de radio a el potencial resultaba ser (§ 3.9, tomo I) constante e igual a

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a} \qquad (2.21\ bis)$$

que es el potencial correspondiente a los puntos de la superficie. Éste sería el caso del potencial creado por un conductor esférico (hueco o no) en equilibrio (fig. 2.13).

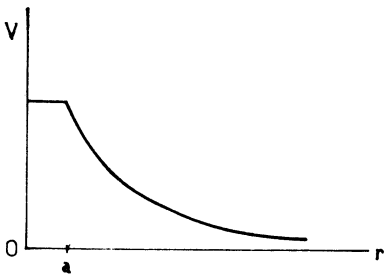


FIG. 2.13 Potencial creado por un conductor esférico.

Para el caso de la distribución espacial de carga con simetría esférica podemos repetir lo dicho en § 3.10, tomo I.

2.12 Generador electrostático Van de Graaff. Con todo lo visto hasta ahora estamos en condiciones de comprender el funcionamiento del llamado generador Van de Graaff en el que se pueden alcanzar potenciales de más de un millón de volt respecto a la Tierra. En esencia, consta de un gran conductor esférico hueco C en el que penetra una cinta sin fin por una ranura y sale por otra. La cinta es de un material aislante y pasa frente a un peine A que se halla a un potencial positivo del orden de 10 000 a 50 000 V creado por un generador auxiliar G. El poder de las puntas (§ 2.7) origina en A efluvios que llevan cargas positivas que se fijan sobre la cinta sin fin la cual, en su movimiento, las transporta hacia C. Al penetrar en este conductor atraen electrones del peine B que se concentrarán con gran densidad en las puntas y el poder de las puntas dará un efecto total consistente en pasar una carga negativa del peine B a la correa, neutralizando la carga positiva de ésta. Al perder carga negativa B, quedará cargado positivamente atrayendo electrones del peine D a las puntas de éste y por poder de las puntas pasarán cargas negativas de D a la cinta, las cuales serán transportadas hacia F, donde son captadas y escapan a tierra a través de aisladores defectuosos. Nótese que sale del interior de C tanta carga negativa como carga positiva penetra en él. Como el peine D está unido al electrodo C, éste va perdiendo electrones y adquiriendo cada vez más carga. Mientras ésta aumenta, también lo hace el potencial, ya que es proporcional a ella (ec. 2.21 *bis*). Llega un momento en que toda la carga que llega en unidad de tiempo a C por la cinta se compensa a causa de los electrones

que llegan a través de los aisladores imperfectos que sostienen el dispositivo. Vulgarmente se dice que las *fugas* igualan a la carga que llega. Pero esto ocurre cuando la ddp entre C y tierra es de más de un millón de volt, para un generador de unos 2 m de altura.

2.13 Energía de una partícula cargada en un campo eléctrico. La ecuación 2.20 puede interpretarse diciendo que al llevar una carga Q del punto A al punto B, la cantidad QV aumenta en el trabajo W que hemos de realizar para ello. Según lo dicho en § 7.6 del tomo I, dicha cantidad será una *energía potencial.*

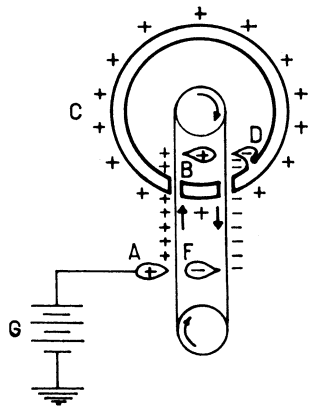


FIG. 2.14 Generador Van de Graaff.

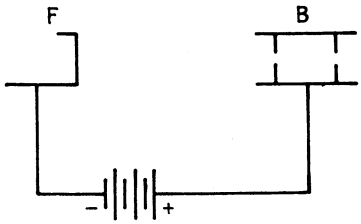


FIG. 2.15 Esquema del cañón de electrones.

Si la carga Q la posee una partícula de masa m, el teorema de las fuerzas vivas (ec. 7.10, tomo I, pág. 94) nos dice que el trabajo total de las fuerzas que se ejercen sobre ella es igual al incremento de su energía cinética. Ahora bien, el trabajo que sobre ella ejercen *las fuerzas del campo* al llevarla de A a B será $-W$, pues dichas fuerzas son opuestas en todo momento a las que aplicábamos contra ellas para llevar la carga de A a B. Luego el teorema de las fuerzas vivas nos dice que

$$-W = Q(V_A - V_B) = \tfrac{1}{2} m v_B^2 - \tfrac{1}{2} m v_A^2 \qquad (2.22)$$

de donde resulta

$$Q V_A + \tfrac{1}{2} m v_A^2 = Q V_B + \tfrac{1}{2} m v_B^2 \qquad (2.23)$$

que nos dice que la suma de las energías cinética y potencial de la partícula se mantiene constante. No es de extrañar este resultado, pues el campo eléctrico es conservativo.

Ejemplo. Gran número de dispositivos electrónicos contienen un disparador o *cañón de electrones* consistente, en esencia, en un filamento incandescente F que emite electrones y un tubo metálico B a potencial más elevado que el filamento, cuya misión es dar una velocidad a los electrones emitidos por éste. Suponiendo que el electrón sea una partícula de masa $m = 9{,}11 \times \times 10^{-31}$ kg y de carga $e = -1{,}60 \times 10^{-19}$ C, calcular la celeridad que llevarán los electrones a la derecha de B (fig. 2.15) si se suponen emitidos por F con velocidad inicial nula y la ddp entre B y F es de 1000 V.

El filamento F hace ahora las veces del punto A de la ecuación 2.22, la cual quedaría (haciendo $v_F = 0$) en la forma

$$e\,(V_F - V_B) = \tfrac{1}{2}\, m\, v_B^2$$

de donde

$$v_B^2 = \frac{2\,e\,(V_F - V_B)}{m} = \frac{2\,(-1{,}60 \times 10^{-19})\,(-1000)}{9{,}11 \times 10^{-31}} \ \mathrm{m^2/s^2}$$

o sea

$$v_B = 1{,}9 \times 10^7 \ \mathrm{m/s}$$

y si a la derecha de B ya no se ejercen fuerzas sobre los electrones, seguirán en movimiento rectilíneo y uniforme con esta celeridad.

2.14 Experimento de Millikan; electrón-volt. La naturaleza atomística de la electricidad, es decir, la existencia de una carga eléctrica elemental indivisible había sido sospechada por numerosos científicos, que intentaron determinarla. No obstante, quien logró por primera vez una determinación de precisión satisfactoria y que demostraba sin lugar a dudas la naturaleza atomística de la electricidad fue el físico norteamericano ROBERT A. MILLIKAN (1868-1953). El experimento que realizó es el siguiente: Entre dos placas metálicas MM' (figura 2.16) se crea un campo eléctrico que puede considerarse uniforme en la región central por tener las placas una extensión muy grande frente a su separación. En dicha región, pues, el campo creado sería análogo al debido a dos distribuciones de cargas planas, paralelas e indefinidas, de densidades opuestas (véase § 2.5). Mediante un pulverizador P se insuflan gotitas de aceite, algunas de

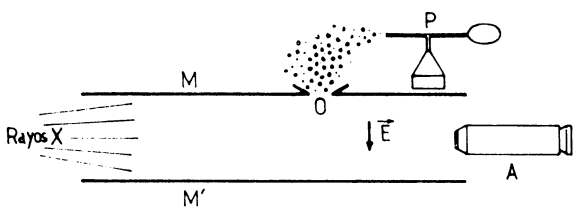


FIG. 2.16 Experimento de Millikan.

las cuales penetran por el orificio O. Muchas de ellas se han electrizado por frotamiento en el proceso de pulverización, otras lo hacen por efecto de la acción ionizante de los rayos X que se irradian entre las placas. El movimiento de dichas gotas se observa mediante el anteojo A en cuyo ocular existe un retículo que permite medir el espacio recorrido por las gotas. Concentremos nuestra atención en una de ellas. Suprimiendo el campo eléctrico, la gota caerá

bajo la acción de su peso y, a causa de la viscosidad del aire, alcanzará una celeridad de régimen (cfr. ec. 14.20, tomo I, pág. 267)

$$v_r = \frac{2}{9} \frac{(\rho - d) g a^2}{\eta} \tag{2.24}$$

donde ρ es la densidad del aceite, d la del aire, η el coeficiente de viscosidad de éste y a el radio de la gota.

Esta ecuación puede ponerse en la forma

$$v_r = k\, m\, g$$

donde m es la masa de la gota, si hacemos

$$k = \frac{2}{9} \frac{(\rho - d)\, a^2}{\eta\, m} \tag{2.25}$$

y vemos que *para una gota dada*, k es una constante que define la proporcionalidad existente entre la velocidad de régimen y la fuerza motriz aplicada a la gota.

Si aplicamos un campo eléctrico E y es q la carga de la gota, la fuerza motriz valdrá $m\, g + q\, E$ y la nueva velocidad de régimen tendría una celeridad

$$v = k\, (m\, g + q\, E)$$

expresando E en unidades convenientes.

Estas celeridades suelen ser inferiores a $\frac{1}{2}$ mm/s, por lo que pueden medirse con gran precisión.

Frecuentemente se observa que una gota que cae con una celeridad de régimen dada v_1, estando aplicado el campo, cambia bruscamente a otra celeridad de régimen v_2. Esto sólo puede ser debido a que haya cambiado la carga eléctrica de la gota, con lo que sería

$$v_1 = k\, (m\, g + q_1\, E) \qquad v_2 = k\, (m\, g + q_2\, E)$$

y restando estas ecuaciones tenemos

$$v_1 - v_2 = k\, (q_1\, E - q_2\, E) \quad \text{o sea} \quad q_1 - q_2 = \frac{1}{k\, E}\, (v_1 - v_2) \tag{2.26}$$

Démonos cuenta que la ecuación 2.24 nos permite determinar a a partir de cantidades conocidas. Que conocido el radio a de la gota podemos conocer su volumen, el cual, al multiplicarlo por la densidad ρ del aceite, nos daría la masa m de la gota y tendríamos así conocidos todos los elementos que intervienen en la definición de k (ec. 2.25). Conocido k, sólo nos resta por conocer E, pero como este campo es uniforme, su circulación será $E\, d$, siendo d la separación de las placas y esta circulación será igual a la ddp establecida entre las placas (con pilas p. e.) y que puede medirse con un voltímetro de precisión. Conocemos así E. Sustituyendo, pues, k y E en el segundo miembro de la ecuación 2.26, así como las velocidades observadas, podemos obtener el cambio de carga experimentado por la gota.

La lentitud con que se mueven las gotas hace que puedan observarse simultáneamente varias de ellas y los resultados obtenidos conducen a la conclusión

de que $q_1 - q_2$ es siempre el múltiplo entero de una cantidad $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C que será la unidad natural de carga y a la que se da el nombre de *carga eléctrica elemental.*

La principal fuente de error era el valor del coeficiente de viscosidad del aire y por ello los perfeccionamientos introducidos al experimento de Millikan consistían en una determinación más precisa de η. De esta manera, ha podido establecerse el valor

$$e = 1{,}60210 \times 10^{-19} \text{ C}$$

para la carga eléctrica elemental.

La observación de una misma gota podía prolongarse mucho, pues cuando se hallaba próxima a la placa M', bastaba aumentar momentáneamente el campo para que la gota subiera hasta las proximidades de M y repetir la medida.

El conocimiento de esta carga eléctrica elemental hace que se establezca una nueva unidad de energía llamada electrón-volt (eV) que será la energía potencial que gana un electrón al pasar de un punto a otro entre los que existe una ddp de 1 V. La ecuación 2.20 nos permite establecer la equivalencia

$$1 \text{ eV} = 1{,}60210 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Se utilizan también múltiplos de esta unidad tales como el *kiloelectrón-volt* (keV), *megaelectrón-volt* (MeV) y *gigaelectrón-volt* (GeV) dados por

$$1 \text{ keV} = 10^3 \text{ eV}$$

$$1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$$

$$1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$$

3

Dieléctricos y capacidad

Los fenómenos electrostáticos estudiados hasta ahora se ha considerado que tenían lugar en el vacío. Vamos a ver cómo quedan modificados cuando en vez del vacío existe un medio material no conductor al que llamaremos *dieléctrico*. La presencia de éste alterará las propiedades del espacio según sea su estructura molecular, claro está, sobre todo según que sus moléculas sean polares o no polares.

3.1. Polarización de un dieléctrico. Una molécula neutra tiene tanta carga positiva como negativa, pero puede ocurrir que el que pudiéramos llamar centro de gravedad de las cargas positivas no coincidiera con el de las negativas y la molécula sería un dipolo eléctrico (cfr. § 2.2). Se dice entonces que el dieléctrico está constituido por *moléculas polares*. En cambio, si coincidieran los centros de gravedad mencionados, la distribución de las cargas en la molécula presentaría una simetría total y no se observa ninguna manifestación eléctrica. Se dice que el dieléctrico está constituido por *moléculas no polares*.

En los dieléctricos de moléculas polares, la agitación térmica de éstas hace que los dipolos estén totalmente desordenados, con lo que la resultante de los momentos dipolares será nula. Al aplicar un campo eléctrico **E**, los dipolos se hallarán sometidos a pares de fuerzas que tenderán a orientarlos con sus momentos en la propia dirección y sentido de **E**. La orientación que se alcance nunca será completa porque la agitación térmica la destruye parcialmente y por ello es de esperar que, en un mismo dieléctrico, se logre mayor orientación a bajas temperaturas que a temperaturas elevadas.

Si las moléculas no son dipolos de por sí, el campo **E** ejercerá sobre las cargas de signos contrarios fuerzas opuestas y la molécula se polarizará por efecto de éstas, que desplazarán las cargas positivas

en el sentido de **E** y las negativas en el opuesto. En las moléculas se ha inducido un momento dipolar y la visión microscópica del interior del dieléctrico presentaría el aspecto indicado en la figura 3.1. Los momentos eléctricos de las moléculas contenidas en un cierto volumen constituyen un sistema de vectores paralelos que equivale a un

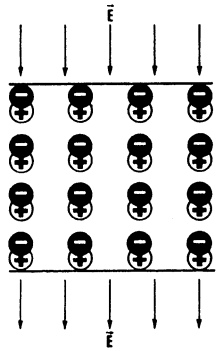


FIG. 3.1 Polarización inducida en un dieléctrico.

vector de igual dirección y sentido y cuyo módulo sea igual a la suma de los módulos. Para regiones reducidas del dieléctrico, el momento dipolar resultante será proporcional al volumen, es decir,

$$dp = P\,d\tau \tag{3.1}$$

por lo que en cada punto del dieléctrico podríamos definir un vector **P** de módulo P y que según la ecuación 3.1 representará el *momento eléctrico por unidad de volumen.* A dicho vector se le da el nombre de *polarización eléctrica.*

Supongamos que el dieléctrico constituya un bloque como el indicado en la figura 3.1. Al tener aplicado el campo eléctrico exterior **E** vemos que en las caras límites aparecen dos distribuciones superficiales de carga que crearían por sí solas un campo de sentido contrario al de **E**. Llamemos $\pm\sigma'$ a las densidades superficiales de cargas de dichas distribuciones. Prescindiendo de éstas, el resto del dieléctrico tiene una carga total nula y puede considerarse que la carga positiva de un dipolo queda compensada por la negativa del inmediato; solamente las superficiales no quedan compensadas. Éstas se conocen con el nombre de *cargas de polarización.*

El bloque de la figura 3.1 podemos considerarlo como paralelepípedo rectángulo de altura h y bases de área S. En cada columna de dipolos tendremos un cierto número de ellos (cuatro en la fig. 3.1)

que ocupan la longitud h. Si el momento dipolar de cada uno es $p = q\,d$, su resultante será

$$\Sigma\, p = \Sigma\, q\, d = q\, \Sigma\, d = q\, h$$

es decir, cada columna equivaldría a dos cargas $\pm q$ situadas en las caras del bloque. Ahora bien, sustituida cada columna por un tal dipolo, los momentos eléctricos correspondientes constituyen un sistema de vectores paralelos que dará como resultante un momento eléctrico $h\,\Sigma\, q$. Pero $\Sigma\, q$ será la carga total de una cara, es decir, $\sigma' S$. Por tanto, el momento eléctrico total será $h\,\sigma' S$ y como el volumen del bloque es $S\,h$, el momento eléctrico por unidad de volumen será

$$P = \frac{h\,\sigma' S}{h\,S} = \sigma' \tag{3.2}$$

Con referencia a este resultado debemos indicar que será válido siempre que el vector polarización sea normal a la superficie límite del dieléctrico. De no ser así, σ' sería igual a la componente de **P** normal a dicha superficie. No insistiremos acerca de esta cuestión, que se saldría del nivel de esta obra.

Las ecuaciones 3.1 y 3.2 ponen de manifiesto que las dimensiones de la polarización son $L^{-2}\,Q$ y por tanto se medirá con la unidad C/m^2.

El momento dipolar inducido en cada molécula puede razonarse que es proporcional al campo eléctrico existente.* Como en el bloque habrá tantos dipolos como moléculas, el número de dipolos no dependerá del campo, pero sí el momento eléctrico por unidad de volumen, que será

$$P = k\,E \tag{3.3}$$

El coeficiente de proporcionalidad k, que es positivo, es constante para las sustancias sólidas de moléculas *no* polares y recibe el nombre de *susceptibilidad eléctrica*. Para las sustancias de moléculas polares dependerá de la temperatura a causa del hecho apuntado de que la agitación térmica destruye parcialmente la orientación de los dipolos.

Las dimensiones de la susceptibilidad serán, según se desprende de la ecuación 3.3,

$$[k] = [P]/[E] = L^{-2}\,Q/(M\,L\,T^{-2}\,Q^{-1}) = M^{-1}\,L^{-3}\,T^2\,Q^2$$

es decir, las mismas que las de $[\varepsilon_0]$ (cfr. § 1.5).

* Véase, p. ej., BITTER, F., *Corrientes, campos y partículas*, pág. 110. Ed. Reverté. Barcelona, Buenos Aires, México, 1964.

3.2 Constante dieléctrica. Hemos visto en § 3.1 que por efecto de la polarización, el dieléctrico se comporta como dos distribuciones planas paralelas de cargas de densidades $\pm\sigma'$ que crean un campo de sentido opuesto al **E** aplicado exteriormente. Suponiendo unas dimensiones transversales del bloque que sean grandes frente a su espesor h, el campo creado por dichas distribuciones de cargas sería igual a

$$\frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{P}{\varepsilon_0} = \frac{k E_1}{\varepsilon_0} \tag{3.4}$$

en donde E_1 es el campo existente en los puntos del dieléctrico, es decir,

$$E_1 = E - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = E - \frac{k E_1}{\varepsilon_0}$$

de donde

$$E = \left(1 + \frac{k}{\varepsilon_0}\right) E_1 = K E_1 \tag{3.5}$$

en donde

$$K = 1 + \frac{k}{\varepsilon_0} \tag{3.6}$$

recibe el nombre de *constante dieléctrica* del medio material. Como k y ε_0 son positivas, $K > 1$, lo que nos indica que la presencia del dieléctrico hace que el campo E_1 existente sea menor que el E que existiría de no haber medio material.

El producto de la constante dieléctrica K por la permitividad del vacío ε_0 nos da otra constante característica del medio llamada *permitividad absoluta*

$$\varepsilon = \varepsilon_0 K = \varepsilon_0 + k \tag{3.6}$$

Como K es un número abstracto, según se desprende de la ecuación 3.5, ε tiene las mismas dimensiones que ε_0 y será mayor por ser $K > 1$.*

3.3 Inducción eléctrica. En todo punto de un campo eléctrico podemos definir un vector $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}_1$, al que llamaremos *inducción eléctrica*. Constituirá un campo newtoniano que si está creado por una sola carga Q tendrá por módulo

$$D = \varepsilon E_1 = \varepsilon \frac{E}{K} = \varepsilon_0 E = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \tag{3.7}$$

* Es corriente llamar a K *permitividad relativa* y simbolizarla por ε_r, tal como aconseja la Unión Internacional de Física Pura y Aplicada.

Es decir, la masa agente será $c = Q/4\pi$, y aplicando el teorema de Gauss (ec. 3.14, pág. 38, tomo I) tendríamos para el *flujo de inducción* a través de una superficie cerrada

$$\Phi = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \Sigma Q_i \tag{3.8}$$

es decir, que el flujo de inducción saliente a través de una superficie cerrada es igual a la carga total existente en su interior.

Sustituyendo en la definición de **D** la permitividad ε por su expresión dada por la ecuación 3.6, tendremos

$$\mathbf{D} = (\varepsilon_0 + k)\,\mathbf{E}_1 = \varepsilon_0\,\mathbf{E}_1 + \mathbf{P} \tag{3.9}$$

que nos indica que la inducción existente en un punto de un dieléctrico material es la suma de la que existiría en el vacío, $\varepsilon_0 \mathbf{E}_1$, si estuviera aplicado un campo igual al existente en el dieléctrico más otra debida a la presencia de la sustancia y que viene dada por la polarización **P**.

Es obvio, que las dimensiones de D, en el sistema giorgi, coinciden con las de P, es decir, son $L^{-2}\,Q$.

3.4 Fuerzas entre cargas situadas en un medio material. La ecuación 3.5 es completamente general y puede tomarse como definición de constante dieléctrica. Así pues, el campo que crea una carga puntual Q situada en un dieléctrico material será

$$E_1 = \frac{1}{K}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r^2}$$

que en virtud de la definición de permitividad absoluta (ec. 3.6) podemos escribir en la forma

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{Q}{r^2} \tag{3.10}$$

y si en un punto a distancia r de Q colocamos una carga puntual Q', la fuerza a que estará sometida es

$$F = Q'\,E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{Q\,Q'}{r^2} \tag{3.11}$$

es decir, que la fórmula de Coulomb para el caso de hallarse las cargas en un dieléctrico material se obtiene sin más que sustituir en la

ecuación 1.4 la permitividad del vacío ε_0 por la permitividad absoluta del medio. Ahora bien, todas las leyes de la Electrostática que hemos obtenido para el vacío se han deducido a partir de dicha fórmula de Coulomb o, lo que es igual, del hecho de que el campo eléctrico es newtoniano siendo las masas agentes $Q/4\pi\varepsilon_0$. En consecuencia, cuando los fenómenos tengan lugar en un dieléctrico material bastará sustituir en todas las fórmulas ε_0 por ε, ya que las masas agentes son ahora $Q/4\pi\varepsilon$ (cfr. ec. 3.10). En particular, el teorema de Gauss (ec. 2.13) se transformará en

$$\int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon} \tag{3.12}$$

si las cargas están en un medio material de permitividad ε y multiplicando por ésta los dos miembros de la ecuación 3.12 obtenemos la 3.8.

3.5 Teorema de los elementos correspondientes. Dados (fig. 3.2) dos conductores en presencia, tomemos en uno de ellos un elemento de superficie dS y consideremos las líneas de fuerza que parten de

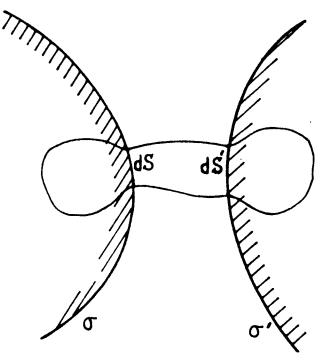


FIG. 3.2 Elementos correspondientes.

los puntos de su contorno, las cuales constituirán un *tubo de fuerzas* que podrá determinar sobre la superficie del otro conductor un elemento superficial dS'. Cuando esto ocurra, a dS y dS' se les llama *elementos correspondientes*. Sean σ y σ' las densidades superficiales de carga en dS y dS', respectivamente.

Cerremos el tubo de fuerzas mencionado mediante dos superficies cuyos puntos se hallen todos en el interior de los conductores y habremos constituido una superficie de Gauss en cuyo interior sólo

habrá las cargas $\sigma\, dS$ y $\sigma'\, dS'$. El teorema de Gauss nos dice que el flujo a través de dicha superficie ha de ser igual a

$$\frac{\sigma\, dS + \sigma'\, dS'}{\varepsilon}$$

Ahora bien, el flujo es nulo por serlo el campo en los puntos interiores de los conductores y ser tangente al tubo de fuerzas en todos los puntos, luego deberá ser $\sigma\, dS + \sigma'\, dS' = 0$ cualquiera que sea ε y, por tanto, *las cargas de dos elementos correspondientes son de igual valor absoluto pero de signos contrarios.*

3.6 Capacidad de un conductor aislado. Consideremos un conductor cargado y alejado de todo otro conductor o carga eléctrica. Su carga Q creará un campo en el espacio que hará que para llevar del infinito al conductor la unidad positiva de carga debamos efectuar un trabajo contra las fuerzas del campo. Este trabajo será numéricamente igual al potencial del conductor (cfr. § 2.9). Si la carga del conductor fuera n veces mayor, el campo creado en cada punto sería n veces más intenso y el trabajo para traer la unidad positiva de carga desde el infinito al conductor, o sea el potencial de éste, también sería n veces mayor. La carga del conductor y su potencial guardan una razón constante, característica del conductor, a la que se le da el nombre de capacidad del mismo.

$$C = \frac{Q}{V} \tag{3.13}$$

El término capacidad es muy significativo, pues un conductor de gran capacidad podrá tener una carga apreciable sin que suba demasiado su potencial. Igual que un recipiente de gran capacidad puede contener una cantidad apreciable de líquido sin que suba demasiado su nivel.

En el sistema giorgi, las dimensiones de la capacidad serán

$$[C] = \frac{Q}{[V]} = M^{-1} L^{-2} T^2 Q^2$$

En cambio, en el sistema de unidades electrostáticas resulta tener las dimensiones de una longitud. La unidad giorgi de capacidad recibe el nombre de *farad* (F) en recuerdo de FARADAY y será la capacidad de un conductor que al cargarlo con 1 C adquiere el potencial de 1 V. En cambio, la unidad electrostática de capacidad recibe el

nombre de *centímetro* por coincidir con la capacidad de una esfera de 1 cm de radio situada en el vacío. En efecto: si de la ecuación 2.21 obtenemos la razón Q/V, queda

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 a \tag{3.14}$$

y como en el sistema de unidades electrostáticas $4\pi\varepsilon_0 = 1$ y las distancias se miden en centímetros, queda $C = a$, es decir, la capacidad de la esfera es igual a su radio en centímetros. Para hallar la equivalencia del farad en centímetros, habrá que expresar a en metros en la ecuación 3.14 y hacer $C = 1$ F. Es decir,

$$a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}9875 \cdot 10^9 \text{ m}$$

lo que da la equivalencia

$$1 \text{ F} = 8{,}9875 \cdot 10^{11} \text{ cm} \tag{3.15}$$

Estos valores ponen de manifiesto que el farad resulta ser una unidad muy grande, por lo que se suelen emplear sus submúltiplos *microfarad* (μF), *nanofarad* (nF) y *picofarad* (pF) que son

$$1\ \mu\text{F} = 10^{-6}\ \text{F};\quad 1\ \text{nF} = 10^{-9}\ \text{F};\quad 1\ \text{pF} = 10^{-12}\ \text{F}$$

El picofarad se simboliza a veces por $\mu\mu$F y vemos que difiere muy poco del centímetro:

$$1 \text{ pF} = 0{,}89875 \text{ cm}$$

3.7 Condensadores. Cuando dos conductores están situados de manera que toda línea de fuerza que parta de uno llegue al otro, se dice que se ejercen influencia total. El teorema de los elementos co-

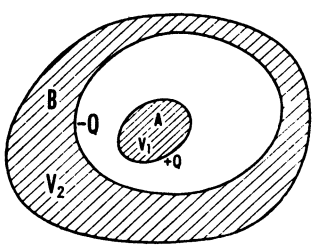


FIG. 3.3 Condensador.

rrespondientes nos dice entonces que las cargas de las dos superficies de los conductores son de igual valor absoluto pero de signos opuestos. El sistema recibe el nombre de *condensador* y los dos conductores el de *armaduras.*

Sean los conductores A y B (fig. 3.3). Cargamos la armadura A con la carga Q. La carga de la superficie interna de la armadura B es $-Q$ por haber influencia total. El potencial de A es V_1 y el de B es V_2; llamaremos *capacidad del condensador* a la razón de la carga Q de la armadura a la ddp entre ambas armaduras

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \tag{3.16}$$

esta razón es constante para un mismo condensador por la misma razón apuntada al principio de § 3.6 al razonarlo para la capacidad de un conductor. En realidad, suponer un único conductor en el espacio es equivalente a suponer un condensador una de cuyas armaduras esté a potencial cero, tomando el cero de potenciales en el infinito o, lo que es aproximadamente igual (cfr. § 2.10), en tierra. Por ello, el título de § 3.6 podría ser *capacidad a tierra de un conductor.*

Cuando entre las armaduras de un condensador exista un dieléctrico material de constante dieléctrica K, el campo y, por tanto, la ddp, entre sus armaduras es K veces menor que si entre ellas hubiera el vacío. Es decir, si es $V_1 - V_2$ la ddp en este último caso

$$C = \frac{Q}{\frac{V_1 - V_2}{K}} = K \frac{Q}{V_1 - V_2} = K C_0$$

luego la capacidad de un condensador entre cuyas armaduras tenemos un dieléctrico es igual a la capacidad considerando las armaduras en el vacío multiplicada por la constante dieléctrica del medio interpuesto entre las armaduras. Esto hace que la capacidad de un condensador sea proporcional a la constante dieléctrica mencionada. Por lo demás, la capacidad depende solamente de los parámetros que fijan la configuración geométrica del sistema. La demostración de esto nos llevaría a consideraciones que se salen del nivel elemental de este libro, por lo que no la daremos y sí la ilustraremos con el cálculo de la capacidad de condensadores de configuración geométrica determinada.

La máxima tensión por unidad de espesor que puede soportar el

dieléctrico sin que salte la chispa a su través recibe el nombre de *rigidez dieléctrica* y esto limita el espesor mínimo del dieléctrico.

Para obtener grandes capacidades se emplean los condensadores *electrolíticos*. Constan de una lámina metálica, generalmente de aluminio, recubierta electrolíticamente de una capa de óxido del mismo metal, la cual constituye el dieléctrico y sobre ella, en íntimo contacto, hay una pasta o solución conductora (p. ej. soluciones bóricas). La lámina metálica es una armadura y la solución conductora la otra. La capa de dieléctrico es muy fina, gracias a lo cual se logran capacidades muy grandes (de 1 a 1000 μF), si bien ello no permite la aplicación de tensiones demasiado elevadas. Otra particularidad de estos condensadores es que la lámina metálica nunca debe hacerse negativa respecto a la solución, pues en tal caso la acción electrolítica estropearía el condensador.

Existen también condensadores de capacidad *variable* consistente en dos sistemas de placas interpuestas, uno fijo y otro que puede moverse. Cada sistema constituye una armadura y la móvil puede ocurrir que gire variando la superficie encarada a la otra armadura o que, simplemente, varíe la separación entre ellas. El primer caso es el de los condensadores de sintonía de los receptores de radio, los cuales tienen el aire como dieléctrico, y el segundo es el de los condensadores de ajuste que tienen mica como dieléctrico y un tornillo con el que se puede variar la separación entre las armaduras.

3.8 Capacidad de los condensadores plano, esférico y cilíndrico. Dos conductores planos y paralelos constituyen un condensador plano. Para que pueda considerarse que existe influencia total, las dimensiones de las armaduras deben ser grandes frente a su separación.

Cargando una armadura con la carga Q, en la cara próxima de la otra se inducirá una carga $-Q$. El campo creado entre las armaduras puede considerarse creado por dos distribuciones planas, paralelas e indefinidas como las descritas en § 2.5. Las densidades de carga son

$$\sigma = \frac{Q}{S} \quad \text{y} \quad -\sigma = \frac{-Q}{S}$$

Siendo S la superficie de cada armadura encarada a la otra. El campo creado *vimos* era uniforme y su módulo venía dado por la ecuación 2.15 si entre las armaduras hubiera el vacío. Si hubiera un dieléctrico material, por lo visto en § 3.4 el campo sería

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \tag{3.17}$$

La ddp entre las armaduras A y B (fig. 3.4) será igual a la circulación entre los puntos M y N de una misma línea de fuerza y como en todo punto C de

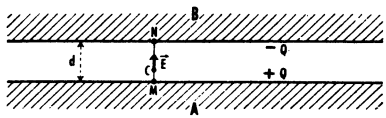


FIG. 3.4 Condensador plano.

ésta el campo tiene la misma dirección y su módulo es el dado por la ecuación 3.17, tendremos

$$V_M - V_N = E \cdot d = \frac{1}{\epsilon} \frac{Q}{S} d$$

y la capacidad será

$$C = \frac{Q}{V_M - V_N} = \frac{Q}{\frac{1}{\epsilon} \frac{Q}{S} d} = \frac{\epsilon S}{d} \tag{3.18}$$

donde vemos que, aparte la permitividad ϵ del dieléctrico, la capacidad sólo depende de los parámetros que determinan la configuración geométrica del condensador.

Un condensador esférico está constituido por un conductor esférico situado en el interior de otro conductor hueco cuya cara interna sea una superficie esférica concéntrica con el otro conductor. En la figura 3.5 dichos conductores

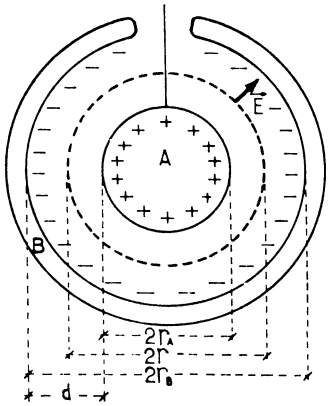


FIG. 3.5 Condensador esférico.

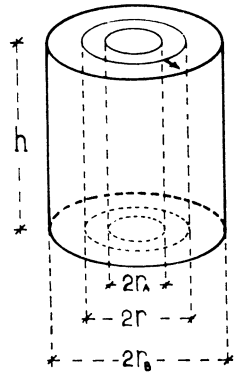


FIG. 3.6 Condensador cilíndrico.

son las armaduras A y B. Dando una carga $+Q$ a la armadura A, aparecerá en la cara interior de B una carga $-Q$ y el campo entre ambas armaduras será, por razón de simetría, radial y de módulo

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2}$$

según se deduce de la ecuación 3.12. Es decir, el mismo que si toda la carga Q estuviera concentrada en el centro de la esfera. El potencial de la armadura A será, pues,

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r_A}$$

y el de la armadura B será

$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r_B}$$

luego

$$V_A - V_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\,\frac{d}{r_A r_B}$$

y la capacidad

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{4\pi\epsilon r_A r_B}{d} \tag{3.19}$$

vemos que es proporcional a ϵ y depende de la geometría del sistema.

Un condensador cilíndrico está constituido por dos armaduras cilíndricas coaxiales. La simetría axial del sistema hace que en todo punto del dieléctrico el campo sea normal a las dos armaduras, al menos en los puntos no muy próximos a los bordes. Prescindiendo de la perturbación en estos puntos, podemos considerar que en la superficie de un cilindro de radio r intermedio entre los radios r_A y r_B de las armaduras y altura h, el campo es normal a la superficie lateral en todos sus puntos y de igual módulo. En las bases, el campo es tangente a ellas y tomando dicho cilindro como superficie de Gauss, tendremos flujo saliente nulo en las bases mientras que en la superficie lateral, cuya área es $2\pi r h$, el flujo será $2\pi r h E$. La ecuación 3.12 nos permitirá, pues, escribir

$$2\pi r h E = \frac{Q}{\epsilon} \qquad \text{o sea} \qquad E = \frac{Q}{2\pi\epsilon h}\,\frac{1}{r}$$

y la ddp entre armaduras será

$$V_A - V_B = \frac{Q}{2\pi\epsilon h}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon h}\,\ln\frac{r_B}{r_A}$$

y la capacidad será

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{2\pi\epsilon h}{\ln\dfrac{r_B}{r_A}} \tag{3.20}$$

Las tres ecuaciones 3.18, 3.19 y 3.20 constituyen sendas comprobaciones de la afirmación hecha de que la capacidad, aparte de la permitividad del dieléctrico, sólo depende de los parámetros que determinan la configuración geométrica del sistema. Por otra parte, ponen de manifiesto que la permitividad eléctrica tiene por dimensiones las de una capacidad dividida por una longitud. Por esto, su unidad giorgi de medida suele llamársele Farad/metro.

3.9 Energía de un condensador cargado. Para cargar un condensador, habrá que trasladar electrones de una armadura a otra que va adquiriendo un potencial cada vez más negativo, por lo que cada vez habrá que efectuar más trabajo para llevar un electrón de la armadura positiva a la negativa. El efecto es el mismo que tendríamos al trasladar cargas positivas a la armadura positiva, y esto será lo que consideraremos para efectuar los cálculos. El trabajo efectuado para trasladar las cargas se invierte en aumentar la energía potencial electrostática de éstas y deberá ser igual al incremento de

dicha energía. Así, si cuando la ddp entre las armaduras es $V_A - V_B$ llevamos de B a A una carga dq, ésta incrementa su energía en

$$dU = (V_A - V_B)\, dq = \frac{1}{C} q\, dq \tag{3.21}$$

siendo q la carga del condensador en tal instante. Cuando la carga del condensador pasa de 0 a Q, la energía total adquirida por las cargas será la suma de los incrementos de energía 3.21 cuando q pasa del valor 0 al valor Q, o sea,

$$U = \int_0^Q \frac{1}{C} q\, dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \tag{3.22}$$

y como

$$Q = C\, V \tag{3.23}$$

si es V el valor de la ddp entre las armaduras del condensador cuando tiene la carga Q en sus armaduras, la sustitución de 3.23 en 3.22 da

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C\, V^2 = \frac{1}{2} Q\, V \tag{3.24}$$

con lo que tenemos tres expresiones equivalentes de la energía almacenada en el condensador.

Puede objetarse que hemos considerado un proceso de carga muy particular, pero si admitimos la existencia de una energía potencial, el valor de ésta es independiente de cómo se haya establecido. Sólo depende de los estados inicial y final del sistema.

La energía almacenada en el condensador puede recuperarse si existe algún dispositivo que permita a los electrones de la armadura negativa pasar a la otra. En tal caso, la energía potencial electrostática se transforma en energía cinética de los electrones en primer lugar, y ésta puede transformarse a su vez en otra forma de energía cuyas características dependerán del dispositivo que permite el *paso* de los electrones.

La influencia total entre las armaduras hace que el campo creado por sus cargas aparezca solamente en el dieléctrico interpuesto entre ellas. Como el campo es una perturbación de las propiedades del espacio, consideraremos que la energía del condensador se halla almacenada en el dieléctrico. Esto está de acuerdo con la teoría enunciada por JAMES CLERK MAXWELL (1831-1879), según la cual *en todo punto del espacio en donde exista un campo eléctrico, existe una energía que se distribuye con una densidad igual a* $\frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}$. Por densidad queremos significar energía por unidad de volumen.

Esta afirmación puede comprobarse fácilmente en el caso del condensador plano. Como

$$U = \tfrac{1}{2} Q V \qquad \text{y} \qquad Q = \sigma S$$

en virtud de la ecuación 3.17 podemos escribir

$$Q = \sigma S = \varepsilon E S = D S$$

y como $V = E d$ por ser uniforme el campo, tendremos

$$U = \tfrac{1}{2} D E (S d)$$

La cantidad entre paréntesis es el volumen del dieléctrico, y dividiendo por ella tendremos la densidad de energía

$$u = \tfrac{1}{2} D E = \tfrac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \tag{3.25}$$

pues **D** y **E** son vectores de igual dirección y sentido si el dieléctrico es homogéneo e isótropo.

3.10 Asociación de condensadores. La asociación de varios condensadores puede hacerse en paralelo, en serie, o en forma mixta.

Para asociar condensadores en paralelo o derivación, se unen entre sí una de las armaduras de cada condensador, y por otro lado se unen entre sí las otras. Para representar esquemáticamente un condensador dibujaremos dos segmentos iguales y paralelos (fig. 3.7). Se establece entre A y B una ddp $V_A - V_B$ que será común a todos ellos. Llamaremos condensador equivalente a aquel que al aplicarle la misma ddp adquiera una carga igual a la total de los condensadores conectados. Para los distintos condensadores tenemos

$$Q_1 = C_1 (V_A - V_B), \quad Q_2 = C_2 (V_A - V_B), \quad \ldots, \quad Q_n = C_n (V_A - V_B)$$

y la carga total la obtendremos sumándolas, o sea,

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = (C_1 + C_2 + \ldots + C_n) (V_A - V_B)$$

con lo que la capacidad del condensador equivalente será

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n = \Sigma C_i \tag{3.25}$$

es decir, la suma de las capacidades de los condensadores componentes. La energía de cada condensador vale

$$U_i = \tfrac{1}{2} C_i (V_A - V_B)^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

y la total es

$$U = \Sigma U_i = \tfrac{1}{2} (V_A - V_B)^2 \Sigma C_i = \tfrac{1}{2} C (V_A - V_B)^2$$

Para asociar condensadores en serie se une una de las armaduras del primer condensador con una del segundo, la otra de éste con una del tercero y

así sucesivamente (fig. 3.8). Entre las armaduras extremas establecemos una ddp $V_A - V_B$. Debido a la influencia total, la carga de cada condensador es la misma. En efecto: Si la carga de una armadura del primero es Q, la de la otra será $-Q$; pero esta armadura junto con la del segundo condensador a la que

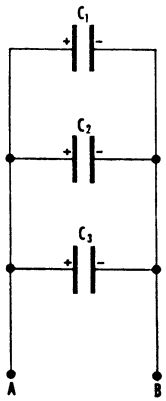


FIG. 3.7 Condensadores en paralelo.

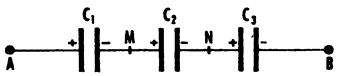


FIG. 3.8 Condensadores en serie.

está unida forma un conductor aislado que estaba descargado inicialmente. Luego, si en una parte de él aparece una carga $-Q$, en la otra (armadura del segundo condensador) aparecerá una carga $+Q$ que inducirá en la segunda armadura del segundo condensador una carga $-Q$ y así sucesivamente. En consecuencia, la ddp entre las armaduras de cada condensador vale

$$\left.\begin{aligned} V_A - V_M &= \frac{Q}{C_1} \\ V_M - V_N &= \frac{Q}{C_2} \\ V_N - V_B &= \frac{Q}{C_3} \end{aligned}\right\} \qquad (3.26)$$

y sumando

$$V_A - V_B = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3}$$

y en el caso de un número cualquiera de condensadores en serie sería

$$V_A - V_B = Q \Sigma \frac{1}{C_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

de donde

$$\frac{V_A - V_B}{Q} = \Sigma \frac{1}{C_i}$$

pero el recíproco del primer miembro sería igual a la capacidad C del conden-

sador equivalente, es decir, que al tener una carga Q presentara entre sus armaduras una ddp igual a $V_A - V_B$. Luego

$$\frac{1}{C} = \Sigma \frac{1}{C_i} \tag{3.27}$$

es decir, la capacidad equivalente será inferior a la menor de las de los componentes.

Las ecuaciones 3.26 nos indican que al asociar en serie varios condensadores, las ddp que soportan son inversamente proporcionales a sus capacidades respectivas. Si sus capacidades fueran iguales, la ddp total se repartiría por igual entre todos ellos y la ecuación 3.27 nos daría para la capacidad equivalente

$$\frac{1}{C} = \frac{n}{C_i} \qquad \text{o sea} \qquad C = \frac{C_i}{n}$$

La energía acumulada en cada uno de los condensadores en serie será

$$U_i = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_i}$$

y la total

$$U = \Sigma U_i = \frac{Q^2}{2} \Sigma \frac{1}{C_i} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

que es la misma que la del condensador equivalente.

Un método para obtener alta tensión a partir de un generador de baja es el *circuito Marx* en el que se cargan varios condensadores en paralelo y se descargan en serie. En la figura 3.9 *a* puede verse dicho circuito cuando los condensadores se cargan en paralelo con una ddp V aplicada por el generador de la izquierda. Al pasar simultáneamente los conmutadores K_1, K_2, K_3, K_4, K_5

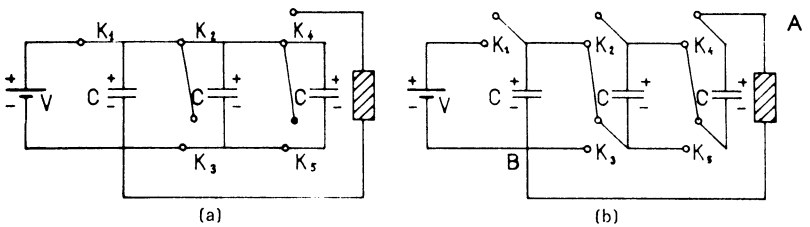


FIG. 3.9 Circuito Marx.

a la otra posición (fig. 3.9 *b*), se desconecta el generador y se conectan en serie los condensadores presentando entre los extremos A y B una ddp igual a la del generador multiplicada por el número de condensadores. Siendo éstos de igual capacidad, se descargarán por completo a través del circuito de utilización de la derecha conectado entre A y B. Se comprende que, en tal caso, la energía entregada en la descarga es igual a la que se tomó en el proceso de carga a una ddp n veces inferior. Démonos cuenta que si cada condensador puede soportar entre sus armaduras una ddp máxima de 1000 V y se cargan en paralelo con un generador de 500 V, al ponerlos en serie darán una tensión total de

$n \times 500$ (1500 V en fig. 3.9) superior a la tolerable por cada uno de ellos, los cuales, a pesar de todo, soportan sólo 500 V cada uno y no se *cruzan* (cruzarse un condensador es que salta la chispa a través de su dieléctrico, con lo que las partículas metálicas existentes en la chispa forman un túnel metálico que pone en comunicación las dos armaduras y ya no tenemos condensador).

El hecho de que en los condensadores electrolíticos la armadura metálica no pueda estar a potencial inferior a la otra (cfr. § 3.7) obliga a que sólo puedan conectarse a una polaridad determinada. Por ello, los condensadores electrolíticos llevan señalado el terminal correspondiente a la armadura positiva y en los esquemas de circuito se representan por el símbolo de la figura 3.10 *a*. Si unimos dos condensadores electrolíticos en la forma indicada en la figura 3.10 *b*, el conjunto podrá conectarse a una polaridad cualquiera sin deterio-

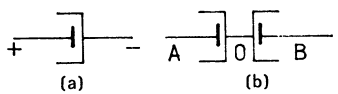


FIG. 3.10 *a*) Símbolo para un condensador electrolítico. *b*) Asociación serie-oposición de dos condensadores electrolíticos.

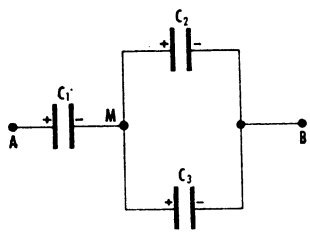


FIG. 3.11 Asociación mixta de condensadores.

rarse, pues si *A* se conecta a un potencial superior al de *B*, el condensador *OB* quedará polarizado al revés, pero como el otro impide el paso de cargas eléctricas a su través, no circularán cargas a través de *OB*, cuyas armaduras quedarán a igual potencial. En resumen, el conjunto de los dos condensadores equivale a uno sólo, pues el otro se comporta como un conductor único. En este caso, pues, *la capacidad del par de condensadores electrolíticos es igual a la de uno de ellos.*

La asociación mixta de condensadores consiste en la conexión paralela de varios, conectada en serie con otro u otros condensadores (fig. 3.11). Para determinar la capacidad equivalente del sistema pueden considerarse sustituidos los condensadores conectados en paralelo por otro de capacidad igual a la suma de las de todos ellos, el cual quedará en serie con los demás y el problema queda así reducido al de una asociación serie de condensadores.

4

Corriente continua

En los capítulos anteriores se han estudiado las cargas eléctricas y los fenómenos a que dan lugar cuando pueden considerarse en reposo. En el actual, vamos a estudiar el movimiento de las cargas y algunas manifestaciones del mismo que podemos comprender con las ideas de Física desarrolladas en esta obra hasta el momento. Más adelante se estudiarán otros fenómenos inherentes a las cargas en movimiento y que abren un nuevo capítulo de la Física al que se da el nombre de Electrodinámica o Electromagnetismo.

4.1 Corriente eléctrica. Consideremos dos conductores A y B aislados y cargados y supongamos que $V_A > V_B$. Tomemos un hilo conductor C y unámoslos. Se observará que la carga y el potencial de A

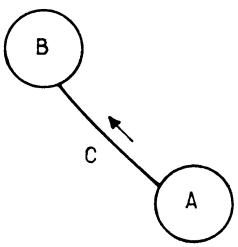


FIG. 4.1 Corriente eléctrica

van disminuyendo, mientras aumentan la carga y el potencial de B, hasta que finalmente todos los puntos de los tres conductores quedan a un mismo potencial. Como A, B y C constituyen un conductor único, éste habrá alcanzado finalmente un estado de equilibrio.

La disminución de carga de A puede comprobarse que es igual al aumento de carga de B, por lo que podemos admitir que ha habido

una circulación de cargas de A a B a través de C. A dicha circulación de cargas por C se le da el nombre de *corriente eléctrica.*

Si queremos detallar más el mecanismo de dicha corriente, recordemos lo dicho en § 1.2 acerca de la estructura de los metales. Éstos poseen un gran número de electrones libres que se mueven en todas direcciones y con todas las velocidades posibles, constituyendo el llamado *gas electrónico* (cfr. § 2.6). Como en el ejemplo citado A, B y C son conductores y A ha rebajado su potencial aumentándolo B, los electrones libres habrán acudido a A abandonando B, con lo que se logra el efecto citado, ya que los electrones tienen carga negativa. La ddp existente entre A y B supone la existencia de un campo $\mathbf{E}$ en C. Dicho campo hace que los electrones libres de C tengan superpuesto al movimiento totalmente desordenado del gas electrónico un movimiento de igual dirección que $\mathbf{E}$ pero de sentido contrario. Si pudiéramos observar un elemento infinitamente corto de C, el aspecto que veríamos sería el de la figura 4.2.

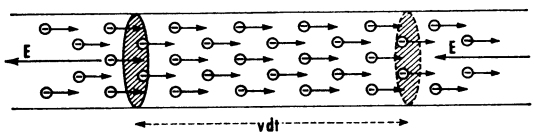


FIG. 4.2 Mecanismo íntimo de la corriente en un conductor metálico.

Si es dQ la carga que atraviesa en un tiempo dt una sección del conductor, en un tiempo doble, triple, etc., pasará una carga doble, triple, etc. Es decir, la carga que atraviesa una sección del conductor es proporcional al tiempo, y escribiremos

$$dQ = I\,dt$$

o sea

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{4.1}$$

Esta magnitud I recibe el nombre de *intensidad de la corriente* y representa la carga que atraviesa en unidad de tiempo una sección recta del conductor. Su unidad de medida en el sistema giorgi es el *ampere* (A), que será la intensidad de una corriente que deje circular en cada segundo una carga de 1 C. Sus dimensiones son

$$[I] = T^{-1}\,Q$$

Dado el gran número de electrones libres que suponemos existe en cualquier volumen aunque sea pequeño, será lícito considerar que

todos ellos llevan la velocidad media. Sea v la celeridad media de los electrones libres, n el número de ellos por unidad de volumen y S el área de la sección recta del hilo conductor. Consideremos el tramo de conductor de longitud $v\,dt$ (fig. 4.2) cuyo volumen será igual a $S\,v\,dt$ y en cuyo interior habrá $n\,S\,v\,dt$ electrones libres. Todos los electrones contenidos en dicho tramo atravesarán uno de sus extremos durante un tiempo dt, pues éste es el tiempo que tardarían en llegar los más alejados de dichos electrones. Llamando e a la carga de un electrón, la carga dQ que habrá atravesado la sección del conductor en un tiempo dt será $dQ = e\,n\,S\,v\,dt$ y sustituyendo en la ecuación 4.1 tenemos

$$I = e\,n\,S\,v \tag{4.2}$$

habiendo tomado todas las cantidades en valor absoluto.

4.2 Densidad de corriente. El fenómeno estudiado en § 4.1 es el de la corriente eléctrica en un conductor filiforme. Es decir, una corriente unidimensional. Pero los portadores de carga eléctrica pueden también moverse por un volumen tridimensional, y para describir este fenómeno será necesario introducir el concepto de densidad de corriente.

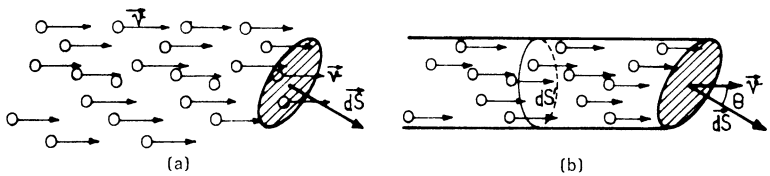


FIG. 4.3 *a*) Faceta dS en el seno de un conductor tridimensional recorrido por una corriente. *b*) La carga que atraviesa dS es la misma que atraviesa dS'. El flujo $\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}$ es igual a $v\cdot dS'$.

Supongamos primeramente que sólo existe un tipo de portadores de carga eléctrica y que todos llevan la misma velocidad $\mathbf{v}$. Consideremos una faceta de área dS atravesada por los portadores. A ella asociaremos un vector $d\mathbf{S}$ normal a ella y de sentido el que tomemos arbitrariamente como positivo para la normal a la faceta (fig. 4.3 *a*). Construyamos un cilindro de generatrices paralelas a $\mathbf{v}$ que pasen por los puntos del contorno de la faceta. La corriente en este cilindro será análoga a la que circule por un conductor filiforme de sección recta $dS' = dS\cos\theta$ (fig. 4.3 *b*) y que ha sido estudiada en § 4.1. Lla-

mando q a la carga de cada portador, la intensidad de la corriente que circula por este cilindro será

$$dI = q\,n\,v\,dS' = n\,q\,\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S} \tag{4.3}$$

pues $v\,dS'$ no es más que el flujo del vector $\mathbf{v}$ a través del elemento de superficie dS (cfr. § 3.5, pág. 33, tomo I).

Si ahora imaginamos que a la corriente a través de la faceta contribuyen varios tipos de portadores con cargas y velocidades diferentes, los agruparemos de manera que en cada grupo todos los portadores tengan igual carga y velocidad y representando por n_i el número de portadores por unidad de volumen cuya carga es q_i y cuya velocidad es $\mathbf{v}_i$ tendremos

$$dI = \Sigma\, n_i\, q_i\, \mathbf{v}_i\cdot d\mathbf{S} = \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} \tag{4.4}$$

donde

$$\mathbf{J} = \Sigma\, n_i\, q_i\, \mathbf{v}_i \tag{4.5}$$

es el vector *densidad de corriente* en el punto donde se halla la faceta dS. Resulta, pues, que la intensidad de la corriente a través de una faceta es igual al flujo a través de ella del vector densidad de corriente $\mathbf{J}$ y representa la carga eléctrica total que atraviesa la faceta por unidad de tiempo en el sentido de $\mathbf{J}$.

En realidad, los grupos de portadores que hemos formado podrían estar constituidos por portadores de cargas iguales, independientemente de que sean iguales o no sus velocidades, si tomamos para todos ellos su *velocidad media*. En efecto, si en la ecuación 4.4 consideramos los términos correspondientes a un tipo de portadores, por ejemplo electrones, su contribución a dI sería $-e\,\Sigma\, n_i\, \mathbf{v}_i$, estando el sumatorio extendido a todos los términos correspondientes a $q_i = -e$. Ahora bien, si es N el número total de electrones por unidad de volumen, la velocidad media de los electrones será

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Sigma\, n_i\, \mathbf{v}_i}{N} \tag{4.6}$$

cuyo módulo o celeridad media podrá ser mucho menor que las celeridades individuales, dado que la suma es vectorial.

De la ecuación 4.6 resulta $N\,\bar{\mathbf{v}} = \Sigma\, n_i\, \mathbf{v}_i$ y la contribución de los electrones a la densidad de corriente $\mathbf{J}$ sería igual a $-e\,N\,\bar{\mathbf{v}}$. Análogamente podríamos razonar para los otros portadores existentes y los términos del sumatorio de la ecuación 4.4 pueden interpretarse considerando que n_i es el número de portadores por unidad de volumen

cuya carga es q_i y $\mathbf{v}_i$ es la velocidad media de los mismos. El producto $n_i\, q_i$ será la carga por unidad de volumen, o densidad de carga, de dichos portadores. Representándola por ρ_i queda

$$\mathbf{J} = \Sigma\, \rho_i\, \mathbf{v}_i \tag{4.7}$$

4.3 Ley de Ohm. Consideremos un conductor de forma cualquiera que se halle inicialmente en equilibrio. Dicho conductor puede ser sólido, líquido o gaseoso, en principio. Los portadores libres tendrán velocidades medias nulas, pues no hay direcciones privilegiadas, pero sus *celeridades medias* tendrán ciertos valores $v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots$ Consideremos un tipo genérico de portadores, cuya celeridad media sea v_i. Estos portadores tendrán un cierto recorrido libre medio L_i (cfr. § 18.8, tomo I) y el intervalo medio de tiempo entre choques consecutivos será

$$\Delta t_i = \frac{L_i}{v_i} \tag{4.8}$$

Si aplicamos un campo eléctrico $\mathbf{E}$ en los distintos puntos del conductor, éste dejará de estar en equilibrio y los portadores considerados se hallarán sometidos a una fuerza $q_i\, \mathbf{E}$ cada uno de ellos, por lo que entre choque y choque su cantidad de movimiento se incrementará en

$$m_i\, \Delta \mathbf{v}_i = q_i\, \mathbf{E}\, \Delta t_i$$

(cfr. § 7.8, tomo I), o sea que su velocidad se incrementa entre choques consecutivos en

$$\Delta \mathbf{v}_i = \frac{q_i\, \Delta t_i}{m_i}\, \mathbf{E} = \frac{q_i\, L_i}{m_i\, v_i}\, \mathbf{E} \tag{4.9}$$

donde se ha tenido en cuenta la ecuación 4.8. Como L_i suele ser muy pequeño, el módulo de $\Delta \mathbf{v}_i$ será mucho menor que v_i, por lo que v_i será prácticamente invariable al aplicar el campo $\mathbf{E}$ y podremos considerar que al movimiento totalmente desordenado de los portadores se ha superpuesto otro que, según la ecuación 4.9, tiene la dirección de $\mathbf{E}$ y cuya velocidad media sería $\frac{1}{2}\, \Delta \mathbf{v}_i$, ya que tras cada choque la velocidad pasa, por término medio, desde 0 hasta $\Delta \mathbf{v}_i$. Por tanto, este movimiento ordenado superpuesto dará lugar a una corriente cuya densidad será, según se desprende de la ecuación 4.5,

$$\mathbf{J} = \Sigma\, n_i\, q_i\, \frac{\Delta \mathbf{v}_i}{2}$$

que sustituyendo $\Delta \mathbf{v}_i$ por su valor dado por la ecuación 4.9 será

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2}\left(\Sigma\, n_i \frac{q_i^2 L_i}{m_i v_i}\right)\mathbf{E} \tag{4.10}$$

en donde la expresión

$$\sigma = \frac{1}{2}\Sigma\, n_i \frac{q_i^2 L_i}{m_i v_i} \tag{4.10 \textit{bis}}$$

sólo depende de las características materiales del medio y de su temperatura (pues de ella dependen v_i y L_i) y recibe el nombre de *conductividad* del medio material. La ecuación 4.10 la podremos escribir en la forma

$$\mathbf{J} = \sigma\, \mathbf{E} \tag{4.11}$$

que constituye la expresión más general de la *ley de Ohm* y en ella se expresa que en cada punto de un conductor, el vector densidad de corriente es igual al producto del escalar conductividad por el campo eléctrico **E** existente en dicho punto. Esto considerando el medio isótropo, pues si no lo fuera σ sería un tensor y los vectores **J** y **E** no tendrían, en general, igual dirección. Ahora bien, los metales tienen estructura cristalina, pero como un conductor metálico es una aglomeración de pequeños cristales orientados de todas las maneras posibles, podemos considerarlo como isótropo, pues en todas direcciones obtendríamos las mismas propiedades.

Volvamos al conductor metálico filiforme (fig. 4.2) en el cual los únicos portadores son los electrones y la densidad de corriente será $\mathbf{J} = -e\,N\,\mathbf{v}$, según razonamos en el último párrafo de § 4.2, de donde se deduce que **J** tiene sentido opuesto al del movimiento de los electrones. Esto suele expresarse diciendo que *los electrones se mueven en sentido opuesto al de la corriente.*

Para determinar la intensidad I de la corriente que circula por el conductor, habrá que sumar los flujos (ec. 4.4) a través de las facetas que integran una sección del conductor. Éstas pueden tomarse normales a **J** en todos los puntos y tendremos $\mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = J\, dS$, con lo cual, considerando uniforme el campo **E** en el conductor tendremos

$$I = \int_S J\, dS = \int_S \sigma E\, dS = \sigma E S \tag{4.12}$$

y como la circulación de **E** entre dos puntos M y N separados una distancia l es (cfr. § 3.3, tomo I)

$$V_M - V_N = \int_M^N \mathbf{E} \cdot \mathrm{dl} = E\, l$$

resulta

$$E = \frac{V_M - V_N}{l}$$

que sustituida en la ecuación (4.12) da

$$I = \sigma \frac{S}{l} (V_M - V_N) \tag{4.13}$$

Como σ depende de las características materiales del conductor y S y l son sus dimensiones geométricas en el tramo comprendido entre los puntos M y N, la cantidad

$$G = \sigma \frac{S}{l} \tag{4.14}$$

llamada *conductancia* del tramo considerado, será independiente de la ddp entre sus extremos y de la intensidad de la corriente que circule, relacionando ambas mediante la expresión

$$I = G\,(V_M - V_N) \tag{4.15}$$

El recíproco de la conductancia G es la *resistencia* del tramo

$$R = \frac{1}{G} = \frac{1}{\sigma}\,\frac{l}{S} = \rho \frac{l}{S} \tag{4.16}.$$

donde el recíproco ρ de la conductividad se denomina *resistividad* del material. La ecuación 4.15 puede entonces escribirse en la forma

$$I = \frac{V_M - V_N}{R} \tag{4.17}$$

Las ecuaciones 4.16 y 4.17 constituyen dos maneras de expresar la ley de Ohm para un tramo de circuito en el que sólo haya un conductor.

4.4 Resistencia, conductancia, resistividad y conductividad; sus unidades. Teniendo en cuenta la ecuación 4.17 y las dimensiones del potencial vistas al final de § 2.9, tenemos que, en el sistema giorgi, las dimensiones de la resistencia son

$$[R] = M\, L^2\, T^{-1}\, Q^{-2}$$

y su unidad, el *ohm* (Ω), es la resistencia de un conductor que al circular por él una corriente de intensidad 1 A, aparece entre sus extremos una ddp de 1 V.

Las dimensiones de la conductancia son, claro está,

$$[G] = M^{-1} L^{-2} T Q^2$$

y su unidad giorgi, el *mho* ($\mho$), será la conductancia de un conductor de resistencia 1 Ω.

El ohm y el mho admiten múltiplos y submúltiplos, entre los que son de destacar el kilohm (kΩ) y el megaohm (MΩ), a los que corresponden el milimho (m$\mho$) y el micromho ($\mu\mho$) respectivamente. Evidentemente,

$$1\ \text{k}\Omega = 10^3\ \Omega \qquad 1\ \text{M}\Omega = 10^6\ \Omega$$
$$1\ \text{m}\mho = 10^{-3}\ \mho \qquad 1\ \mu\mho = 10^{-6}\ \mho$$

De la ecuación 4.16 resulta que las dimensiones de la resistividad son las de una resistencia multiplicada por una longitud

$$[\rho] = M L^3 T^{-1} Q^{-2}$$

y su unidad será el ohm·metro (Ω·m). Análogamente, de la ecuación 4.14 resulta que las dimensiones de la conductividad son las de una conductancia dividida por una longitud y su unidad giorgi es el mho/metro.

4.5 Variación de la resistividad con la temperatura; termómetro de resistencia. Ya hemos visto en § 4.3 que la conductividad depende de la temperatura. Lo mismo podemos decir, pues, de la resistividad. Suponiendo ésta función analítica de la temperatura, podrá desarrollarse en serie de potencias y los términos de grado superior al primero resultan ser, casi siempre, despreciables y podemos escribir

$$\rho = \rho_0 (1 + \gamma t) \tag{4.18}$$

donde γ es el llamado coeficiente de temperatura que, entre amplios límites de la temperatura, puede considerarse constante. ρ_0 es la resistividad para $t = 0°$.

Dado un conductor de longitud l y sección S cuya resistividad venga dada por la ecuación 4.18, si multiplicamos ésta por l/S y tenemos en cuenta la ecuación 4.16, resulta para la resistencia de dicho conductor

$$R = R_0 (1 + \gamma t) \tag{4.19}$$

de donde

$$R - R_0 = R_0 \gamma t \tag{4.20}$$

siendo R_0 la resistencia del conductor a $t = 0°$.

Si disponemos de algún procedimiento para medir con precisión la resistencia del conductor, podremos hacerlo a 0°, a 100° (p. ej.) y a otra temperatura t. Llamando R_{100} a la temperatura a 100°, la ecuación 4.20 nos da

$$R_{100} - R_0 = R_0 \gamma\, 100 \tag{4.21}$$

y dividiendo ordenadamente las ecuaciones 4.20 y 4.21 queda

$$\frac{R - R_0}{R_{100} - R_0} = \frac{t}{100} \qquad \text{o sea} \qquad t = 100\,\frac{R - R_0}{R_{100} - R_0}$$

que nos permitiría determinar la temperatura t midiendo la resistencia del conductor a dicha temperatura. Éste es el fundamento del llamado *termómetro de resistencia.*

TABLA 4.1. RESISTIVIDADES Y COEFICIENTES DE TEMPERATURA

Sustancias	*Resistividad en* $\Omega \cdot m$	*Coeficiente de temperatura* $(°C)^{-1}$
Aluminio	$2{,}83 \cdot 10^{-8}$	0,0039
Constantán	$49{,}0 \cdot 10^{-8}$	0,00001
Cobre	$1{,}72 \cdot 10^{-8}$	0,00393
Carbón	$3500 \cdot 10^{-8}$	—0,0005
Hierro	$10 \cdot 10^{-8}$	0,005
Plomo	$22 \cdot 10^{-8}$	0,0043
Manganina	$44 \cdot 10^{-8}$	0,00001
Mercurio	$95{,}8 \cdot 10^{-8}$	0,00089
Nicrom	$100 \cdot 10^{-8}$	0,0004
Níquel	$7{,}8 \cdot 10^{-8}$	0,006
Plata	$1{,}59 \cdot 10^{-8}$	0,0038
Platino	$10 \cdot 10^{-8}$	0,003
Estaño	$11{,}5 \cdot 10^{-8}$	0,0042
Wolframio	$5{,}6 \cdot 10^{-8}$	0,0045

4.6 Ley de Joule. La ley de Ohm dada por la ecuación 4.17 pone de manifiesto que al circular la corriente por un conductor del punto M al punto N, se produce una *caída de potencial.* Es decir, que las cargas tienen menor energía potencial en el punto N que en el M. Si es dQ la carga que circula en un tiempo dt, su energía en M es $dQ\,V_M$, y en el punto N hacia el que se dirige será $dQ\,V_N$, luego habrá disminuido su energía en $dQ\,(V_M - V_N)$. El principio de conservación de la energía exige que esta energía potencial eléctrica disipada aparezca en otra forma de energía y la experiencia nos indica que lo hace en forma de calor en el conductor cuando no exista ningún dispositivo especial que permita otra transformación de energía (en energía química, mecánica, etc.).

Teniendo en cuenta la ecuación 4.1, esta energía eléctrica disipada en el tiempo dt podemos escribirla en la forma

$$dW = (V_M - V_N)\,I\,dt \qquad (4.22)$$

y la potencia disipada será

$$P = \frac{dW}{dt} = (V_M - V_N)\, I \tag{4.23}$$

y teniendo en cuenta las ecuaciones 4.14 y 4.17 podemos escribir

$$P = G\,(V_M - V_N)^2 = R\, I^2 \tag{4.24}$$

donde el primer miembro vendrá dado en watt si las otras cantidades se expresan en unidades giorgi. Para tener el resultado en calorías/segundo, bastaría dividir el segundo miembro de las ecuaciones 4.23 o 4.24 por el equivalente mecánico de la caloría $J = 4{,}18$ J/cal (cfr. § 16.2, tomo I), lo que equivale a multiplicarlo por 0,24 cal/J.

Profundizando algo más en este fenómeno conocido por el nombre de *efecto Joule*, analizaremos un poco su mecanismo íntimo. Decir que una carga dQ pasa de un punto M a cierto potencial a otro N de potencial más bajo equivale a decir que pasa una carga $-dQ$ de N a M. En ambos casos la carga pierde la misma energía potencial. Ello entrañaría (cfr. ec. 2.22) que ganara una energía cinética de igual valor, lo cual haría que fuera aumentando constantemente la celeridad. Ahora bien, los razonamientos de § 4.3 nos indican que la velocidad media se mantiene constante a causa de los choques de los portadores móviles (electrones en los conductores metálicos) lo que nos lleva a concluir que al no haber ninguna otra pérdida de energía (mecánica, química, etc.) el trabajo del campo eléctrico se convierte íntegramente en calor.

De las ecuaciones 4.23 y 4.24 podemos enunciar la ley de Joule de la manera siguiente: *En un conductor que tiene una determinada resistencia, la cantidad de calor desprendido es directamente proporcional al cuadrado de la intensidad de la corriente que circula y directamente proporcional a la resistencia y al tiempo durante el cual circula la citada corriente.*

Por esta razón, la transmisión de energía eléctrica a larga distancia suele hacerse a *alta tensión* (ddp elevada). Para una potencia dada, la ecuación 4.23 indica que elevando la ddp se reduce proporcionalmente la intensidad, lo cual interesa dado que la pérdida de potencia en forma de calor es proporcional al *cuadrado* de la intensidad. Es decir, que con una tensión 10 veces mayor, la intensidad se reduce a la décima parte y las pérdidas son 100 veces menores.

Son bien conocidas las aplicaciones del efecto Joule a la calefacción eléctrica, horno eléctrico, iluminación, fusibles, amperímetros térmicos, etc.

Aplicación: Un termos de 10 litros de capacidad posee una resistencia de 19,53 Ω. Llenando dicho termos con agua a 12°C determinar el tiempo transcurrido para que la temperatura del agua sea de 42°C si se establece entre los extremos de la citada resistencia una diferencia de potencial de 125 V. ¿Cuál será el importe de la energía eléctrica consumida si se paga el kWh a 2,75 ptas? (Se suponen pérdidas de calor despreciables.)

$$Q = 0{,}24\, I^2 R\, t \qquad Q = 10\,000\,(42 - 12) = 300\,000 \text{ calorías}$$

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{125}{19{,}53}$$

$$300\,000 = 0{,}24\, \frac{125^2}{19{,}53^2}\, 19{,}53 \cdot t$$

$$t = \frac{300\,000}{0{,}24 \cdot \dfrac{125^2}{19{,}53}} = 1558{,}2 \text{ s} = 26^{\text{m}}\ 58{,}2^{\text{s}}$$

$$300\,000 \text{ calorías} = 4{,}18 \cdot 3 \cdot 10^5 \text{ J} = \frac{4{,}18 \cdot 3 \cdot 10^5}{3{,}6 \cdot 10^6} \text{ kWh} = 0{,}348 \text{ kWh}$$

Importe: $0{,}348 \cdot 2{,}75 = 1{,}305$ ptas.

4.7 Generador eléctrico. En el sistema representado en la figura 4.1 las cargas se mueven a lo largo del conductor *C* en el sentido de disminuir su energía potencial eléctrica. Esta tendencia a disminuir todo lo posible la energía potencial es la tendencia espontánea en todos los sistemas físicos. Ya en § 4.1 decíamos que la circulación de cargas proseguirá hasta que los tres conductores tengan todos sus puntos al mismo potencial. Como durante el proceso varía la ddp entre los extremos de *C* (por variar los potenciales de *A* y *B*), la intensidad de la corriente variará hasta anularse.

Si quisiéramos mantener invariable la intensidad de la corriente sería necesario llevar al conductor de origen las cargas que han pasado al otro, restituyéndoles la energía que perdieron en el paso del primero al segundo. De esta manera podríamos mantener constante la ddp entre *A* y *B* y por tanto la intensidad de la corriente según indica la ec. 4.17. El dispositivo que obliga a pasar a su través las cargas, comunicándoles la energía perdida, recibe el nombre de *generador* y se simboliza en la forma indicada en la figura 4.4. Evidentemente, el generador ha de estar constituido por conductores (sólidos o no) para que puedan atravesarlo las cargas y por tanto tendrá una *resistencia interna r* que, en virtud de la ecuación 4.24, será la razón constante de la potencia disipada en calor en el propio generador al cuadrado de la intensidad de la corriente que lo atraviesa. Esta potencia disipada más la comunicada a las cargas que lo

atraviesan, la ha de tomar el generador de algún agente exterior al circuito, ya que la energía no se puede crear y sí sólo transformar de una forma en otra. Así pues, *un generador eléctrico es un dispositivo que transforma en energía eléctrica energía de otro tipo.* Por

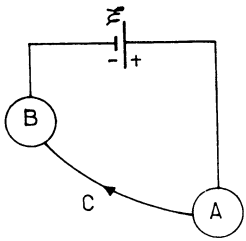


FIG. 4.4 Circuito. La corriente la origina el generador $\mathcal{E}$.

ejemplo, un acumulador transforma energía química, una dinamo transforma energía mecánica, un par termoeléctrico energía térmica, una célula fotoeléctrica energía lumínica, etc.

El hecho de que tenga resistencia interna significa que no toda la energía que consume la transforma en eléctrica, pues parte se transforma en calor. Ahora bien, si admitimos que si para hacer circular una corriente consume del exterior una potencia (no eléctrica) y para hacer circular una corriente de intensidad n veces mayor consume una potencia n veces mayor también, llamando $\mathcal{E}$ a la razón constante entre potencia consumida e intensidad de la corriente que circula, la potencia consumida será $\mathcal{E}\, I$, y el principio de conservación de la energía nos permite escribir

$$\mathcal{E}\, I = r\, I^2 + (V_A - V_B)\, I \tag{4.25}$$

donde $r\, I^2$ es la potencia disipada en forma de calor en el generador y el segundo término es la potencia disipada al pasar la corriente de A a B por el circuito exterior, según indica la ecuación 4.23. Los puntos A y B se considera que están conectados directamente al generador y que la corriente penetra en él por el punto de potencial más bajo B, al que llamaremos *terminal negativo* (señalado con el signo — en fig. 4.4), y sale por el punto de potencial más alto A, al que llamaremos *terminal positivo* (señalado con + en fig. 4.4). A los terminales se les llama, a veces, *polos.*

La constante $\mathcal{E}$, característica del generador, recibe el nombre de *fuerza electromotriz* (fem) del mismo y constituye con la resistencia interna las dos cantidades que caracterizan un generador.

Tras dividir por I los dos miembros de la ecuación 4.25 podremos despejar la ddp entre terminales, obteniendo

$$V_A - V_B = \mathcal{E} - r\,I \tag{4.26}$$

De esta ecuación debemos destacar que, así como la fem es una constante característica del generador, la ddp entre sus terminales depende de la intensidad de la corriente, la cual dependerá de las condiciones del circuito exterior. Como consecuencia, la ddp máxima entre los terminales se tendrá cuando el generador esté en *circuito abierto* ($I = 0$) y en tal caso será igual a la fem. Lo mismo ocurriría si $r = 0$. Por ello, cuando interese mantener lo más constante posible la ddp en una línea en la que puedan producirse variaciones de I convendrá emplear un generador de resistencia interna lo menor posible.

La ecuación 4.26 pone de manifiesto que la fem tiene las mismas dimensiones que el potencial, por lo que su unidad de medida será también el volt.

De todo lo anterior se desprende que la fem es numéricamente igual a la potencia que ha de consumir el generador para hacer circular una corriente de intensidad unidad o, lo que es igual, a la energía que toma del exterior para hacer circular a su través la unidad de carga.

4.8 Asociación de generadores. Cuando varios generadores se conectan ordenados uniendo el terminal positivo de cada uno con el negativo del siguiente (fig. 4.5 *a*) se dice que están asociados *en serie*. Por todos ellos circula la misma

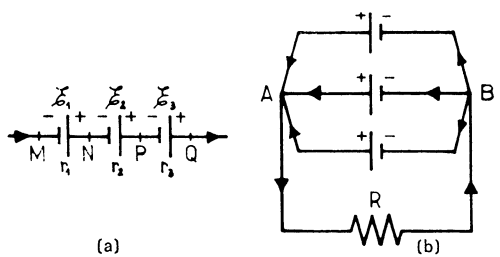


FIG. 4.5 *a*) Generadores en serie. *b*) Generadores en paralelo.

corriente de intensidad I, por lo que la aplicación de la ecuación 4.26 a cada uno de ellos da

$$V_N - V_M = \mathcal{E}_1 - r_1 I; \quad V_P - V_N = \mathcal{E}_2 - r_2 I; \quad V_Q - V_P = \mathcal{E}_3 - r_3 I$$

sumando estas ecuaciones tenemos

$$V_Q - V_M = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3) - (r_1 + r_2 + r_3)\,I$$

es decir, que *la asociación en serie de varios generadores equivale a un generador único cuya fem sea la suma de las fem de los generadores componentes y cuya resistencia interna sea la suma de sus resistencias internas.*

Supongamos ahora que disponemos de varios generadores exactamente iguales y que unimos sus terminales positivos a un punto A y sus negativos a otro B (fig. 4.5 b). A esta asociación se le llama *asociación paralelo.* Por ser iguales, las cargas que manden en unidad de tiempo al punto A serán iguales y de valor

$$I = \frac{\mathcal{E} - (V_A - V_B)}{r} \tag{4.27}$$

donde $\mathcal{E}$ es la fem de cada generador y r su resistencia interna. Al unir los puntos A y B con una resistencia exterior R (véase en fig. 4.5 b el símbolo representativo de la resistencia), por ella circulará toda la carga mandada al punto A por los generadores, que constituirá una corriente de intensidad $3\,I$. Es decir, llamando I' a dicha intensidad tenemos

$$I' = 3\,I = \frac{3\,\mathcal{E} - 3\,(V_A - V_B)}{r} = \frac{\mathcal{E} - (V_A - V_B)}{r/3}$$

y comparando esta expresión con la ecuación 4.27 vemos que *la asociación paralelo de* n *generadores iguales equivale a un generador único de fem igual a la de uno cualquiera de ellos y cuya resistencia interna es la* n*-sima parte.* Esta asociación, pues, convendrá cuando haga falta disponer de un generador de pequeña resistencia interna. Si los generadores no fueran iguales, podrían surgir inconvenientes si circulara la corriente por uno de ellos en sentido opuesto al correcto. El problema, en tal caso, podrá resolverse una vez estudiadas las leyes de Kirchhoff (§ 4.11).

4.9 Receptor; fuerza contraelectromotriz. Un dispositivo que transforma energía eléctrica en energía de otro tipo recibe el nombre de *receptor.* Serán receptores, por ej., la cuba electrolítica, que transforma energía eléctrica en energía química(§ 5.4); el motor eléctrico, que transforma energía eléctrica en mecánica; etc. Los receptores estarán construidos por conductores, pues a través de ellos debe circular la corriente cuya energía se transforma y por tanto tendrá una resistencia interna r' que será la causa de que en ellos se desprenda calor. De ello resulta que la energía consumida por el receptor se transforma parte en calor y el resto se transforma en otra forma de energía que no es ni eléctrica ni calorífica.

Por otra parte, la potencia útil transformada será proporcional a la intensidad de la corriente, y el coeficiente de proporcionalidad $\mathcal{E}'$ entre dicha potencia y la intensidad de la corriente recibe el nombre de *fuerza contraelectromotriz* (fcem). Como la potencia eléctrica consumida viene dada por la ecuación 4.23, podremos escribir

$$(V_M - V_N)\,I = r'\,I^2 + \mathcal{E}'\,I \tag{4.28}$$

y dividiendo por I los dos miembros resulta

$$V_M - V_N = \mathcal{E}' + r' I \tag{4.29}$$

Las definiciones que hemos dado de fem y fcem como razón de una potencia no eléctrica a una intensidad de corriente hacen que la fcem pueda considerarse como una fem negativa, pues, en realidad, es la razón de una potencia no eléctrica *consumida negativa* (pues el receptor la produce) a la intensidad de la corriente. Esto podríamos ponerlo de manifiesto escribiendo la ecuación 4.29 en la forma

$$V_N - V_M = -\mathcal{E}' - r' I \tag{4.30}$$

que es la que corresponde a la ecuación 4.26 si se tiene en cuenta que el minuendo del primer miembro es, en ambas, el potencial del punto hacia el cual se dirige la corriente a través del generador o receptor.

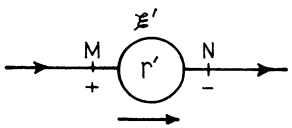


FIG. 4.6 Receptor.

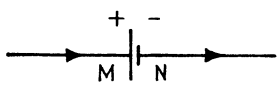


FIG. 4.7 Un generador conectado al revés hace las veces de receptor.

No debe sorprendernos que el receptor pueda considerarse como generador de fem negativa, pues si en un circuito por el que circula una corriente debida a ciertos generadores se intercala un generador de tal manera que la corriente le penetre por su polo positivo M (fig. 4.7), las cargas al atravesarlo pierden energía potencial eléctrica que se transformará en otro tipo de energía, que es lo que sucede en los receptores. Así, por ej., si el generador fuera un acumulador, la energía eléctrica se convertiría en química (acumulador en carga), y si fuera una dinamo, funcionaría como motor transformando la energía eléctrica en mecánica.

4.10 Circuito con varios generadores y resistencias en serie. Consideremos el circuito de la figura 4.8 en el que los trazos largos de los símbolos de los generadores representan sus polos positivos y supongamos que la corriente circula en el sentido *ABCDEFA*. Si su sentido real de circulación fuera el opuesto, bastaría considerar negativa la intensidad I de la corriente según se deduce inmediatamente

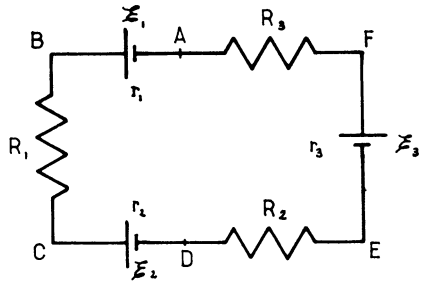


FIG. 4.8 Circuito simple completo.

de la ecuación 4.3. Aplicando las ecuaciones 4.17, 4.26 y 4.30, podemos escribir

$$\begin{aligned} V_B - V_A &= \mathcal{E}_1 - r_1 I \\ V_C - V_B &= -R_1 I \\ V_D - V_C &= -\mathcal{E}_2 - r_2 I \\ V_E - V_D &= -R_2 I \\ V_F - V_E &= \mathcal{E}_3 - r_3 I \\ V_A - V_F &= -R_3 I \end{aligned} \tag{4.31}$$

y sumando estas ecuaciones tenemos

$$0 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 - (r_1 + r_2 + r_3 + R_1 + R_2 + R_3) I$$

es decir: fijado un sentido de recorrido arbitrario, consideraremos positivas las fem que por sí solas dieran lugar a una corriente de tal sentido y negativas las otras. Asimismo consideraremos positiva la intensidad si la corriente tiene dicho sentido de recorrido y negativa si no. Llamando $\mathcal{E}$ a la suma *algebraica* de las fem y R a la suma de todas las resistencias, se cumple que

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \tag{4.32}$$

que es la *ley de Ohm para un circuito completo.*

Sumando las dos primeras de las ecuaciones 4.31 queda

$$V_C - V_A = \mathcal{E}_1 - (r_1 + R_1) I \tag{4.33}$$

y sumando las cuatro primeras tendremos

$$V_E - V_A = (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) - (r_1 + r_2 + R_1 + R_2) I \tag{4.33 bis}$$

de donde deducimos que la ddp entre dos puntos de un circuito es igual a la fem total (suma algebraica de fems), contenida en el tramo que definen, menos la *caída óhmica de tensión* o producto de la intensidad de la corriente por la resistencia total del tramo (suma de las resistencias contenidas en él). Las ecuaciones 4.33 y 4.33 bis constituyen una expresión de la ley de Ohm para un tramo de circuito.

4.11 Leyes de Kirchhoff. Cuando en vez de un circuito simple como el de la figura 4.8 tengamos un cierto número de conductores y generadores conectados entre sí de cualquier manera imaginable, ofreciendo diversos caminos a la corriente eléctrica, tendremos una *red*. Conocidas las fem de los generadores y las resistencias existentes en las distintas partes de la red, la aplicación reiterada de la ley de Ohm permitirá determinar la intensidad de la corriente que circula por una cualquiera de las ramas. No obstante, para sistematizar la labor disponemos de dos leyes debidas a GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF (1824-87), cuya aplicación permitirá obtener un sistema de ecuaciones determinado.

Antes de enunciar dichas leyes debemos definir qué entendemos por *nudo* y qué por *malla*. Por nudo entendemos el punto de concurso de tres o más conductores, y por malla cualquier circuito cerrado que podamos describir en una red sin pasar dos veces por el mismo nudo. En la figura 4.9 hemos representado una red cuyos nudos son *A, B, C, D,* y las mallas son *ABDA, DBCD, ADCA, ABCA, ABCDA, ADBCA, ABDCA.*

La primera ley de Kirchhoff se refiere a los nudos y es tan inmediata que posiblemente la hayamos aplicado en alguna ocasión. Es consecuencia del principio de conservación de la carga eléctrica en virtud del cual en ningún punto del circuito se crea ni destruye carga. Por tanto, toda la carga que llegue a un nudo debe salir de él en el mismo tiempo. Ello equivale a decir que la carga *total* que llega a un nudo en unidad de tiempo (carga que llega menos carga que sale) ha de ser nula. Considerando, pues, positivas las intensidades de las corrientes que llegan al nudo y negativas las de las que salen de él, la primera ley de Kirchhoff puede expresarse en la forma

$$\Sigma I_j = 0 \tag{4.34}$$

La segunda ley de Kirchhoff se refiere a las mallas y es consecuencia del principio de conservación de la energía. Su deducción la hemos realizado ya en § 4.10, pues el circuito de la figura 4.8 podría ser una malla de una red, en cuyo caso por cada tramo circularían

corrientes cuyas intensidades no tendrían por qué ser iguales. Si a los puntos B, C, E y F llegaran otros conductores, dichos puntos serían nudos y las intensidades en los tramos de la malla $BCEFB$ serían I_{BC}, I_{CE}, I_{EF} e I_{FB}, y como tales aparecerían en los segundos miembros de las ecuaciones 4.31, que al sumarlas daría cero la suma de las diferencias de potencial que aparecen en los primeros miembros (de aquí la conservación de la energía) y quedaría

$$0 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 - R_1 I_{BC} - (r_2 + R_2) I_{CE} - r_3 I_{EF} - (r_1 + R_3) I_{EF}$$

y de una manera general

$$\Sigma R_{ij} I_{ij} = \Sigma \mathcal{E}_{ij} \tag{4.35}$$

si representamos por $\mathcal{E}_{ij}$ la fem total existente en un tramo comprendido entre los nudos i y j, por R_{ij} la resistencia total de dicho tramo y por I_{ij} la intensidad de la corriente que por él circula. El signo de las fem en cada malla y de las intensidades I_{ij} de las corrientes que circulen por ella dependerán del sentido de recorrido escogido, tal como se indicó en § 4.10. El escoger un sentido u otro afectaría a los signos de todos los términos de la ecuación 4.35, lo que no altera el resultado.

La aplicación de las leyes de Kirchhoff a nudos y mallas elegidos al azar podría hacer que se obtuvieran ecuaciones que no fueran independientes, por lo que convendrá seguir un método que nos permita ir sobre seguro. Para ello comenzaremos por asignar a la corriente que circula por cada rama de la red un sentido arbitrario y una intensidad incógnita I_K ($K = 1, 2, \ldots$), en la inteligencia de que si al hallar el valor de ésta resulta negativo, bastará invertir el sentido supuesto de la corriente y el signo del valor hallado para I_K, y se tendrá la solución correcta.

Una vez hecho lo anterior, se aplicará la primera ley de Kirchhoff sucesivamente a distintos nudos procurando que en cada ocasión intervenga una corriente nueva por lo menos. De esta manera tenemos la certeza de que todas las ecuaciones son independientes, y cuando ya no puedan intervenir más nudos en tales condiciones, dejamos de aplicar dicha primera ley, pues toda nueva ecuación sería combinación lineal de las anteriores.

A continuación se aplica la segunda ley de Kirchhoff a todas las mallas posibles, procurando que en cada ocasión intervenga al menos un conductor que no haya intervenido en las anteriores mallas consideradas. Las ecuaciones así obtenidas, junto con las obtenidas de la aplicación de la primera ley constituyen un sistema de ecuaciones

todas independientes cuya solución nos permitirá obtener los valores de las cantidades incógnitas.

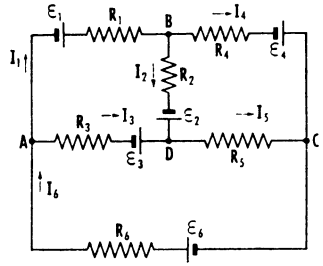


FIG. 4.9 Red eléctrica.

Ejemplo. Hallar las intensidades de la red indicada en el esquema de la figura 4.9 para los siguientes valores de fems y resistencias:

$$\mathcal{E}_1 = 2\ \text{V},\quad \mathcal{E}_2 = 4\ \text{V},\quad \mathcal{E}_3 = 6\ \text{V},\quad \mathcal{E}_4 = 4\ \text{V},\quad \mathcal{E}_6 = 4\ \text{V}$$
$$R_1 = 2\ \Omega,\quad R_2 = 4\ \Omega,\quad R_3 = 2\ \Omega,\quad R_4 = 2\ \Omega,\quad R_5 = 10\ \Omega,\quad R_6 = 4\ \Omega$$

Las resistencias internas de los generadores se consideran incluidas en las que están en serie con ellos.

Asignemos como sentidos arbitrarios de las corrientes que circulan por las ramas de la red los señalados en la figura 4.9 y apliquemos la primera ley de Kirchhoff al

$$\begin{aligned} &\text{nudo } A: && I_6 - I_1 - I_3 = 0 \\ &\text{nudo } B: && I_1 - I_2 - I_4 = 0 \\ &\text{nudo } C: && I_4 + I_5 - I_6 = 0 \end{aligned} \tag{4.36}$$

al nudo D no la aplicaremos porque todas las corrientes que concurren en él han aparecido ya y la ecuación que se obtendría sería combinación lineal de las anteriores.

Apliquemos ahora la segunda ley tomando como positivo el sentido de giro de las agujas del reloj en todas ellas (aunque pudiera tomarse el opuesto en una o varias). Tenemos así:

$$\begin{aligned} &\text{malla } ABDA: && 2I_1 + 4I_2 - 2I_3 = 2 + 4 - 6 = 0 \\ &\text{malla } BCDB: && 2I_4 - 10I_5 - 4I_2 = 4 - 4 = 0 \\ &\text{malla } ADCA: && 2I_3 + 10I_5 + 4I_6 = 6 + 4 = 10 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Cualquier otra malla que consideráramos no introduciría ninguna rama nueva y daría lugar a una ecuación combinación lineal de las 4.37. Éstas, junto con las 4.36, constituyen un sistema de seis ecuaciones independientes y como son seis las incógnitas, su resolución por los métodos clásicos del Álgebra da

$$I_1 = \frac{15}{16}\text{A},\quad I_2 = -\frac{5}{24}\text{A},\quad I_3 = \frac{25}{48}\text{A},$$
$$I_4 = \frac{55}{48}\text{A},\quad I_5 = \frac{5}{16}\text{A}\quad \text{e}\quad I_6 = \frac{35}{24}\text{A}$$

El hecho de que I_2 sea negativa nos indica que el sentido de la corriente es de D hacia B por la rama central de la figura 4.9, en vez del supuesto inicialmente y la intensidad I_2 será de 5/24 A.

4.12 Asociación de resistencias. Las resistencias pueden asociarse también en serie, en paralelo o en montaje mixto. Ya en § 4.10 hemos llamado resistencia total de un tramo constituido por resistencias en serie a la suma de dichas resistencias. Es lógico, pues por todas ellas circula la misma corriente, y si aplicamos la ley de Ohm a cada una de ellas se tiene (fig. 4.10 *a*)

$$V_M - V_N = R_1 I, \quad V_N - V_O = R_2 I, \quad V_O - V_P = R_3 I$$

y sumando estas ecuaciones miembro a miembro tenemos

$$V_M - V_P = (R_1 + R_2 + R_3) I$$

o sea que *varias resistencias asociadas en serie equivalen a una resistencia única igual a la suma de las resistencias componentes,* pues el mismo efecto se tendría si en vez de las resistencias en serie conectáramos entre M y P una resistencia

$$R = \Sigma R_j$$

En el caso de resistencias en paralelo (fig. 4.10 b) podemos aplicar las leyes de Kirchhoff. La primera da

$$I = \Sigma I_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.38}$$

y aplicando la segunda a las mallas formadas por la primera derivación y cada una de las otras tenemos

$$\begin{aligned} R_1 I_1 - R_2 I_2 &= 0 \\ R_1 I_1 - R_3 I_3 &= 0 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ R_1 I_1 - R_n I_n &= 0 \end{aligned}$$

o lo que es igual $$R_1 I_1 = R_2 I_2 = \ldots = R_n I_n \tag{4.39}$$

que nos indica que la *corriente que llega a un sistema de resistencias en paralelo se reparte entre ellas con intensidades inversamente proporcionales a las resistencias.* Ahora bien, todos los miembros de las ecuaciones 4.39 son iguales a la ddp $V_A - V_B$, luego

$$I_i = \frac{V_A - V_B}{R_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.40}$$

y sumando estas n ecuaciones

$$\Sigma I_i = (V_A - V_B)\,\Sigma \frac{1}{R_i}$$

que en virtud de la ecuación 4.38 puede escribirse en la forma

$$I = (V_A - V_B)\,\Sigma G_i \tag{4.41}$$

en donde se ha expresado la ecuación en función de las conductancias de los conductores derivados entre A y B. Comparando la ecuación 4.41 con la 4.15 resulta

$$G = \Sigma G_i \tag{4.42}$$

es decir, que *al tener un sistema de conductores derivados entre dos puntos, el conjunto equivale a un conductor único cuya conductancia sea igual a la suma de las conductancias de los conductores componentes.* La resistencia de este conductor equivalente estaría relacionada con las de los componentes, en virtud de la ecuación 4.42, por

$$\frac{1}{R} = \Sigma \frac{1}{R_i}$$

es decir, será menor que la más pequeña de las resistencias.

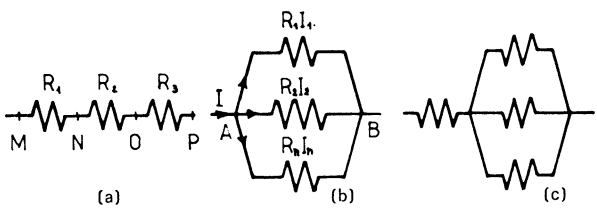


FIG. 4.10 *a*) Resistencias en serie. *b*) Resistencias en paralelo. *c*) Montaje mixto.

Si tuviéramos un montaje mixto (fig. 4.10 *c*), reduciríamos previamente los conductores derivados a uno que cumpliera lo que acabamos de ver y reduciríamos el problema de hallar un conductor único equivalente a todo el conjunto, al problema de resistencias en serie.

4.13 Teorema de la superposición. Consideremos ahora una red cualquiera, p. ej. la de la figura 4.9 ya estudiada y que reproducimos en la figura 4.11, en la que las resistencias internas de los generadores se consideran incluidas en las resistencias en serie con ellos y asignemos a las mallas *ABDA*, *BCDB* y *ADCA* las intensidades

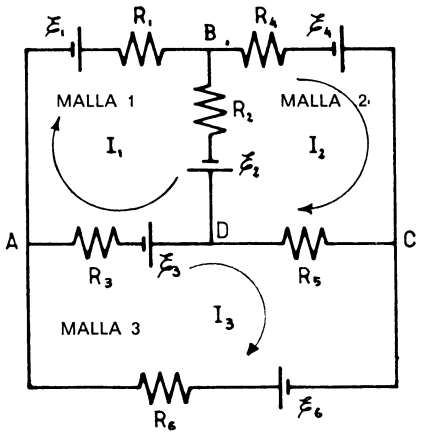


FIG. 4.11

I_1, I_2 e I_3, respectivamente. A dichas mallas las denominaremos 1, 2 y 3. Se sobreentiende que la corriente que recorra un tramo común a dos mallas tendrá como intensidad la suma *algebraica* de las intensidades de las dos mallas contiguas. Es decir, la segunda ley de Kirchhoff aplicada a la malla 1 daría

$$R_1 I_1 + R_2 (I_1 - I_2) + R_3 (I_1 - I_3) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 \qquad (4.43)$$

Llamaremos *resistencia propia* de la malla 1 a la cantidad

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_3 \qquad (4.44)$$

y resistencia compartida por las mallas 1 y 2 a

$$R_{12} = R_{21} = -R_2 \qquad (4.45)$$

y resistencia compartida por las mallas 1 y 3 a

$$R_{13} = R_{31} = -R_3 \qquad (4.46)$$

la ecuación 4.43 queda en la forma

$$R_{11} I_1 + R_{12} I_2 + R_{13} I_3 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 \tag{4.47}$$

y para las otras dos mallas tendríamos

$$R_{21} I_1 + R_{22} I_2 + R_{23} I_3 = \mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_2 \tag{4.48}$$

y

$$R_{31} I_1 + R_{32} I_2 + R_{33} I_3 = \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_6 \tag{4.49}$$

donde

$$\begin{aligned} R_{23} &= R_{32} = -R_5 \\ R_{22} &= R_2 + R_4 + R_5 \\ R_{33} &= R_3 + R_5 + R_6 \end{aligned} \tag{4.50}$$

son las resistencias compartida por las mallas 2 y 3 y las propias de éstas, respectivamente.

Las ecuaciones 4.47, 4.48 y 4.49 constituyen un sistema que podemos resolver aplicando la regla de Cramer y así tendríamos

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) & R_{12} & R_{13} \\ (\mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_2) & R_{22} & R_{23} \\ (\mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_6) & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} \tag{4.51}$$

donde

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$$

y expresiones análogas para I_2 e I_3 que desarrolladas dan

$$\begin{aligned} I_1 &= a_1' \mathcal{E}_1 + a_2' \mathcal{E}_2 + a_3' \mathcal{E}_3 + a_4' \mathcal{E}_4 + a_5' \mathcal{E}_5 + a_6' \mathcal{E}_6 \\ I_2 &= a_1'' \mathcal{E}_1 + a_2'' \mathcal{E}_2 + a_3'' \mathcal{E}_3 + a_4'' \mathcal{E}_4 + a_5'' \mathcal{E}_5 + a_6'' \mathcal{E}_6 \\ I_3 &= a_1''' \mathcal{E}_1 + a_2''' \mathcal{E}_2 + a_3''' \mathcal{E}_3 + a_4''' \mathcal{E}_4 + a_5''' \mathcal{E}_5 + a_6''' \mathcal{E}_6 \end{aligned}$$

donde las a', a'' y a''' son constantes en las que sólo figuran resistencias, luego las intensidades son funciones lineales y homogéneas de las fem. Las condiciones de linealidad

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad f(c\,x) = c\,f(x)$$

permiten pues enunciar: *La intensidad de la corriente total que circula por una parte cualquiera de la red es igual a la suma algebraica de las intensidades de las corrientes que circularían por dicha parte si actuara por sí sola cada una de la fem, estando cortocircuitados los demás generadores,* es decir, sustituidos por resistencias nulas, ya que sus resistencias internas se considera que forman parte de la red.

4.14 Puente de Wheatstone. Para medir con precisión una resistencia puede utilizarse el llamado puente de Wheatstone constituido por cuatro resistencias, un galvanómetro o *instrumento de cero* G y una batería o pila P montados como se indica en la figura 4.12 (*a*). Una de las resistencias, p. ej. R_4, es la

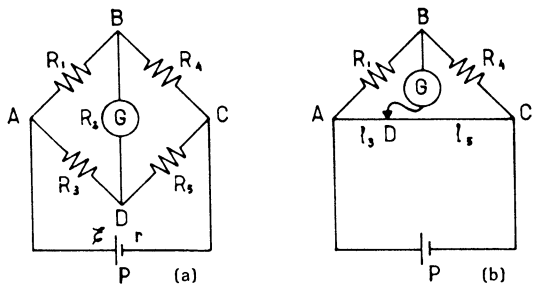


FIG. 4.12 *a*) Puente de Wheatstone. b) Puente de hilo.

desconocida y otra (u otras) puede variarse a voluntad. Así, si variando R_3 se logra que B y D estén al mismo potencial, por la rama BD no circulará corriente y el galvanómetro G señalará intensidad de corriente nula. Cuando esto ocurre se dice que el puente está *equilibrado*. Una versión común de puente es el de hilo (fig. 4.12 b) en el cual se sustituyen las resistencias R_3 y R_5 por un hilo homogéneo adosado a una regla graduada. El punto D es un contacto móvil que se desplaza a lo largo del hilo y llamando l_3 y l_5 a las longitudes AD y DC, respectivamente, que pueden leerse directamente en la regla, en virtud de la ecuación 4.16 será

$$\frac{R_3}{R_5} = \frac{l_3}{l_5} \tag{4.52}$$

Si observamos el puente de Wheatstone de la figura 4.12 nos daremos cuenta que no es más que la red ya estudiada de la figura 4.11 en la que $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_4 = 0$, $\mathcal{E}_6 = \mathcal{E}$ y $R_6 = r$, resistencia interna de P.

La ecuación 4.51 se reduce a

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & R_{12} & R_{13} \\ 0 & R_{22} & R_{23} \\ \mathcal{E} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}$$

y análogamente

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & 0 & R_{13} \\ R_{21} & 0 & R_{23} \\ R_{31} & \mathcal{E} & R_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Pero si por G no pasa corriente, $I_1 = I_2$ y los numeradores de estas dos últimas ecuaciones deberán ser iguales. Desarrollándolos por los elementos de una columna, dicha igualdad da

$$\mathcal{E} \begin{vmatrix} R_{12} & R_{13} \\ R_{22} & R_{23} \end{vmatrix} = \mathcal{E} \begin{vmatrix} R_{13} & R_{11} \\ R_{23} & R_{21} \end{vmatrix}$$

o sea

$$R_{12} R_{23} - R_{22} R_{13} = R_{13} R_{21} - R_{11} R_{23}$$

de donde, habida cuenta de las ecuaciones 4.45, 4.46 y 4.50,

$$R_{23} (R_{12} + R_{11}) = R_{13} (R_{21} + R_{22})$$

$$\frac{R_{12} + R_{11}}{R_{21} + R_{22}} = \frac{R_{13}}{R_{23}} \qquad \frac{R_1 + R_3}{R_4 + R_5} = \frac{-R_3}{-R_5}$$

y sumando antecedentes y consecuentes

$$\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_3}{R_5} \qquad \text{o sea} \qquad R_4 = \frac{R_5}{R_3} R_1 \tag{4.53}$$

y para el puente de hilo, en virtud de la ecuación 4.52,

$$R_4 = \frac{l_5}{l_3} R_1$$

4.15 Carga y descarga de un condensador. Consideremos el circuito representado en la figura 4.13, donde la resistencia interna del generador $\mathcal{E}$ se halla incluida en R y se supone descargado inicialmente el condensador C y abierto el interruptor Y. Al cerrar éste, el generador hará circular electrones libres de una armadura a la otra, a través del circuito, cargándose así el condensador. En un ins-

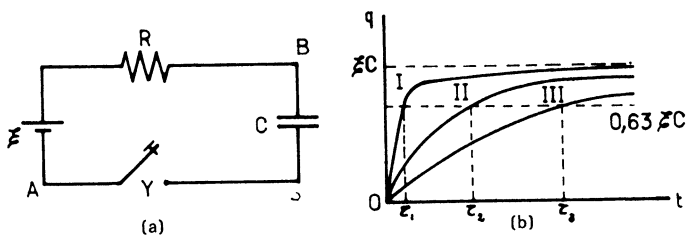


FIG. 4.13 *a*) Al cerrar el interruptor Y se inicia la carga del condensador. b) Gráfica de la carga del condensador en función del tiempo.

tante t del proceso de carga, la intensidad de la corriente será i y la carga del condensador q. Al cabo de un tiempo dt suficientemente corto para poder considerar que en él no ha variado la intensidad de la corriente, la carga del condensador será $q + dq$ y la carga que ha adquirido durante el tiempo dt será, en virtud de la ecuación 4.1

$$dq = i\,dt \tag{4.54}$$

Llamando v a la ddp entre las armaduras, ésta deberá ser igual a la ddp entre los puntos A y B, es decir,

$$\mathcal{E} - R\,i = v \tag{4.55}$$

en virtud de la ecuación 4.26. Y teniendo en cuenta las ecuaciones 4.54 y 3.13, podemos escribir la 4.55 en la forma

$$\mathcal{E} - R\frac{dq}{dt} = \frac{q}{C}$$

de donde resulta

$$-\frac{dt}{R\,C} = \frac{-dq}{\mathcal{E}\,C - q}$$

y como en el segundo miembro el numerador es la diferencial del denominador, integrando tenemos

$$-\frac{t}{R\,C} = \ln(\mathcal{E}\,C - q) + K \tag{4.56}$$

para determinar el valor de la constante de integración K que corresponde al problema físico, hacemos $t = 0$, con lo que debe ser $q = 0$ y la ecuación 4.56 da

$$0 = \ln \mathcal{E}\,C + K$$

y restándola de la ecuación 4.56 queda

$$-\frac{t}{R\,C} = \ln\left(1 - \frac{q}{\mathcal{E}\,C}\right)$$

y tomando antilogaritmos

$$e^{-t/RC} = 1 - \frac{q}{\mathcal{E}\,C}$$

de donde

$$q = \mathcal{E}\,C\,(1 - e^{-t/RC}) \tag{4.57}$$

De esta ecuación resulta que la carga aumenta siempre, tendiendo asintóticamente al valor $\mathcal{E}\,C$ que es el correspondiente al problema estático. No obstante, al cabo de un cierto tiempo, la carga del condensador habrá alcanzado un valor tan próximo a este valor límite, que será difícil percibir la diferencia entre ellos y el condensador podrá considerarse ya cargado definitivamente. La rapidez con que se llegue a esta situación viene medida por la *constante de tiempo* $\tau = R\,C$ para el cual la cantidad entre paréntesis de la ecuación 4.57 alcanza un valor aproximadamente igual a 0,63. Es decir, *la constante de tiempo mide el tiempo que tarda el condensador en alcanzar el 63 % de su carga total.* Si τ es pequeña (gráfica I de la figura 4.13 *b*) se llega rápidamente a una carga prácticamente igual a la total. Si τ es grande (gráfica III de la fig. 4.13 *b*) se tarda más.

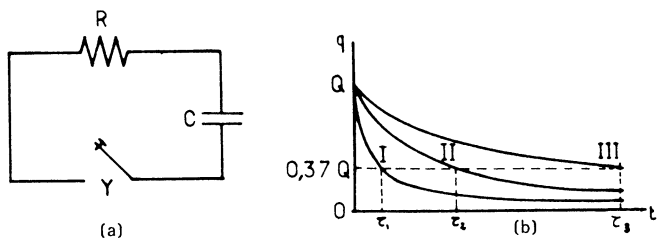


FIG. 4.14 *a*) Estando cargado el condensador *C*, al cerrar el interruptor *Y* se inicia la descarga a través de la resistencia *R*. *b*) Gráfica de la carga del condensador en el proceso de descarga.

Supongamos ahora que tenemos el condensador de la figura 4.14 *a* cargado con una carga Q y cerramos el interruptor Y. El condensador iniciará su descarga y entre los instantes t y $t + \mathrm{d}t$ su carga se habrá incrementado negativamente en la cantidad que circula por la resistencia. Es decir

$$-\mathrm{d}q = i\,\mathrm{d}t \quad \text{o sea} \quad i = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{4.58}$$

En el instante t, la ddp v entre las armaduras es

$$v = \frac{q}{C}$$

siendo q la carga del condensador en dicho instante y la ley de Ohm nos dice

$$v = R\,i \quad \text{o sea} \quad \frac{q}{C} = -R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

de donde

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}$$

que integrada da

$$\ln q = -\frac{t}{RC} + K' \tag{4.59}$$

En el instante $t = 0$, $q = Q$, luego

$$\ln Q = K' \tag{4.60}$$

y restando de la ecuación 4.59 la 4.60 tenemos

$$\ln \frac{q}{Q} = -\frac{t}{RC}$$

y tomando antilogaritmos

$$q = Q\, e^{-t/RC} \tag{4.61}$$

La constante de tiempo determina ahora el tiempo que tarda el condensador en alcanzar el 37 % de su carga inicial Q. Si es pequeña (curva I de fig. 4.14 *b*) el condensador se descarga rápidamente. Si es grande (curva III, fig. 4.14 *b*) tarda más.

5

Conducción en sólidos, líquidos y gases. Pilas eléctricas

En el capítulo 4 hemos visto de una manera general cómo tiene lugar el fenómeno de la conducción eléctrica. No obstante, quedan aún por examinar ciertos aspectos característicos del medio conductor, los cuales trataremos a un nivel suficientemente elemental para poder ser comprendido por los lectores de este libro, lo cual nos obligará a adelantar ciertos conceptos que corresponden a la Física Atómica.

5.1 Conducción en cuerpos sólidos. De todo lo visto en § 1.2, se desprende que las propiedades eléctricas de los conductores sólidos dependerán del tipo de átomos que los constituyan y de la manera como estén agrupados. El lector sabe ya, por conocimientos correspondientes a estudios anteriores, que los electrones que rodean al núcleo atómico poseen energías bien definidas, cuyos valores posibles forman un conjunto discreto. Cada uno de estos valores posibles corresponde a una órbita electrónica alrededor del núcleo a la que vaya asociada la energía del electrón, de manera parecida a como cada planeta o satélite tiene asociada una energía a su órbita (cfr. ec. 7.30, p. 109, tomo I) con la diferencia de que un satélite puede seguir una órbita cualquiera prefijada, es decir, puede tener una energía negativa cualquiera, mientras que el electrón sólo puede tener una de las energías permisibles constituyentes del conjunto discreto antes mencionado.

Por otra parte, la energía potencial de uno de los electrones más exteriores de un átomo será función exclusiva de su distancia al núcleo y a distancias de éste grandes frente al radio nuclear vendrá dada por

$$U = -e\,V = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{-e^2}{r}$$

en virtud de la ecuación 2.18, ya que la carga positiva del núcleo junto con la negativa de los demás electrones ejercería sobre él el mismo efecto que una carga + e si el electrón considerado se halla lejos de los demás. A menores distancias, la energía potencial vendrá regida por otra ley diferente que no vamos a analizar. Si llevamos a una gráfica la energía potencial del electrón en ordenadas y distancias de éste a un plano de referencia en abscisas, tendremos una curva simétrica respecto al núcleo tal como la curva U de la figura 5.1. Los electrones de un átomo tienden a ocupar siempre

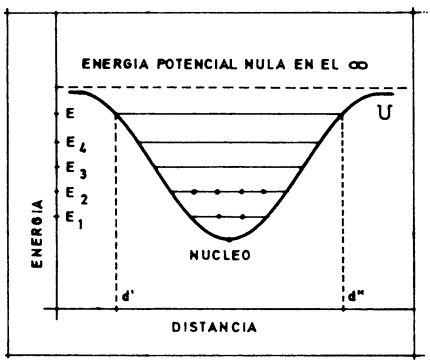


FIG. 5.1 Energía potencial U de un electrón en un átomo y algunos de sus niveles energéticos posibles E_1, E_2, ... E.

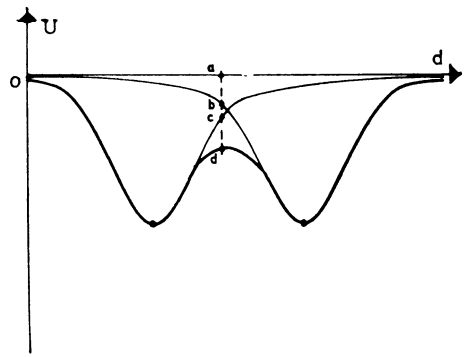


FIG. 5.2 Energía potencial de un electrón en el campo de dos iones en presencia. Para un punto cualquiera a distancia Oa será la suma de las dos energías potenciales negativas ab y ac, es decir, $ab + ac = ad$.

los niveles energéticos más bajos, pero el *principio de exclusión de Pauli* limita el número máximo de electrones que puedan ocupar un nivel energético, y así, al más bajo le asigna 2 electrones como máximo, 8 al siguiente, etc. Por eso, todos los átomos (salvo el del H) tienen completo su nivel inferior. En la figura 5.1 se ha representado, además de la curva U ya mencionada, ciertos niveles energéticos de un átomo de C en el que sus 6 electrones ocupan los niveles más bajos, mientras los otros niveles energéticos están libres. Si un electrón pasara al nivel más elevado de los representados (energía E) podría moverse en la proximidad del núcleo sin ocupar posiciones correspondientes a abscisas inferiores a d' ni superiores a d'', pues en tal caso la energía potencial U sería superior a la energía total E del electrón, lo que obligaría a una energía cinética negativa, cosa que carece de sentido. Se comprende que en los niveles

inferiores, las posiciones que pueda adoptar el electrón estarán aún más limitadas.

Si tuviéramos dos átomos simplemente ionizados en presencia, la energía potencial de un electrón en los distintos puntos se obtendría sumando punto a punto las energías potenciales debidas a uno y otro átomo, tal como se indica en la figura 5.2. Si en vez de dos átomos consideráramos un conjunto de átomos iguales equidistante cada uno de ellos de los dos vecinos, como se indica en la figura 5.3, la distri-

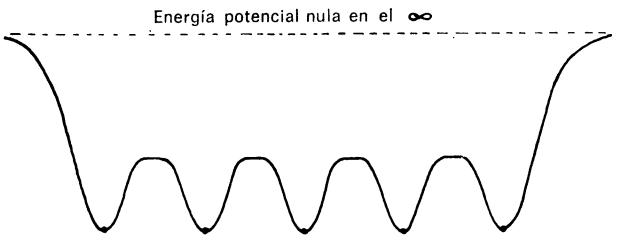


FIG. 5.3 Energía potencial de un electrón en el campo creado por $n = 5$ átomos.

bución de la energía potencial sería la representada en dicha figura. Esto nos indica que en el interior de un conductor en equilibrio, el potencial no es rigurosamente constante, sino que existen variaciones de potencial muy acusadas en la proximidad de los átomos (recordemos, § 1.2, que éstos están ionizados por haber perdido los electrones libres). No obstante, estas variaciones tienen lugar en regiones de pequeña extensión, por lo que, por término medio, puede considerarse que el potencial es constante y aproximadamente igual al correspondiente a las cumbres de la figura 5.3.

Al poner dos átomos en presencia, los electrones de uno se hallarán sometidos a fuerzas atractivas por parte del núcleo del otro, y esta

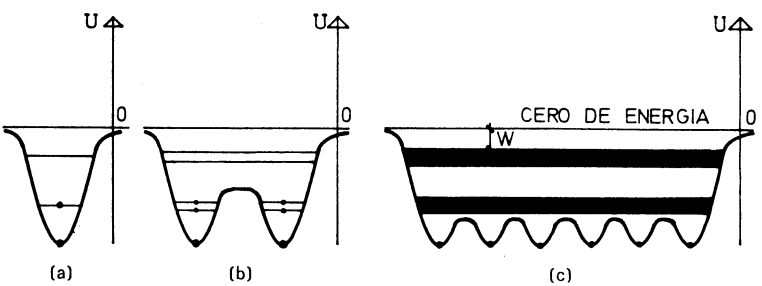


FIG. 5.4 Niveles energéticos de *a*) un átomo, *b*) dos átomos, *c*) bandas de energía.

perturbación será mayor para los electrones más exteriores, a los que llamaremos electrones de *valencia,* cosa que ya citamos en § 1.2. Ahora bien, la fuerte interacción mencionada altera ligeramente las energías de los electrones de valencia, por lo que cada nivel energético de los átomos se desdobla en dos niveles energéticos poco diferentes en el sistema de los dos átomos. Si hay n átomos en presencia, cada nivel energético de un átomo se desdobla en n niveles poco diferentes en el cristal que los contiene, y como en un monocristal, aunque sea muy pequeño, hay muchísimos millones de átomos, cada uno tendrá asociados tantos niveles de energía que constituirá una *banda* energética (fig. 5.4 *c*). El espacio comprendido entre dos bandas representa energías que *no* pueden tener los electrones.

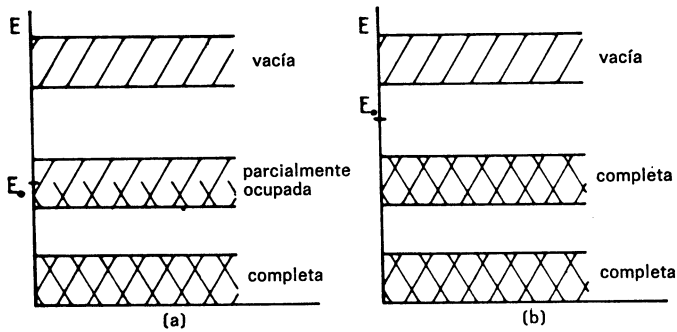


FIG. 5.5 Bandas energéticas de un *a*) conductor, *b*) aislador.

Si los electrones de valencia tuvieran todos sus energías mínimas posibles, la *banda de valencia* estará completa y la banda correspondiente a niveles energéticos superiores, no ocupados, estará vacía. A esta banda se le da el nombre de banda *de conducción.* El porqué de estas denominaciones resulta claro si se considera lo siguiente: cuando la banda de valencia tiene completos sus niveles, la de conducción los tiene vacíos. Al aplicar un campo eléctrico al cristal, deberá acelerar los electrones, y ello significa que aumenta su energía, es decir, pasar a un nivel superior. Pero si todos los niveles de la banda de valencia están completos, tal cosa no será posible a menos que pasen a niveles de la banda de conducción. Estas dos bandas pueden estar muy separadas y el electrón no puede saltar de la banda de valencia a la de conducción por requerir ello un gran salto de energía (fig. 5.5 *b*). El campo, pues, no podrá acelerar a los electrones

y el cuerpo sería un aislador. Pero si las dos bandas quedaran solapadas (fig. 5.5 *a*), los electrones podrían pasar sin dispendio excesivo de energía a niveles superiores no completos, siendo acelerados por el campo. La agitación térmica puede ser suficiente para proporcionar la energía necesaria, y ello ocurre (cfr. § 1.2) en los metales. Como en éstos no hay más portadores que los electrones, la suma de la ecuación 4.10 bis sólo contendrá un término, y dado que el recorrido libre medio L disminuye al aumentar la temperatura manteniéndose constante el número de electrones por unidad de volumen n, la conductibilidad disminuirá al aumentar la temperatura.

5.2 Semiconductores. Determinados cuerpos, entre los que se cuentan el silicio y el germanio, presentan la particularidad de que la separación entre las bandas de valencia y de conducción contiguas no es nula, pero es menor que las que aparecen en los cuerpos aisladores. Ello hace que la agitación térmica sólo permita el salto de la primera a la segunda de los electrones más energéticos, y el número de éstos dependerá de la temperatura. Esto lleva consigo que dichos cuerpos, llamados *semiconductores,* se comporten como aisladores a temperaturas bajas y como conductores de conductibilidad no muy elevada a temperaturas superiores.

Para tener una visión menos abstracta de los semiconductores, consideremos un cristal de silicio. Cada átomo tiene cuatro electrones de valencia que comparte mediante enlaces covalentes con los átomos vecinos de la estructura cristalina. No hay, pues, electrones libres. Ahora bien, la agitación térmica hace que dichos electrones de valencia tengan energías muy variadas, y unos pocos de ellos tendrán energía suficiente para abandonar su puesto venciendo las fuerzas de enlace y convertirse en electrón libre. Quedará en la región considerada un defecto de un electrón, o sea, éste ha dejado un *hueco,* que equivaldrá a una carga positiva $+e$. La rotura del enlace ha producido, pues, un *par electrón-hueco.* Cuando la agitación térmica haga que se aproxime al enlace roto otro par covalente, la atracción electrostática podrá hacer que un electrón de éste caiga en el hueco, neutralizándolo. Ahora bien, al abandonar su enlace aparecerá en éste un nuevo hueco y el fenómeno sería análogo al traslado de la carga positiva $+e$ del primer enlace al segundo. Es decir, los huecos se comportan como cargas positivas móviles. Luego podrán considerarse como portadores de carga que contribuyan a la corriente eléctrica.

Lo anterior podemos razonarlo de manera menos intuitiva pero más precisa, de la manera siguiente: los electrones que se hallan

ocupando por completo la banda de valencia dan una contribución nula a la corriente eléctrica. Es decir, la ecuación 4.5 nos daría

$$\mathbf{J} = -e \Sigma n_i \mathbf{v}_i = 0 \tag{5.1}$$

pero n_i es el número de electrones cuya velocidad es $\mathbf{v}_i$, y la suma del segundo miembro no será sino la suma de las velocidades de todos los electrones existentes en la unidad de volumen, suma en la que habrá n_1 sumandos iguales por una parte, n_2 por otra, etc.; luego la ecuación 5.1 podrá escribirse

$$\mathbf{J} = -e \Sigma \mathbf{v}_i = 0 \tag{5.2}$$

estando extendida la suma a todos los electrones de valencia existentes por unidad de volumen. Cuando algunos de éstos pasen a la banda de conducción, dejan vacantes sendos niveles que podrán ser ocupados por otros electrones de la banda de valencia sin abandonar ésta. Luego los electrones de la banda de valencia podrán contribuir, pues, a la conducción. Veamos cómo: Consideremos al electrón k-simo de la ecuación 5.2 y tendremos

$$\mathbf{J} = -e \Sigma \mathbf{v}_i = -e \sum_{i \neq k} \mathbf{v}_i - e \mathbf{v}_k = 0$$

de donde

$$-e \sum_{i \neq k} \mathbf{v}_i = e \mathbf{v}_k \tag{5.3}$$

El primer miembro de la ecuación 5.3 es la densidad de corriente debida a todos los electrones de la banda de valencia menos el k-simo y el segundo miembro corresponde a la densidad de corriente de una carga $+e$. O sea: al faltar un electrón de la banda de valencia, los demás se comportan como si se desplazara el *hueco* dejado por él. Total, que *la banda de valencia de los electrones puede considerarse como banda de conducción de los huecos y recíprocamente.* Consideremos, pues, los huecos como portadores tal como indicábamos antes.

Nos hallamos, pues, ante una corriente constituida por el movimiento de dos tipos de portadores y las ecuaciones 4.10 y 4.10 bis contendrán dos sumandos en sus segundos miembros.

Por otra parte, en § 4.3, la ecuación 4.9 nos permite hallar el cociente entre la velocidad media $\frac{1}{2} \Delta \mathbf{v}_i$ de cada tipo de portadores y el campo eléctrico $\mathbf{E}$ que la origina. Dicho cociente recibe el nombre de *movilidad* de los portadores y será

$$\mu_i = \frac{1}{2} \frac{|q_i| L_i}{m_i v_i} \tag{5.4}$$

en tal caso, la ecuación 4.10 bis se escribe en la forma

$$\sigma = \Sigma n_i |q_i| \mu_i \tag{5.5}$$

En un semiconductor, sólo hay dos tipos de portadores y la suma de la ecuación 5.5 sólo tendrá dos términos: uno para los electrones libres y otro para los huecos, o sea,

$$\sigma = n e \mu_e + p e \mu_h \tag{5.6}$$

donde n es la concentración de electrones y p la de huecos *en sus propias* bandas de conducción mientras que μ_e y μ_h son las movilidades de los electrones y de los huecos, respectivamente. La carga eléctrica elemental e se toma en valor absoluto.

Cuando se trate de semiconductores *intrínsecos,* es decir, totalmente exentos de impurezas, la rotura térmica de los enlaces da igual número de electrones libres que de huecos y entonces, será $p = n$.

5.3 Semiconductores con impurezas. Consideremos ahora que dejamos cristalizar silicio fundido al que se han agregado átomos de Sb a razón de uno por cada millón de átomos de Si, aproximadamente. En la estructura cristalina, lugares que debían estar ocupados por un átomo de Si lo estarán por un átomo de Sb y como éste tiene cinco electrones de valencia, compartirá cuatro de ellos con los cuatro átomos de Si vecinos en la estructura y el quinto electrón quedará desaparejado y podrá liberarse con un dispendio de energía pequeño. Cada átomo de Sb contribuye, pues, con un electrón libre, por lo que se dice que el Sb es una impureza *donante.* Como el número de electrones libres así obtenido es mucho mayor que el de pares intrínsecos, algunos de ellos se recombinarán con los huecos intrínsecos y al final quedará un número de electrones libres casi igual al de átomos donantes y muy pocos huecos intrínsecos que no se hayan destruido por recombinación. Se dice que los electrones son los portadores *mayoritarios* y el semiconductor se dice que es de tipo n (por ser negativos los portadores mayoritarios).

Si la impureza introducida fuera trivalente, por ejemplo aluminio, al intentar formar los enlaces covalentes con sus cuatro vecinos de estructura, cada átomo de Al debería robar el electrón de valencia que le falta y eso lo haría a un átomo de Si. De esta manera se produciría un hueco en uno de los enlaces de éste y el átomo de

Al se convertiría en un ion negativo. Se dice que el Al es una impureza *aceptadora* y que el semiconductor es *tipo p* por ser positivos los portadores mayoritarios.

Resumiendo: un semiconductor tipo *n* tiene una estructura cristalina en la que están fijos iones positivos y tiene móviles una gran cantidad de electrones libres y una pequeña cantidad de huecos. En cambio, un semiconductor tipo *p* tiene iones negativos fijos en su estructura y como portadores mayoritarios, huecos.

El hecho de que en un semiconductor tipo *n* pasen a la banda de conducción electrones de los átomos donantes con un dispendio de energía pequeño significa que el nivel energético de tales electrones está muy próximo a la banda de conducción (fig. 5.6 *a*). Análogamente, en un semiconductor tipo *p*, el nivel energético de los aceptadores ha de estar próximo a la banda de valencia, por lo que será fácil que pasen electrones de valencia del semiconductor a los átomos aceptadores (fig. 5.6 *b*).

La media ponderada de las energías de los electrones de conducción y de los huecos, E_0, es lo que llamamos *nivel de Fermi* de un material. En los semiconductores intrínsecos, al igual que en los aisladores (fig. 5.5 *b*) equidistará de las bandas de valencia y conducción y en los metales (fig. 5.5 *a*) coincidirá con su separación si consideramos cada falta de electrón como un hueco. En tal caso, representará la energía máxima de los electrones. En el caso de semiconductores con impurezas, la presencia de átomos donantes o aceptadores desplazará el nivel de Fermi hacia la banda de conducción o hacia la de valencia, respectivamente (fig. 5.6).

5.4 Conducción en líquidos. La conducción eléctrica en los líquidos es distinta de la conducción metálica. Para que un líquido conduzca la corriente es preciso que en él existan iones. De ellos, en un campo eléctrico los positivos se mueven en el mismo sentido que el campo y los negativos en sentido opuesto. Las disoluciones conductoras se denominan *electrolitos*. Una disolución ácida, básica o salina, constituye un electrolito. Según la teoría de Arrhenius, las moléculas disueltas de un electrolito se disocian dando dos clases de iones de cargas iguales en valor absoluto, pero de signos opuestos en el momento de la disolución. Una molécula de Cl Na se disocia en el ion Cl negativo y el Na positivo, lo cual indicamos escribiendo Cl^-, Na^+. La carga de cada ion monovalente es igual a la del electrón, pues ha perdido o ganado un electrón de valencia. Si son divalentes, la carga vale el doble; en los trivalentes, el triple.

Al establecer un campo eléctrico **E**, los iones positivos se dirigen al polo negativo (cátodo) y los negativos al positivo (ánodo), por lo que a los iones positivos se les llama *cationes* y a los negativos *aniones*. La corriente eléctrica es el resultado del transporte de estas

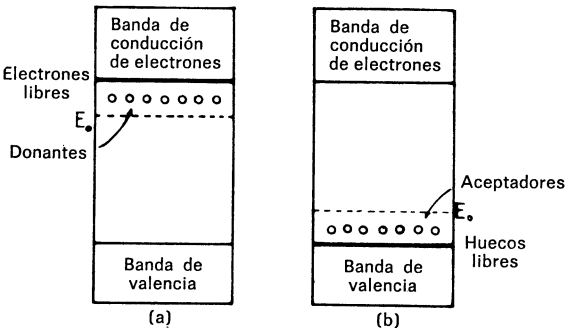


FIG. 5.6 Bandas energéticas en un semiconductor *a*) tipo *n*, *b*) tipo *p*.

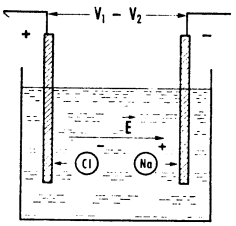


FIG. 5.7 Conducción electrolítica.

cargas las cuales presentan concentraciones (número de cargas por unidad de volumen) mucho menores que en el caso de los portadores en los sólidos. El campo eléctrico tiene que vencer la fuerza atractiva entre los dos iones de signos contrarios que, según la ley de Coulomb (ec. 3.11) es

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{QQ'}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 K}\frac{QQ'}{r^2}$$

de aquí deducimos que si K es elevada, la fuerza es menor que en el vacío, y si K es pequeña (próxima a la unidad), la fuerza es casi la misma que en el vacío; por ejemplo, en el agua en que $K = 81$, la fuerza atractiva es 81 veces menor que en el vacío, de esta forma el campo eléctrico debe vencer una fuerza menor cuanto más elevada sea la constante dieléctrica, y así la conductividad es mayor que si se hubiese disuelto la misma sustancia en un líquido de constante dieléctrica relativa menor, por ejemplo, tolueno ($K = 2{,}38$), en el cual la conductividad sería muy pequeña.

Cuando el anión llega al ánodo, deposita su carga que es igual a su valencia por la carga del electrón, el cation al llegar al cátodo adquiere un número de electrones igual a su valencia, por lo tanto se ceden al ánodo electrones y se adquieren en el cátodo el mismo número de electrones. Si el electrolito está intercalado en serie en

un circuito eléctrico, contenido en cierta vasija, el electrolito actúa como agente de transporte de cargas eléctricas (electrones) y el número de cargas que circulan depende del número de iones presentes y del campo eléctrico (o de la diferencia de potencial) entre los electrodos. Así, pues, los iones se limitan a transportar las cargas; los negativos las ceden al ánodo y los positivos las reciben en el cátodo.

En el momento de llegar el ion al electrodo y depositar la carga (ceder o adquirir electrones), el ion se convierte en átomo o radical y puede reaccionar con el líquido y el electrodo (reacciones secundarias). Si los electrodos son de platino no reaccionan con ellos, pero pueden reaccionar con el líquido. Por ejemplo: Una disolución de ácido sulfúrico en agua se disocia en los iones SO_4^{--}, $2\,H^+$. Al llegar el $2\,H^+$ al cátodo y perder las cargas (ganar electrones) se desprende. El ion SO_4^{--} al llegar al ánodo pierde las cargas y reacciona con el agua formando ácido sulfúrico y desprendiéndose oxígeno. A este fenómeno se le llama *electrolisis*. La cantidad de ácido presente en la disolución es siempre la misma, pero el agua se va descomponiendo en O y H_2, que se desprenden en los electrodos (positivo y negativo, respectivamente). Esto nos proporciona un método para determinar la polaridad de una corriente. Tomamos un vaso con agua ligeramente acidulada, introducimos a corta distancia uno de otro los terminales de los cuales queremos conocer la polaridad. En el terminal que se desprende hidrógeno notaremos doble cantidad de burbujas que en el que se desprende oxígeno. El polo negativo (cátodo) es el terminal donde se desprende el hidrógeno según se ha dicho antes.

5.5 Ley de Faraday. Supongamos una disolución de SO_4Cu en agua. Se disocia en SO_4^{--} y Cu^{++}. Al aplicar una diferencia de potencial entre dos electrodos de cobre sumergidos en la vasija que contiene la disolución, el ion Cu^{++} se dirige al cátodo y al llegar a él se deposita en el electrodo. El ion SO_4^{--} al llegar al ánodo pierde su carga y reacciona con el agua que formará ácido sulfúrico que a su vez reaccionará con el electrodo de cobre y regenera el SO_4Cu, la cantidad del cual permanece constante. El electrodo negativo va ganando peso y el positivo lo pierde.

Experimentalmente, FARADAY encontró que la cantidad de sustancia depositada en el cátodo es directamente proporcional a la cantidad de electricidad que ha atravesado el electrolito (intensidad por tiempo) y al número de equivalentes-gramo (masa atómica dividida por la valencia) del elemento depositado.

Sea un ion de un elemento de valencia z; un átomo-gramo con-

tiene N átomos (N es el número de Avogadro). La carga transportada por un átomo gramo es $z\,e\,N$ (siendo e la carga del electrón); una masa m transportará cierta carga.

Siendo A la masa atómica del elemento, se verifica:

$$\left.\begin{array}{ll} 1 \text{ átomo-gramo transporta} & z\,e\,N \\ \dfrac{m}{A} \text{ átomos-gramos} \quad » & Q \end{array}\right\} Q = \frac{m}{A} z\,e\,N$$

$$m = \frac{A\,Q}{z\,e\,N} = \frac{\dfrac{A}{z}}{e\,N} I\,t$$

$e\,N = 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 6{,}023 \cdot 10^{23} = 96\,500$ C (carga llamada *faraday*)

$\dfrac{A}{z}$ es el número de equivalentes gramo

I se mide en amperes

t en segundos

m viene dado en gramos

$$m = \frac{\text{número de equivalentes gramo}}{96\,500} I\,t$$

Ejemplo. A través de una disolución de SO_4Cu circula una corriente de 0,5 A. Determinar la cantidad de Cu depositada en el cátodo en diez minutos. Masa atómica del Cu = 63,54.

$$m = \frac{\dfrac{63{,}54}{2}}{96\,500} 0{,}5 \cdot 10 \cdot 60 = 0{,}09 \text{ gramos}$$

Esto nos permite calibrar o comprobar un amperímetro y definir el coulomb internacional. Podemos definir el coulomb diciendo que es la cantidad de electricidad necesaria para que 0,001118 g de plata, de una disolución de una sal de dicho metal, se depositen en el cátodo.

5.6 Conductividad del electrolito. La fracción α del número total de moléculas que se disocia, recibe el nombre de *grado de disociación*, es decir, que si existen n moléculas por unidad de volumen se disociarán $\alpha\,n$ por unidad de volumen y si cada molécula da origen a n_+ cationes, el número de cationes por unidad de volumen será $\alpha\,n\,n_+$. Si cada cation posee una carga $z_+\,e$, la carga por unidad de volumen debida a los cationes será

$$\rho_+ = \alpha\,n\,n_+\,z_+\,e \tag{5.7}$$

y la debida a los aniones

$$\rho_- = \alpha\,n\,n_-\,z_-\,(-e) \tag{5.8}$$

donde n_- es el número de aniones a que da origen cada molécula y $z_-\,e$ la carga de cada anion. Sustituyendo las ecuaciones 5.7 y 5.8 en la 4.7 tenemos

$$\mathbf{J} = \alpha\,n\,(n_+\,z_+\,\mathbf{v}_+ - n_-\,z_-\,\mathbf{v}_-)\,e \tag{5.9}$$

donde e se toma en valor absoluto. Ahora bien, como la carga total de los cationes ha de ser igual a la de los aniones, en valor absoluto,

$$\alpha n n_+ z_+ e = \alpha n n_- z_- e \qquad \text{o sea} \qquad n_+ z_+ = n_- z_- = z$$

donde z es la llamada *valencia electroquímica*; y como por efecto del campo eléctrico $\mathbf{v}_+$ y $\mathbf{v}_-$ tendrán sentidos opuestos y por la definición de movilidad dada en § 5.2 podemos escribir

$$\mathbf{v}_+ = \mu_+ \mathbf{E} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_- = -\mu_- \mathbf{E}$$

la ecuación 5.9 queda en la forma

$$\mathbf{J} = \alpha n z e (\mu_+ + \mu_-) \mathbf{E} \tag{5.10}$$

que expresa la proporcionalidad entre los vectores densidad de corriente y campo eléctrico. Comparando la ecuación 5.10 con la 4.11 queda para la conductividad del electrolito

$$\sigma = \alpha n z e (\mu_+ + \mu_-) \tag{5.11}$$

Si las movilidades de los iones no dependieran de la concentración, la ecuación 5.11 nos indicaría que al diluir una solución electrolítica, disminuiría su conductividad. La experiencia así lo indica. Ahora bien, si se considera la llamada *conductividad molecular* Λ, es decir, la razón de la conductividad al número de moléculas por unidad de volumen, experimentalmente puede verse que aumenta al diluir más y más la solución, tendiendo asintóticamente a un valor límite Λ_0 llamado *conductividad molecular límite*. Es decir, una molécula de un electrolito diluido es más conductora que la de dicho electrolito concentrado, hecho que se interpreta a la luz de la teoría formulada por SVANTE AUGUST ARRHENIUS (1859-1927) según la cual en un electrolito concentrado no se disocian todas las moléculas y solamente se logra la disociación total en los electrolitos muy diluidos. O sea que cuando se tiende a la conductividad límite, el grado de disociación α tiende a 1. Podemos, pues, escribir

$$\Lambda = \frac{\sigma}{n} = \alpha z e (\mu_+ + \mu_-) \qquad \text{y} \qquad \Lambda_0 = z e (\mu_+ + \mu_-)$$

de donde

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_0} = \alpha$$

y la medida de la conductividad a diversas concentraciones permitirá determinar el grado de disociación correspondiente.

5.7 Energía de extracción y diferencia de potencial de contacto. Consideremos dos metales en equilibrio A y B. Si dichos metales son diferentes, las energías máximas de sus electrones libres también lo serán, según se indica en la figura 5.8 *a*. En esta figura se ha tomado como cero de energías potenciales los puntos infinitamente alejados del conductor, tal como se hizo en la figura 5.4 *c*. Pero en ésta a un punto del conductor tal como el 0 corresponde una energía potencial muy pequeña, por lo que el electrón que se hallara en dicha posición se halla prácticamente en las mismas condiciones que si se hallara en el infinito, o sea como si se hubiera liberado del metal y ello ocurre a distancias del orden de 10^{-7} m. Se comprende, pues, que al suministrar a uno de los electrones

más energéticos una energía no inferior a W (fig. 5.4 c), podrá escapar del metal. Por eso a W se le da el nombre de *energía de extracción* y es una cantidad característica del metal.

Al poner los dos metales en contacto íntimo, podrán pasar electrones libres de uno a otro, pero como todos los sistemas tienden a tener la mínima energía potencial posible y en B hay electrones de energías superiores a las de los electrones de A, se producirá un flujo neto de electrones de B a A, alcanzán-

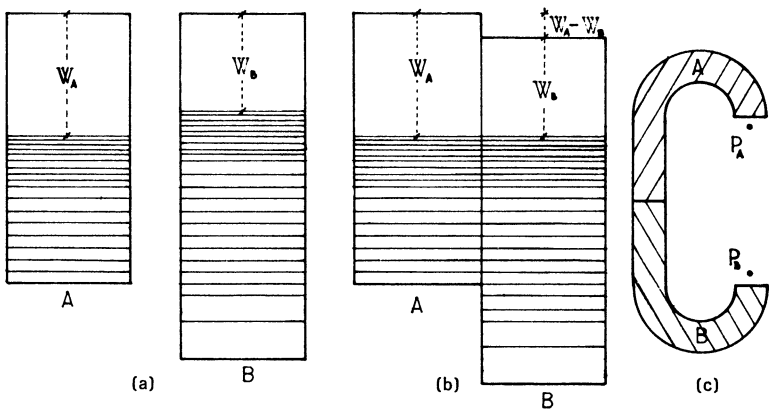


FIG. 5.8 Bandas de energía y energías de extracción de los electrones en dos metales A y B. *a*) aislados, *b*) en contacto íntimo c) los metales A y B en contacto.

dose el equilibrio cuando las energías máximas de los electrones sean iguales en uno y otro metal (fig. 5.8 *b*). Es decir, ambos metales igualan sus niveles de Fermi. En este proceso, B habrá perdido electrones y A los habrá ganado, por lo que el potencial de B se habrá elevado y el de A disminuido, ya que los electrones son cargas negativas.

Un punto P_A inmediatamente exterior al metal A tendrá un potencial sensiblemente igual al de éste y lo mismo ocurrirá con un punto P_B inmediato a B (fig. 5.8 c). La diferencia de energías potenciales de un electrón entre estos puntos será $W_A - W_B$ (fig. 5.8 *b*), pues ya hemos indicado que en puntos muy próximos a los conductores los electrones están ya prácticamente liberados; y si al electrón de A se le ha suministrado la energía W_A gastará toda su energía en salir del metal y una vez liberado carecerá de energía cinética. Lo mismo diremos del electrón que sale de B, luego

$$W_A - W_B = (-e)\,(V_A - V_B)$$

y esta ddp $V_A - V_B$ entre dos puntos próximos a A y B respectivamente recibe el nombre de *ddp de contacto* entre los metales A y B y suele representarse por A/B. Su valor depende de los metales en presencia, de la temperatura, y es del orden del volt.

Resumiendo: *Al poner en contacto dos metales diferentes, en el estado de equilibrio cada uno de ellos puede considerarse como un volumen equipotencial, pero en su región de unión el potencial sufre una discontinuidad debido*

a que un metal se ha cargado positivamente y el otro negativamente al tomar éste electrones del primero. Este fenómeno fue descubierto por ALESSANDRO VOLTA (1745-1827). Si con dos metales diferentes *A* y *B* formamos una cadena *A-B-A* como se indica en la figura 5.9 cuyos puntos estén todos a la misma temperatura, sus extremos se hallarán al mismo potencial, pues al pasar de izquierda a derecha de *A* a *B*, el potencial sufrirá un salto igual y opuesto al que sufre al seguir de izquierda a derecha y pasar de *B* a *A*. En cambio, si las uniones no estuvieran a igual temperatura, como la ddp de contacto depende de ella, los saltos no serían de igual valor y entre los extremos de la cadena aparecería una cierta ddp.

FIG. 5.9 Cadena metálica.

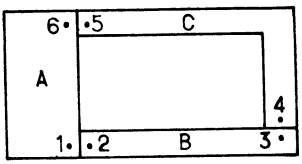


FIG. 5.10 Cadena metálica cerrada.

Consideremos ahora una cadena metálica cerrada formada por varios conductores diferentes (*A*, *B* y *C* en fig. 5.10) y cuyos puntos estén todos a la misma temperatura. En tal caso, la experiencia nos indica que no circula corriente, por lo que todos los puntos de un mismo conductor metálico se hallarán a igual potencial. Escribiendo esto, junto con las expresiones de las ddp entre puntos próximos situados a uno y otro lado de cada unión, tenemos

$$V_1 - V_6 = 0 \qquad V_2 - V_1 = B/A$$
$$V_5 - V_4 = 0 \qquad V_6 - V_5 = A/C$$
$$V_3 - V_2 = 0 \qquad V_4 - V_3 = C/B$$

y sumando estas igualdades resulta

$$B/A + A/C + C/B = 0$$

Se comprende que esto también sucedería si el número de conductores metálicos fuera otro cualquiera, es decir, que *en una cadena cerrada de conductores metálicos cuyos puntos estén todos a igual temperatura, la suma de las ddp de contacto es nula* (ley de Volta).

5.8 Efectos termoeléctricos. En 1821, el físico alemán THOMAS JOHANN SEEBECK formó un circuito con dos conductores metálicos diferentes y al mantener las dos uniones a temperaturas distintas observó que el circuito era asiento de una corriente.

Este fenómeno es reversible según puso de manifiesto en 1834 el físico francés JEAN CHARLES ATHANASE PELTIER, quien observó que al hacer circular una corriente por un circuito en el que hubiera dos conductores diferentes, una de las uniones se calentaba y la otra se enfriaba.

En el ejemplo de la figura 5.11 b, se calienta la unión en donde la corriente pasa del Bi al Cu. Este efecto calorífico *anómalo* está superpuesto al efecto Joule y recibe el nombre de *efecto Peltier*. A diferencia del efecto Joule que es irreversible, éste no lo es, pues al invertir el sentido de la corriente la unión que antes se enfriaba ahora se calienta y recíprocamente.

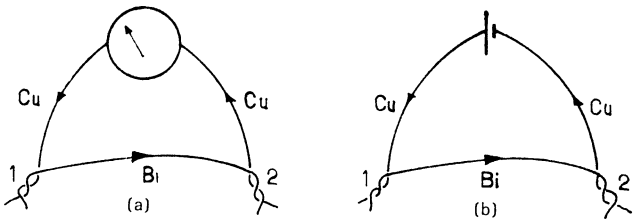


FIG. 5.11 *a*) Efecto Seebeck. Manteniendo la unión 1 más caliente que la 2, circula la corriente en el sentido indicado. *b*) Efecto Peltier. Al circular la corriente en el sentido indicado la unión 1 se enfría y la 2 se calienta.

Podríamos estar tentados de dar una explicación fácil de este fenómeno basada en la ddp de contacto, pues al pasar una corriente de intensidad I del Bi al Cu se produciría una pérdida de potencia eléctrica IV siendo $V = \text{Bi/Cu}$. Pero ello no es así. La energía eléctrica perdida, que aparece en forma de calor, es mucho menor (unas mil veces) y ello no debe extrañarnos, pues los razonamientos del § 5.7 se basaban en considerar los conductores *en equilibrio*. Ahora, en cambio, hay paso de corriente y ello alterará necesariamente la distribución de las bandas energéticas en ambos metales, lo que hará que en las uniones cambien las fuerzas debidas a la estructura electrónica de los metales. Estas fuerzas no se deben al generador que hace circular la corriente, por lo que podemos considerarlas como fuerzas no eléctricas y la potencia que entreguen a una corriente de intensidad unidad será (cfr. § 4.7) una fem llamada *fem Peltier*, la cual será característica de los dos metales en contacto y de la temperatura de la unión, pues ambas cosas influirán en las distribuciones de las bandas energéticas a uno y otro lado de la unión. La fem Peltier la representaremos por ${}_T\Pi_{AB}$, donde el subíndice anterior se refiere a la temperatura de la unión y el posterior a los metales A y B en contacto.

Si volvemos al circuito cerrado de la figura 5.10 cuyos puntos están todos a igual temperatura, para hacer pasar una carga $dQ = I\,dt$ del punto 1 al 2 habrá que efectuar un trabajo ${}_T\Pi_{AB}\, I\,dt$. Del 2 al 3 pasa la carga sin absorber trabajo, pues el conductor B está en equilibrio (cfr. § 5.7). Análogamente, para pasar del 3 al 4 absorberá un trabajo ${}_T\Pi_{BC}\, I\,dt$, del 4 al 5 nada, del 5 al 6 ${}_T\Pi_{CA}\, I\,dt$ y del 6 al 1 nada. En total, el trabajo absorbido por la carga será

$$-W = ({}_T\Pi_{AB} + {}_T\Pi_{BC} + {}_T\Pi_{CA})\, I\,dt$$

La cantidad de calor puesta en juego en este proceso es nula y como la carga se halla en un estado final coincidente con el inicial, la variación de energía interna será también nula y el primer principio de la Termodinámica (ec. 17.2, pág. 321, tomo I) nos dice que $W = 0$ y, por tanto,

$${}_T\Pi_{AB} + {}_T\Pi_{BC} + {}_T\Pi_{CA} = 0 \qquad (5.12)$$

El razonamiento sería igualmente válido para un número cualquiera de metales constituyentes de la cadena con tal que sus puntos estén todos a igual temperatura. La ecuación 5.12 para el caso representado en la figura 5.12 da

$${}_T\Pi_{AB} + {}_T\Pi_{BC} + {}_T\Pi_{CD} + {}_T\Pi_{DE} + {}_T\Pi_{EF} + {}_T\Pi_{FA} = 0$$

de donde

$${}_T\Pi_{AB} = {}_T\Pi_{AF} + {}_T\Pi_{FE} + {}_T\Pi_{ED} + {}_T\Pi_{DC} + {}_T\Pi_{CB}$$

El segundo miembro de esta ecuación es la suma de las fem Peltier de toda una parte de circuito cuyos puntos se hallan todos a igual temperatura y el primer miembro es la fem Peltier que a dicha temperatura corresponde a los metales extremos puestos en contacto, luego *la suma de las fem Peltier en un tramo isotérmico de circuito es independiente de los metales intermedios y sólo depende de los metales que constituyen los extremos de dicho tramo* (ley de los metales intermedios). Según esta ley, las uniones entre metales pueden contener un metal de soldadura sin que se altere la fem total.

Otro efecto termoeléctrico interesante es el llamado *efecto Thomson* que había sido previsto por WILLIAM THOMSON (1824-1907), de quien ya hemos hablado en Termodinámica llamándole por su título de LORD KELVIN.

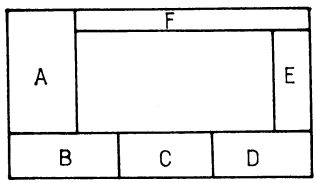


FIG. 5.12 Ley de los metales intermedios.

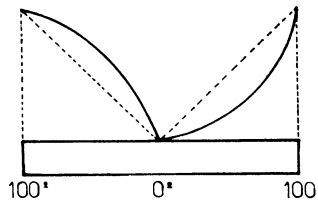


FIG. 5.13 Efecto Thomson

Imaginemos una barra metálica homogénea cuyos extremos se hallan a una misma temperatura (100°C en fig. 5.13) y su punto medio se halla a una temperatura diferente (0°C en fig. 5.13). En régimen permanente, la distribución de temperaturas a lo largo de la barra está representada por las dos rectas de trazos de la figura 5.13. Si dicha barra forma parte de un circuito y hacemos circular por ella una corriente de izquierda a derecha (p. ej.), la distribución de temperaturas se altera quedando representada por los dos arcos curvos de la figura 5.13. Es decir, en la mitad izquierda hay un desprendimiento anómalo de calor mientras que en la mitad derecha hay una absorción. Si se invirtiera el sentido de la corriente esta absorción tendría lugar en la otra mitad y el desprendimiento aparecería en la mitad derecha. Se trata de un fenómeno reversible.

Cuando, como en el caso citado, se tiene desprendimiento anómalo de calor al circular la corriente de los puntos de mayor temperatura a los de menor, se dice que el efecto Thomson es *negativo*. Si al circular la corriente hacia los puntos más fríos se produjera absorción de calor, el efecto sería *positivo*. El Cu y el Fe tienen efectos positivos y negativo, respectivamente. El Pb, en cambio, presenta un efecto Thomson despreciable.

Consideremos el caso del efecto Thomson positivo. Cuando hay enfriamiento en el sentido de la corriente, ésta absorbe una potencia calorífica y el cociente entre esta potencia y la intensidad de la corriente será una fem (cfr. § 4.7) a la que se da el nombre de *fem de temperatura*. En el caso del efecto Thomson negativo, esta fem sería, claro está, una fcem, es decir, una fem negativa.

Es un hecho experimental que si tenemos un circuito constituido por un solo metal y establecemos diferencias de temperatura entre sus distintos puntos, por el circuito no circula corriente alguna. Esto requiere que la suma de las fem de temperatura (que son las únicas fem que pueden existir en él) sea nula.

Es decir, que la fem total del tramo $P\,a\,P'$ (fig. 5.14) en cuyos extremos tenemos las temperaturas T y T', es igual a la fem total del tramo $P\,b\,P'$, que está en oposición con la primera, cualesquiera que sean las distribuciones de temperatura en los puntos intermedios de dichos tramos. Luego podemos afirmar que *la fem total entre dos puntos de un conductor metálico depende exclusivamente del metal que lo constituye y de las temperaturas en dichos dos puntos.*

Si los puntos P y P' del circuito de la figura 5.14 fueran muy próximos, la fem de temperatura del tramo $P\,P'$ dependería de T y $T + \mathrm{d}T$ que son las temperaturas en P y P', respectivamente, y podremos escribirla en la forma

$$\tau_{PP'} = \sigma\,\mathrm{d}T \tag{5.13}$$

donde σ es el llamado coeficiente de Thomson que deberá depender de T y del metal. Si quisiéramos hallar la fem entre dos puntos de temperaturas T_1 y T_2,

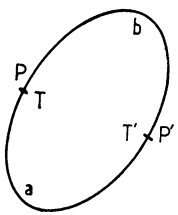


FIG. 5.14 Circuito constituido por un solo metal.

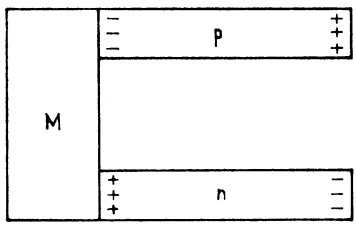


FIG. 5.15 Generador termoeléctrico. *M* es un metal a temperatura elevada, *p* una barra de semiconductor tipo *p* y *n* otra de semiconductor tipo *n*, ambas en contacto con *M*.

bastará descomponer el tramo entre dichos puntos en una serie de tramos infinitesimales a cada uno de los cuales corresponderá una fem del tipo indicado en la ecuación 5.13 y como estas fem están en serie la fem total será

$$\tau = \int_{T_1}^{T_2} \sigma\,\mathrm{d}T \tag{5.14}$$

Queremos poner de relieve que la diferencia de temperatura entre distintos puntos de un mismo metal hace que la concentración de electrones libres varíe de un punto a otro y que la ecuación 5.13 representa el trabajo efectuado contra las fuerzas eléctricas ejercidas sobre la unidad de carga a causa de la variación de la concentración de electrones libres al moverse a través de una diferencia de temperatura $\mathrm{d}T$.

El efecto Thomson presenta una particularidad importante en el caso de los semiconductores. Si se establece una diferencia de temperatura entre los extremos de una barra semiconductora con impurezas, los portadores mayoritarios se concentran en el extremo frío. Si ponemos una barra tipo *p* y otra tipo *n* en contacto con un metal caliente *M* (fig. 5.15), los extremos fríos de aquéllas se cargan con polaridades opuestas y si los uniéramos mediante un circuito exterior podría circular la corriente por él. Veamos qué mecanismo de conducción habrá en las uniones de los semiconductores con el metal. En la figura 5.16 *a* puede verse la región de contacto entre el semiconductor tipo *p*

y el metal *M*. Los átomos aceptadores próximos a la unión con el metal no tienen su carga compensada por haberse desplazado los huecos hacia el otro extremo. En consecuencia, crearán un campo dirigido hacia ellos. Este campo es suficientemente fuerte para romper enlaces covalentes en los átomos del semiconductor, llevando los electrones hacia el metal *M* por donde circulan libremente y los huecos hacia el otro extremo del semiconductor. Es decir, en dicha unión se generan pares electrón-hueco. En la figura 5.16 b puede verse que los donantes no compensados crean en la unión un campo dirigido hacia *M*. Los electrones libres existentes en el metal se encuentran sometidos a fuerzas hacia el semiconductor por el que circulan como portadores mayoritarios hacia

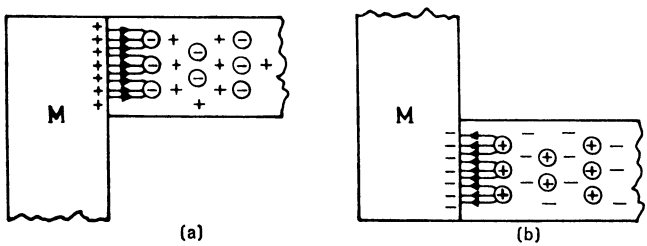


FIG. 5.16 *a*) El campo creado por los aceptadores, no compensados en la unión *M-p* genera pares electrón-hueco llevando los electrones a *M*. b) El campo creado por los donantes no compensados en la unión *M-n* atrae electrones procedentes de *M*.

el extremo frío y por él saldrán hacia el circuito exterior que atravesarán, llegando finalmente al extremo del semiconductor tipo *p* en el que se destruyen con los huecos allí existentes. Vemos que se destruye un hueco por cada electrón que llega y como éstos tienen su origen en la generación de pares de la unión *M-p*, tantos huecos como se generen en ésta se destruyen en el otro extremo del semiconductor tipo *p*. Por éste sólo circulan huecos. En cambio, por el metal *M* sólo circulan electrones, así como por el semiconductor tipo *n*.

Con una diferencia de temperaturas de unos centenares de grados se puede lograr una fem del orden de las décimas de volt. Poniendo en serie varios elementos se consiguen generadores que alimenten receptores de radio, calentando el metal *M* con la llama de una lámpara de petróleo, procedimiento empleado mucho en la Unión Soviética. Es interesante mencionar que haciendo circular la corriente a través del circuito en el mismo sentido por acción de un generador aplicado a los extremos, se enfríe el metal *M*, hecho aprovechado en algunas máquinas frigoríficas que utilizan semiconductores.

5.9 Par termoeléctrico. Hemos visto que cuando en un circuito metálico sólo hay fem Peltier (fig. 5.12), no circula corriente por ser nula la fem total. Lo mismo ocurre cuando en un circuito metálico sólo hay fem Thomson (fig. 5.14). Vamos ahora a considerar el caso en que puedan existir temperaturas diferentes en dos soldaduras. Para ello podemos considerar el circuito representado en la figura 5.11 *a* y suponer que las soldaduras 1 y 2 están a las temperaturas T_1 y T_2, respectivamente. Supondremos, también, que los extremos del conductor de Cu unidos al galvanómetro y éste tienen todos sus puntos a igual temperatura, con lo cual la presencia del galvanómetro no introduce ninguna fem o, si se prefiere, las fem Peltier introducidas se contrarrestan y podemos prescindir de ellas.

Para calcular la fem total $\mathcal{E}$ existente en el circuito, comenzaremos por la soldadura 1 en donde existe una fem Peltier ${}_{T_1}\Pi_{Cu\,Bi}$. En serie con ésta tendremos en el Bi una fem de temperatura $\int_{T_1}^{T_2} \sigma_{Bi}\, dT$, en la soldadura 2 una fem Peltier ${}_{T_2}\Pi_{Bi\,Cu}$ y en el conductor de Cu una fem de temperatura $\int_{T_2}^{T_1} \sigma_{Cu}\, dT$, luego

$$\mathcal{E} = {}_{T_1}\Pi_{Cu\,Bi} + \int_{T_1}^{T_2} \sigma_{Bi}\, dT + {}_{T_2}\Pi_{Bi\,Cu} + \int_{T_2}^{T_1} \sigma_{Cu}\, dT$$

o lo que es igual

$$\mathcal{E} = {}_{T_1}\Pi_{Cu\,Bi} - {}_{T_2}\Pi_{Cu\,Bi} + \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_{Bi} - \sigma_{Cu})\, dT \qquad (5.15)$$

y como, en general,

$${}_{T_1}\Pi_{Cu\,Bi} \neq {}_{T_2}\Pi_{Cu\,Bi} \qquad \text{y} \qquad \sigma_{Bi} \neq \sigma_{Cu}$$

la ecuación 5.15 podrá dar un valor no nulo al que se da el nombre de *fem Seebeck* y el circuito considerado recibe el nombre de *par termoeléctrico* o termopar. Se comprende que en vez de utilizar Cu y Bi podían haberse utilizado otros dos metales cualesquiera. La fem Seebeck depende de éstos y de las temperaturas T_1 y T_2.

El termopar halla gran aplicación como termómetro para determinar temperaturas de hornos (p. ej.), en cuyo caso la soldadura fría se halla fuera del horno (puede introducirse en hielo fundente para mantenerla a 0°C) y la otra está en el interior del horno. Si el galvanómetro es de gran resistencia interna, puede dar con gran aproximación la fem Seebeck y a partir de ella conocer la temperatura del horno. Generalmente, el galvanómetro se calibra para leer en él, directamente, la temperatura.

Vemos, pues, que el termopar es un generador que convierte energía calorífica en eléctrica. Podemos asociar en serie varios termopares y llevar a una misma temperatura todas las soldaduras «frías» por una parte y a otra temperatura las demás en la forma indicada en la figura 5.17; de esta manera se

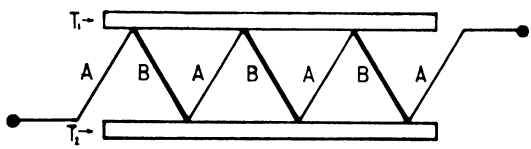


FIG. 5.17 Serie de termopares.

logra una fem más elevada. Ennegreciendo las soldaduras «calientes» se puede utilizar este dispositivo para medir la energía radiante que nos llegue de una estrella.

5.10 Teoría de las pilas; potencial de electrodo. Llamaremos pila a una asociación de conductores en serie, entre los cuales exista al menos un electrolito. En tal caso la suma de las ddp de contacto existentes en un circuito cuyos puntos estén todos a igual temperatura ya no es nula como en el caso en que todos los conductores fueran metálicos y el circuito será asiento de una corriente eléctrica. Este efecto fue descubierto por VOLTA, quien construyó la pila de su

nombre, constituida por una lámina de Zn y otra de Cu sumergidas en una solución diluida de SO_4H_2.

Para explicar la ddp entre un metal y un electrolito, WALTHER NERNST (1864-1941) ideó una teoría que vamos a resumir: Un metal (p. ej. Zn) sumergido en un electrolito cede iones metálicos positivos, con lo cual se carga negativamente, mientras el electrolito adquiere cargas positivas (las de los iones). Éstas crean un campo eléctrico dirigido del líquido al metal, lo que constituye una oposición a un nuevo desprendimiento de iones positivos. Cuando el número de iones en el líquido llega a un cierto valor se establece un equilibrio entre los iones desprendidos y los que regresan al metal por la acción del campo eléctrico antes mencionado. El metal ha adquirido un potencial negativo respecto a la solución, el cual permanece constante si no varía la temperatura y al que se denomina *potencial de electrodo*. Éste depende, a determinada temperatura, de la concentración de los iones en el electrolito que rodea al electrodo y será tanto mayor cuanto lo sea el número de iones que han emigrado del metal. El potencial de electrodo difiere de la ddp de contacto en que es un fenómeno de emigración iónica y no un fenómeno de tipo electrónico. Para medir el potencial de electrodo deberíamos medir la ddp entre el electrodo considerado y la solución. Como no existe ningún método práctico para efectuar dicha medida, se utilizan valores relativos a un electrodo tipo cuyo potencial se considera igual a cero. Como electrodo tipo se toma el *electrodo normal de hidrógeno*, consistente en un electrodo de platino con hidrógeno adsorbido al mismo tiempo que con hidrógeno gaseoso, introducido en una solución ácida que contenga una concentración normal de iones H^+ (un equivalente-gramo de H^+ por litro). En la siguiente tabla damos los potenciales relativos al electrodo tipo a 25°C de otros electrodos en una solución normal de sus respectivos iones:

Electrodo	*Potencial*, V
Na, Na^+	—2,712
Zn, Zn^{++}	—0,762
Fe, Fe^{++}	—0,440
Ni, Ni^{++}	—0,236
Pb, Pb^{++}	—0,126
H_2, H^+	0,000
Cu, Cu^{++}	0,340
Ag, Ag^+	0,7995
Au, Au^+	1,5

Consideremos el caso de dos metales introducidos en un electrolito, por ejemplo una placa de Fe y otra de Cu en una disolución de ácido sulfúrico. Dichos metales ceden iones hacia el electrolito hasta que se alcance el equilibrio entre los iones desprendidos y los que regresan al metal. Según la tabla anterior, vemos que el Fe adquiere un potencial negativo respecto al electrodo tipo, y el cobre un potencial positivo. De la tabla deducimos que al ceder iones a la disolución el Fe adquiere un potencial negativo mayor, en valor absoluto, al que adquiere el Cu; por tanto, el Cu se comportará respecto al Fe como positivo. Al unir exteriormente dichos electrodos con un hilo conductor en el cual hemos intercalado un galvanómetro, observaremos una corriente eléctrica dirigida exteriormente del Cu al Fe (según el sentido clásico de + a —); esto hace que el potencial negativo del Fe disminuya y el del Cu aumente, lo cual

implica una nueva emigración de iones del Fe al líquido, ya que el campo que se oponía a la cesión de iones ha disminuido; en el Cu, al contrario, al ser más negativo el campo aumenta y parte de los iones regresan al Cu, lo cual hace que se haga más positivo. El paso de cargas continuaría indefinidamente, pero la conducción dentro del electrolito hace que pasen iones Fe hacia la placa de Cu y se depositen sobre él, al mismo tiempo que va desapareciendo el electrodo de Fe por efecto del transporte de sus iones hacia la placa de Cu. Al mismo tiempo se depositan sobre el mismo Cu iones H, resultado de la electrolisis del SO_4H_2, todo lo cual origina un fenómeno que luego estudiaremos. Estos dos metales en la disolución ácida nos han dado origen a una pila o generador químico de corriente, lo cual anteriormente habíamos indicado como hecho experimental. La fuerza electromotriz de este generador depende de la naturaleza de los electrodos, de la concentración de iones a su alrededor y de la temperatura.

5.11 Polarización de los electrodos. En la pila que hemos citado antes vimos que al circular una corriente variaba la concentración iónica que rodea los electrodos aumentando el negativo y disminuyendo el positivo. Este efecto se acentúa al aumentar la densidad de la corriente, la cual depende, para una fuerza electromotriz dada, de la resistencia del circuito exterior (supuesta la interna constante) y de la superficie de los electrodos. Si continúa el proceso citado antes, al recubrirse la placa de Cu del Fe procedente de su correspondiente electrodo, disminuye la diferencia de potencial entre los electrodos. La presencia de burbujas de H alrededor del Cu es otra causa que disminuye la fuerza electromotriz de la pila por el hecho de originar una fuerza contraelectromotriz, según veremos luego. Todos estos efectos que reducen la fuerza electromotriz de la pila y aumentan la resistencia interna constituyen la *polarización de los electrodos,* hecho que según hemos dicho se patentiza más al aumentar la densidad de la corriente. Si el efecto de polarización es debido a la desigual distribución iónica, dejando la pila en circuito abierto durante un tiempo determinado, se reduce la polarización por la difusión de iones hacia las zonas de menor concentración. Si la polarización se debe a las burbujas, puede reducirse eliminando éstas todo lo posible con una sustancia despolarizante (en algunos casos MnO_2) que reaccione con el hidrógeno produciendo agua.

Hemos dicho que las burbujas de hidrógeno producen una fcem. En efecto: al iniciarse el paso de corriente en la electrolisis del agua acidulada con SO_4H_2, los cationes $2\,H^+$ se dirigen al cátodo y los aniones $SO_4^=$ hacia el ánodo. Al llegar al cátodo los primeros se descargan y se desprende H_2, que queda rodeando al electrodo correspondiente; los segundos, al llegar al ánodo y perder la carga reaccionan con el agua, regeneran el ácido y se desprende oxígeno que queda rodeando al ánodo. Para iniciar este proceso hace falta una ddp determinada y para continuar el proceso hay que vencer una fcem, pues en este caso el recipiente donde se produce la electrolisis consume la energía eléctrica utilizada en los procesos químicos que tienen lugar en el fenómeno estudiado. La fcem en el caso anterior es de 1,5 V, lo cual explica el hecho experimental de que para lograr la electrolisis del agua acidulada con SO_4H_2 hay que aplicar a los electrodos una ddp superior a 1,5 V.

Ejemplo. Determinar la fcem de un voltámetro de agua acidulada sabiendo que para convertir 1 mol de agua líquida en oxígeno e hidrógeno se necesitan 68 000 calorías.

1 mol de agua contiene 2 g de hidrógeno.

Según la ley de Faraday (cfr. § 5.5):

$$2 = \frac{1}{96\,500} I t \qquad \text{o sea} \qquad I t = 2 \times 96\,500$$

La energía absorbida es

$$\mathcal{E}' I t = 4{,}18 \times 68\,000$$

luego

$$\mathcal{E}' = \frac{4{,}18 \times 68\,000}{2 \times 96\,500} \simeq 1{,}5 \text{ V}$$

5.12 Acumulador de plomo. Este acumulador consta de dos placas de plomo sumergidas en una solución de SO_4H_2 (fig. 5.18). Si hacemos circular una corriente estableciendo previamente una ddp entre dichos electrodos, por efecto de la electrolisis se verificará la siguiente reacción:

$$Pb + SO_4H_2 + 2\,H_2O + Pb \rightarrow PbO_2 + SO_4H_2 + Pb + H_2$$

quedando formada la pila

$$+ PbO_2 \text{ —— } SO_4H_2 \text{ —— } Pb^-$$

para que la descarga sea eficaz, la superficie del electrodo de plomo debe ser grande, para lo cual se construye con un enrejado de plomo con polvo de plomo metálico.

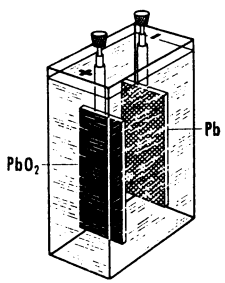


FIG. 5.18 Acumulador de plomo.

Cuando el acumulador está cargado, el electrodo recubierto de PbO_2 tiene un color chocolate; la densidad del electrolito ha aumentado hasta un valor de 1,3 g/cm³.

Durante la descarga se verifica la siguiente reacción:

$$\underset{\text{Ánodo}}{PbO_2} + 2\,SO_4H_2 + \underset{\text{Cátodo}}{Pb} \rightarrow \underset{\text{Ánodo}}{PbSO_4} + 2\,H_2O + \underset{\text{Cátodo}}{PbSO_4}$$

Se ha formado sulfato de plomo en ambos electrodos. Al recargar el acumulador, la reacción tiene lugar en sentido inverso y los electrodos pasan a su estado inicial.

Al descargarse el acumulador la densidad del electrolito disminuye, pues desaparece ácido para formar sulfato.

La densidad no debe ser inferior a 1,15 g/cm³, pues si se forma más sulfato (y por tanto mayor disminución de la densidad) se produce una forma de sulfato insoluble que en una nueva carga no regeneraría el primitivo electrodo; el acumulador se dice que se ha *sulfatado* y pierde *capacidad de carga.*

La capacidad de carga de un acumulador es la cantidad de electricidad que puede suministrar en su descarga. Se acostumbra medir en la práctica en ampère·hora = 3600 C. Dicha capacidad depende de la masa y calidad de los electrodos y va de 20 a 25 A·h/kg.

El rendimiento en cantidad ρ_c de un acumulador es la razón de la carga eléctrica cedida en la descarga a la adquirida en su proceso de carga. El rendimiento energético ρ es igual a la razón de la energía proporcionada por el acumulador durante su descarga a la energía que se le ha suministrado durante su carga.

Siendo $\mathcal{E}$ la fem en la descarga, r su resistencia interna, $\mathcal{E}'$ la fcem, I_1 e I_2 las intensidades de las corrientes de carga y descarga, t_1 y t_2 los tiempos de carga y descarga

$$\rho = \frac{(\mathcal{E} I_2 - r I_2^2) t_2}{(\mathcal{E}' I_1 + r I_1^2) t_1} = \frac{(\mathcal{E} - r I_2) Q_2}{(\mathcal{E}' + r I_1) Q_1} = \frac{\mathcal{E} - r I_2}{\mathcal{E}' + r I_1} \rho_c$$

Si $\rho_c = 1$,

$$\rho = \frac{\mathcal{E} - r I_2}{\mathcal{E}' + r I_1}; \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}' \simeq 2 \text{ V}$$

luego, siempre $\rho < 1$. Por lo general, r es muy pequeña, pero aumenta mucho con la sulfatación debida a la descarga de excesiva duración; entonces disminuye el rendimiento. En la práctica, los acumuladores se conectan en serie de 3 ó 6 elementos, dando lugar a baterías de 6 y 12 V, respectivamente.

5.13 Pilas de combustible. Las pilas eléctricas presentan el inconveniente de ir agotando las sustancias cuyas reacciones dan origen a la corriente eléctrica. Por otra parte, la obtención de energía eléctrica a partir de energía química liberada en una combustión en la que podamos ir suministrando combustible de una manera continua exige la presencia de una máquina térmica, la cual tendrá siempre un rendimiento muy bajo. Por ello, se estudia la posibilidad de transformar el poder energético de los combustibles en energía eléctrica, sin

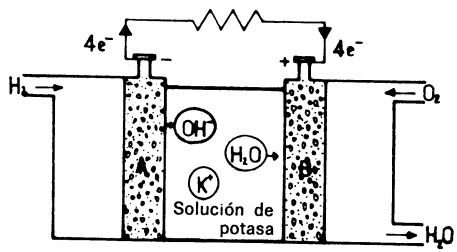


FIG. 5.19 Pila de combustible.

pasar por la fase de energía térmica. A tal fin se han ideado dispositivos muy variados conocidos con el nombre de *pilas de combustible* en las que no se gasta electrolito y que están aún en fase de desarrollo.

Para comprender el principio de su funcionamiento, describiremos de manera esquemática el funcionamiento de una pila cuyo combustible es H_2. Consta de dos electrodos *A* y *B* que pueden ser metálicos y porosos de manera que a través de *A* pueda circular una corriente de H_2 y a través de *B* una de O_2 (aire). El electrolito supondremos es una solución de potasa cáustica al 35 %. La reacción en el electrodo *A* será

$$2\,H_2 + 4\,OH^- \rightarrow 4\,H_2O + 4\,e^- \qquad (5.16)$$

donde los iones OH^- se toman de la solución y el H_2 es el combustible que se suministra desde el exterior. Los cuatro electrones liberados llegan al electrodo *B* a través del circuito exterior y junto con el oxígeno suministrado a *B* y el agua de la solución dan

$$2\,O_2 + 2\,H_2O + 4\,e^- \rightarrow 4\,OH^- + O_2 \qquad (5.17)$$

Vemos, pues, que los cuatro iones OH^- desaparecidos en *A* reaparecen en *B*, por lo que el electrolito no se altera. Comparando las ecuaciones 5.16 y 5.17 vemos que el resultado total se reduce a haber consumido dos moléculas de H_2 en *A* y una de O_2 en *B*, formándose en total dos moléculas de agua que hay que eliminar. Es interesante señalar que con combustible H_2 se han alcanzado rendimientos del orden de 80-90 %.

Ciertas pilas tienen electrolito sólido, como la pila Davtyan en la que es una mezcla de carbonato y silicato sódicos y los electrodos son de hierro, uno de ellos con Fe_2O_3, Fe y arcilla como materiales activantes y gas de gasógeno como combustible, mientras que el electrodo de aire contiene Fe_2O_3, Fe_3O_4 y arcilla. Esta pila funciona a temperaturas entre 550-900°C.

5.14 Conducción en gases. El mecanismo de la conducción descrito en § 4.2 es totalmente general y lo hemos aplicado ya a la conducción en sólidos y en líquidos. En estos últimos, así como en los semiconductores, intervenían dos tipos de portadores y algo análogo sucede en los gases, en los cuales podemos encontrar también iones de ambos signos. No obstante, podemos apreciar una diferencia importante al comparar un gas con un electrolito y es que el número de iones existentes en un gas antes de iniciarse el proceso de conducción, suele ser muy pequeño. Éstos pueden deberse a la acción de los rayos cósmicos, de rayos X o de otros tipos de radiaciones cuya interacción con un átomo es similar al choque de un corpúsculo (fotón) contra él. En dicho choque, el corpúsculo puede ocurrir que ceda al átomo una energía igual o mayor que la diferencia de energías entre el nivel energético superior del átomo y el nivel cero de energía potencial (fig. 5.1), con lo que el electrón más energético escaparía del átomo y éste se convertiría en ion positivo.

Para fijar ideas imaginemos el gas contenido en un tubo de vidrio (fig. 5.20) en el que se han introducido un ánodo *A* y un cátodo *K* metálicos y que tiene una tubuladura lateral *T* por la que pueda extraerse el gas, cuando convenga, mediante una bomba de

vacío. Primeramente, consideremos el gas en condiciones normales. El campo eléctrico **E** acelera los iones, que son muy escasos. Ahora bien, sabemos que para el aire en condiciones normales el recorrido libre medio L (cfr. § 18.8, p. 359, tomo I) es del orden de 10^{-7} m para sus moléculas y por tanto para sus iones positivos. El de los electrones resulta ser unas cinco veces mayor, lo que significa que la

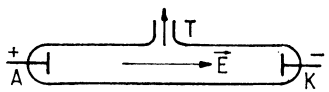


FIG. 20 Conducción a través de un gas.

energía media ganada por unos y otros entre choques, $e\,E\,L$, será muy pequeña si E no es demasiado grande (inferior a los $3 \cdot 10^6$ V/m). En los choques de los iones con las moléculas, los positivos pierden aproximadamente la mitad de su energía cinética, por ser comparables las masas de los cuerpos en colisión. Los electrones es diferente. Puede ocurrir que choquen elásticamente y conserven prácticamente toda su energía cinética por ser su masa miles de veces menor que la de las moléculas con que chocan. Pero puede también ocurrir que cedan a la molécula una energía suficiente para que uno de sus electrones pase a un nivel energético superior. En tal caso, se dice que el átomo está *excitado*; como sigue neutro, el campo eléctrico no ejerce fuerza resultante sobre él y el electrón incidente habrá perdido una energía considerable.

Ahora bien, el recorrido libre medio es un valor estadístico y por tanto algunos electrones podrán recorrer una larga distancia sin chocar adquiriendo una gran energía. Cuando por fin choquen, podrán comunicar una energía suficiente para arrancar un electrón de la molécula alcanzada con lo que ésta se ioniza y tenemos nuevos portadores (el ion positivo y el electrón que ha perdido). Este fenómeno se denomina *ionización por choque*. Junto a este fenómeno tenemos el de la recombinación de iones positivos con electrones y la consiguiente pérdida de portadores.

Se comprende que la movilidad de los iones positivos (ec. 5.4) será mucho menor que la de los electrones, por lo que éstos serán agentes ionizantes mucho más eficaces que los iones positivos, si bien una pequeñísima fracción del número de éstos podrá ionizar por choque. No obstante, si el gas está en condiciones normales dicha ionización será despreciable a menos que el campo **E** tenga valores muy elevados. Aumentando éste podría lograrse que la ionización por choque se produjera en cadena, es decir, que antes de que se

recombinaran los electrones producidos por ionización, éstos produjeran nuevas ionizaciones. Al moverse los electrones bajo la acción del campo, pasan de unos puntos a otros de potencial más elevado y la ddp V_i que da a un electrón la energía suficiente para ionizar un átomo del gas, recibe el nombre de *potencial de ionización* de éste. Se comprende que depende del gas de que se trate.

Si la tubuladura T (fig. 5.20) se conecta a una bomba de vacío, podremos reducir la presión del gas a voluntad. Con ello disminuimos el número N de moléculas por unidad de volumen y por tanto aumentamos el recorrido libre medio L (cfr. ec. 18.26, p. 358, tomo I). Esto hace que sean ya muchos los electrones que puedan alcanzar la energía de ionización $e\,V_i$ y se desencadena el proceso de ionización por choque y la *descarga disruptiva* entre los electrodos A y K.

Los átomos excitados ya hemos dicho que son neutros y por tanto no contribuyen directamente a la conducción. Ahora bien, al cabo de un tiempo vuelven a un nivel energético inferior emitiendo un fotón que transporta la energía en exceso que adquirió el átomo al excitarse. Este fotón puede ser absorbido por otro átomo, tal como dijimos antes, que se excitaría de igual manera. Pero si lo que tuviéramos fuera una mezcla de gases, la energía del fotón podría ser suficiente para ionizar un átomo de otro de los gases de la mezcla cuyo potencial de ionización sea inferior al de excitación del otro. Además, los fotones pueden ionizar varias capas e incluso dar su energía al cátodo K arrancándole un electrón si la energía de uno de ellos es superior a la energía de extracción (W en fig. 5.4 *c*). En el caso de la mezcla de gases, las sumas de las ecuaciones 4.5-4.10 bis tendrían tres o más términos.

Con instrumentos de medida adecuados, podemos determinar simultáneamente la ddp entre los electrodos K y A del tubo de la figura 5.20 y la intensidad de la corriente que circule por él, lo que nos permitirá trazar la gráfica de la figura 5.21 En ella podemos apreciar tres tramos de características diferentes: En el tramo OA, al aumentar la ddp aumenta la intensidad de la corriente, porque el campo **E** es más intenso y son mayores las fuerzas que se ejercen sobre los portadores, con lo que aumenta el número de éstos que llegan a los electrodos. El punto A corresponde al estado en que llegan por unidad de tiempo tantos iones como se generan por acción de los agentes ionizantes exteriores. Como éstos son independientes de la ddp aplicada y de la corriente (se trata de una descarga que no puede mantenerse por sí misma), al aumentar más la ddp no pueden llegar más iones a los electrodos, por lo que la intensidad de la corriente se mantiene constante (tramo AB). El punto B corres-

ponde a una ddp suficientemente grande para que muchos electrones adquieran suficiente energía para ionizar átomos neutros por choque y cuando la ddp supera la correspondiente al punto *C*, la ionización puede proseguir sin necesidad de que existan agentes ionizantes exteriores. La descarga se automantiene mientras la ddp sea superior a la correspondiente al punto *C*, a la que se da el nombre de *tensión disruptiva* y a la chispa que salta para dicha tensión se

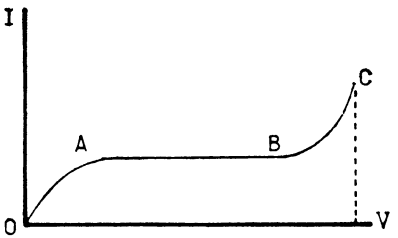


FIG. 5.21 Gráfica de la intensidad de la corriente que circula por el gas del tubo de fig. 5.20 en función de la *ddp* aplicada a éste.

le da el nombre de *descarga disruptiva*. El tramo *BC* no corresponde a una descarga automantenida, pues la ionización por choque no es suficiente para ello. Si en uno de sus puntos se suprimieran los agentes ionizantes exteriores, cesaría la conducción. La corriente en este tramo se denomina *descarga de Townsend*.

5.15 Descarga luminosa. De todo lo anterior resulta que si al tubo de la figura 5.20 aplicamos una ddp no muy elevada, la descarga disruptiva no tendrá lugar hasta que la presión del gas alcance un valor suficientemente bajo. Entonces, aparecerán unos efluvios luminosos tenues que, si seguimos disminuyendo la presión, se combinarán formando una columna luminosa ancha que hará que el tubo se llene de luz. Disminuyendo aún más la presión, esta columna se descompone en zonas luminosas y oscuras, de la siguiente manera: Inmediata al cátodo tenemos una zona oscura llamada de Aston (1 en fig. 5.22) seguida de la luminosidad catódica (2) y del espacio oscuro de Crookes (3) que termina en la luminosidad negativa (4) tras la que se halla el espacio oscuro de Faraday (5) al que sigue una región luminosa estriada llamada columna positiva (6) que ocupa la mayor parte del tubo y se termina con una zona más brillante llamada luminosidad anódica (7) separada del ánodo por un estrecho espacio oscuro anódico (8). La luz observada se debe a la energía eléctrica que se convierte en energía radiante cuando se recombinan los iones para formar átomos o moléculas normales.

Si disminuyéramos mucho la presión veríamos cómo aumentaría el espacio oscuro de Crookes hasta ocupar todo el tubo. Ello se debería a que la mayoría de iones atravesarían todo el tubo sin chocar con ninguna molécula, con lo que se formarían pocos iones y se debilitaría la descarga. La tensión necesaria para mantenerla sería mayor pero, a un vacío muy elevado, la descarga sería muy difícil de lograr.

La descarga automantenida puede regularse mediante una resistencia variable en serie con el generador (fig. 5.22). Variándola se puede gobernar la intensidad de la corriente que circula por el gas.

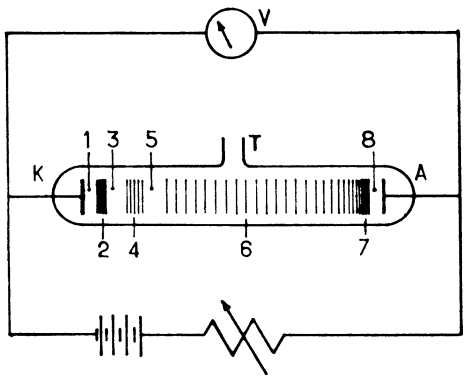


FIG. 5.22 Descarga luminosa.

Midiendo entonces la ddp V entre los electrodos K y A, podremos dibujar la gráfica de la figura 5.23, en donde el tramo ABC es el ya estudiado en § 5.14 (fig. 5.21). Vemos que al iniciarse la descarga disruptiva, la tensión baja del valor correspondiente al punto C al correspondiente al D, debido al aumento del número de portadores a causa de la ionización por choque, lo cual hace al gas mejor conductor y por ello es menor la caída de tensión en él al circular una corriente. Variando la intensidad de ésta no se observa variación en dicha caída de tensión (tramo DE) porque la luz no cubre todo el cátodo sino que varía el área de éste al que llegan los iones de manera que se mantenga constante la densidad de corriente $\mathbf{J}$. Ello hace que no varíe $\mathbf{E}$ (cfr. ec. 4.11) y por tanto tampoco la ddp que es la circulación de $\mathbf{E}$. Se dice, en estas condiciones, que la descarga es *luminosa normal*. Cuando queda totalmente cubierta la superficie del cátodo, cualquier aumento de la intensidad de la corriente I aumentará $J = I/S$ ya que no puede aumentar la superficie S

del cátodo sobre la que se distribuye la corriente. Este aumento de J aumenta la ddp y la descarga se llama *luminosa anormal* (tramo EF).

Cuando la intensidad de la corriente se hace muy grande, el bombardeo del cátodo por los iones positivos eleva mucho la temperatura y ello hace que dicho cátodo emita electrones por efecto termoió-

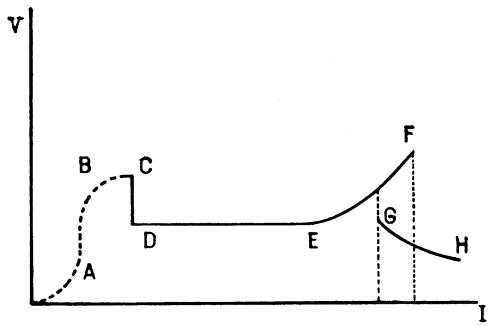


FIG. 5.23 Característica tensión-intensidad de una descarga luminosa.

nico (§ 11.1) aumentando mucho J, lo cual aumenta a su vez el calentamiento y ello origina una fusión parcial de los electrodos que escupen fragmentos metálicos. Con ello aumenta mucho la conductibilidad y disminuye la ddp al intensificarse la corriente (tramo GH). La descarga recibe entonces el nombre de *arco*. La intensidad de transición de descarga luminosa anormal a arco no está definida; puede ser uno cualquiera de los valores comprendidos entre las intensidades correspondientes a los puntos G y F.

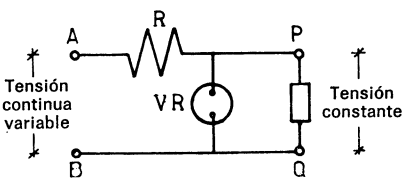


FIG. 5.24. Regulación de la tensión.

El hecho de que la ddp entre los extremos del tubo se mantenga prácticamente constante para amplias variaciones de la intensidad de corriente se aprovecha en las *válvulas reguladoras de tensión* (VR) las cuales son tubos de gas que se instalan en la forma indicada en la figura 5.24. La tensión entre A y B puede variar, por ejemplo, por-

que varíe la intensidad que circula por la carga conectada entre P y Q (cfr. ec. 4.26). La resistencia R tiene por misión que la corriente que circula por VR tenga una intensidad correspondiente a la descarga luminosa normal (tramo DE, fig. 5.23). Al variar la intensidad entre los límites D y E, la ddp aplicada a la carga se mantendrá constantemente igual al valor correspondiente al tramo DE.

6

Campo magnético

Desde muy antiguo se conoce la propiedad de la *magnetita* o piedra imán (Fe_3O_4) de atraer al hierro, y ya a principios de la Edad Media se aprovechó para construir brújulas que ayudaran a la navegación. En el año 1600, GILBERT publica su obra *De Magnete,* en la que establece la existencia de los *polos de un imán* y presenta la teoría de que la Tierra es un gigantesco imán cuya acción sobre la magnetita la obliga a orientarse en la dirección N-S.

Entre 1780 y 1820 se realizan grandes progresos en el conocimiento de los fenómenos estáticos eléctricos y magnéticos, entre los que cabe señalar las contribuciones de HENRY CAVENDISH (1731-1810) y COULOMB, que llevaron a formular la ley de la fuerza electrostática inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (ec. 1.3), y el propio COULOMB, experimentando con imanes largos (de unos 60 cm) a fin de reducir todo lo posible la influencia de los polos alejados, enuncia para el magnetismo una ley formalmente igual a la ecuación 1.3, en la que la constante de proporcionalidad la hace igual a 1 y las cargas eléctricas están sustituidas por las *masas magnéticas* de los polos en presencia. Ello parecía señalar un paralelismo entre los fenómenos de la Electrostática y los de las fuerzas ejercidas por los imanes, pero no pudo hallarse ninguna relación entre ellos. Se llegó a acercar una brújula a los polos de una pila e incluso se colocó una pila sobre un disco flotante que pudiera girar libremente y se la sometió a un campo magnético, para ver si la pila sufría algún efecto por parte de éste. Como ninguno de los experimentos dio resultado positivo, se creyó que la Electricidad y el Magnetismo no tenían ninguna relación entre sí, pero se siguió el paralelismo que indicaban las leyes de Coulomb.

En 1820, el físico danés HANS CHRISTIAN OERSTED (1777-1851) observa que al colocar una aguja imanada en la proximidad de un conductor rectilíneo recorrido por una corriente, aquélla tiende a colo-

carse perpendicular al conductor y que al invertir el sentido de la corriente, la aguja gira 180° (fig. 6.1). Este experimento fue presenciado por DOMINIQUE FRANÇOIS JEAN ARAGO (1786-1853) en Ginebra y lo comunicó a la Académie des Sciences de París, impresionando

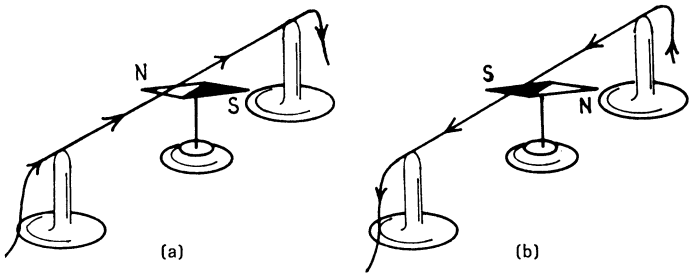


FIG. 6.1 Experimento de Oersted.

fuertemente dicha descripción a ANDRÉ MARIE AMPÈRE (1775-1836), quien deduce de ello que las acciones magnéticas se deben *al movimiento* de la electricidad, con lo que establece la relación entre Electricidad y Magnetismo, echando los cimientos de la Electrodinámica. Deduce también del experimento de Oersted que dos corrientes cerradas deben ejercerse acciones mutuas, y precisa la ley de esta acción. Llega a indicar AMPÈRE que las acciones de los imanes han de deberse a corrientes cerradas existentes en la masa de la sustancia imanada. Maravilla pensar que en aquella época pudiera preconizarse la moderna teoría electrónica de la materia ¡cuando aún se ignoraba la existencia del electrón! Rechaza la falsa analogía entre carga eléctrica, que es una realidad física, y la masa magnética inexistente, ficticia, que sólo hay que considerar como artificio para el estudio de las acciones magnéticas que el imán ejerce a su alrededor. En 1822 idea el solenoide, con lo que materializa sus ideas acerca de la rela-

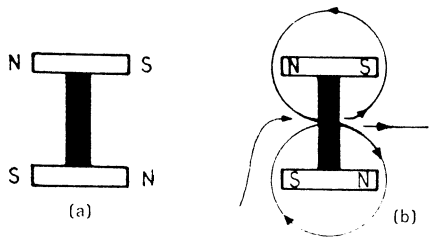


FIG. 6.2 *a*) Par astático y. *b*) principio del galvanómetro de Ampère.

ción entre el magnetismo de los imanes y las acciones magnéticas de las corrientes eléctricas. Ayudado por ARAGO, construye el primer electroimán, y montando sobre un mismo eje dos imanes iguales con los polos invertidos constituye el *par astático* (fig. 6.2 *a*), que no se verá afectado por el magnetismo terrestre (por ejercer acciones opuestas sobre sus dos partes) pero que puede permitir la medida de la intensidad de la corriente haciéndola circular por dos bobinas arrolladas en sentidos opuestos sobre dicho par, con lo que sus efectos se suman. Da, pues, el principio del galvanómetro. La obra de AMPÈRE debe considerarse como un hito fundamental en el desarrollo de la Ciencia.

6.1 Acción mutua de dos corrientes paralelas. Si por dos conductores rectilíneos paralelos circulan dos corrientes de intensidades I_1 e I_2, podemos observar que ambas corrientes se atraen, cuando son de igual sentido, o se repelen, cuando son de sentidos opuestos, con una fuerza que, por unidad de longitud, es proporcional a las intensidades I_1 e I_2 e inversamente proporcional a la distancia que separa las corrientes. Esto es debido al *movimiento* de las cargas, como puede comprenderse del hecho de que la fuerza atractiva se convierte en repulsiva al invertir el sentido de una de las corrientes. El fenómeno puede considerarse descompuesto en dos: 1.°, campo creado por la corriente de intensidad I_1, y 2.°, acción de este campo sobre la corriente de intensidad I_2. Esta acción sería la que colocara perpendicularmente a la corriente I_1 la aguja magnética del experimento de Oersted colocada en lugar de la corriente I_2. Por ello, la fuerza recibe el nombre de magnética, y el campo creado por la corriente recibe el nombre de *campo magnético.*

La fuerza de un campo magnético sobre una corriente se ejerce sobre cada uno de los portadores que la integran y ello nos indica que, en el caso antes mencionado, la fuerza magnética sobre cada carga móvil es perpendicular a la velocidad de ésta.

6.2 Campo magnético de inducción. Un sistema de corrientes creará un campo magnético resultante de componer los creados por cada una de ellas. Si por un punto del campo lanzamos una carga puntual q con velocidad $\mathbf{v}$, acabamos de razonar que se hallará sometida a una fuerza $\mathbf{F}$ perpendicular a $\mathbf{v}$. Si volvemos a lanzar q por el mismo punto *con la misma celeridad* en distintas direcciones, todas ellas perpendiculares a $\mathbf{F}$, observaremos siempre fuerzas de igual dirección, cuyos valores estarán comprendidos entre 0 cuando

v tenga una cierta dirección, y un valor máximo cuando v tenga dirección perpendicular a la anterior.

Lancemos ahora, en esta dirección a la que corresponde fuerza máxima, cargas diferentes con celeridades diferentes, y observaremos que la fuerza tiene un valor proporcional a la carga q y a la celeridad v. Por tanto,

$$F = B\,q\,v \tag{6.1}$$

El coeficiente de proporcionalidad B depende del punto considerado y nos mide el *campo magnético de inducción,* o inducción magnética, en el punto considerado.

Podríamos considerar en tal punto un vector **B** de módulo B e igual dirección que la velocidad **v** de una carga positiva q en dicho punto

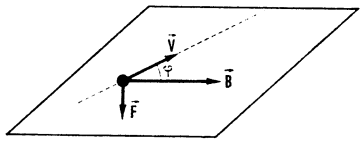


FIG. 6.3 Campo magnético de inducción.

a la que correspondiera fuerza nula. Dándole el sentido adecuado, podríamos comprobar que cuando **v** formara con **B** un ángulo φ (fig. 6.3) la fuerza ejercida sobre la carga vendría dada por

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \tag{6.2}$$

Es decir, si $\mathbf{B}_\perp$ es un vector perpendicular a **v** en el plano normal a **F**, la ecuación 6.2 podría escribirse

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_\perp \tag{6.3}$$

donde los tres vectores son mutuamente ortogonales. **B** es el *campo magnético de inducción* en el punto considerado, y de lo visto se deduce que

$$B = \frac{F}{q\,v\ \text{sen}\ \varphi}$$

Sus dimensiones serán, en el sistema giorgi,

$$[B] = \frac{[F]}{Q\,[v]} = M\,T^{-1}\,Q^{-1}$$

y su unidad giorgi, el *tesla* (T) será el campo magnético existente en un punto tal que al pasar por él una carga de 1 C perpendicularmente al campo con una velocidad de 1 m/s se halla sometida a una fuerza de 1 N.

El flujo de este campo a través de una superficie (cfr. § 3.5, p. 33, tomo I) recibe el nombre de *flujo de inducción magnética.* Su unidad giorgi es el *weber* (Wb) que es igual al flujo que atraviesa una superficie de 1 m^2 colocada normalmente a un campo magnético uniforme de 1 T.

Como

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \times 1 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$$

por lo que al campo magnético de inducción se le llama también *densidad de flujo.* Las dimensiones del flujo son

$$[\Phi] = M\,T^{-1}\,Q^{-1}\,L^2 = \frac{M\,L^2\,T^{-2}}{Q\,T^{-1}}$$

o sea las de una energía dividida por una intensidad de corriente. Luego, 1 Wb = 1 J/1 A.

6.3 Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético uniforme. Consideremos una partícula de masa m y carga eléctrica q que, en un instante dado, se mueve con velocidad **v** perpendicularmente a un campo magnético de inducción **B.** En la figura 6.4 se ha representado éste «saliendo» del papel. La carga q se supone positiva (si fuera negativa la fuerza sería la opuesta). Como en virtud de la ecuación 6.2, la fuerza **F** es perpendicular siempre al camino, su trabajo será nulo y la energía cinética de la partícula sobre la cual actúa se mantendrá constante (cfr. § 7.5, p. 94, tomo I), por lo que será constante su celeridad v. Por tanto, la fuerza es siempre normal y de módulo constante $F = q\,v\,B$. Por tanto, la aceleración también lo será y el movimiento será circular uniforme (cfr. § 4.5, p. 48, tomo I). La fuerza que origina dicho movimiento es la fuerza centrípeta, por lo que podemos escribir

$$F = q\,v\,B = m\frac{v^2}{r}$$

donde r es el radio de la trayectoria. Despejándolo queda

$$r = \frac{m}{q\,B}\,v \tag{6.4}$$

y el período de revolución será

$$T = \frac{2\,\pi\,r}{v} = 2\,\pi\,\frac{m}{q\,B} \tag{6.5}$$

que es independiente de la celeridad v.

Si la velocidad de la carga no fuera perpendicular a **B**, podríamos descomponerla en una velocidad **u** paralela a **B** y otra **v** perpendicular. Ésta da origen al movimiento circular ya estudiado, mientras que **u** permanece invariable pues la componente de la fuerza en su dirección es nula en virtud de la ecuación 6.3. Por tanto, la partícula describirá una hélice (cfr. § 5.3, tomo I) de paso

$$h = u\,T = 2\,\pi\,\frac{m}{q\,B}\,u$$

y eje paralelo al campo **B**.

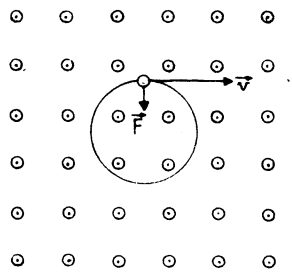


FIG. 6.4 Movimiento de una carga en un campo magnético uniforme.

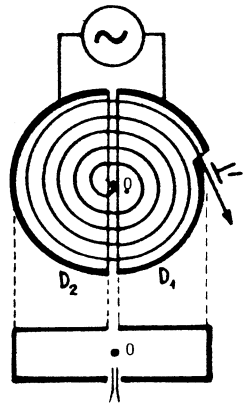


FIG. 6.5 Ciclotrón

6.4 Ciclotrón. Una interesante aplicación de lo anterior la tenemos en el *ciclotrón* inventado en 1931 por ERNEST ORLANDO LAWRENCE (n. 1901), que permite acelerar partículas cargadas por el procedimiento que se describe a continuación.

Dos electrodos D_1 y D_2 metálicos (fig. 6.5) en forma de D constituyen un cilindro hueco achatado con un entrehierro entre ambos en el cual se encuen-

tra la salida O de una fuente de iones (protones, deuterones, partículas α, etc.). A dichos electrodos se les llama las «des del ciclotrón». Entre ellos se aplica una ddp mediante un oscilador (parte superior de fig. 6.5) que invierte periódicamente la polaridad de las des y normalmente a éstas hay aplicado un campo magnético constante **B**.

El ión que sale por O se encuentra sometido al campo eléctrico existente entre las des y es arrastrado hacia el interior de una de ellas sin que haya obstáculo para ello (parte inferior de fig. 6.5), pues el conjunto de las des se halla en un recinto en el que se ha practicado un vacío elevado. Al penetrar en D_1, como es un volumen equipotencial, el campo eléctrico se anula y sólo habrá campo magnético. El ion habrá llegado con cierta celeridad y recorrerá una trayectoria circular de radio dado por la ecuación 6.4 llegando al cabo de un tiempo

$$\frac{T}{2} = \pi \frac{m}{q\,B}$$

al borde de D_1. En este tiempo se ha invertido la polaridad y el campo eléctrico entre las des arrastra al ion hacia D_2 comunicándole una energía cinética igual a $q\,V$, siendo V la ddp entre las dés (cfr. ec. 2.22). Llega, pues, a D_2 con mayor celeridad de la que tenía en D_1 y describirá una nueva semicircunferencia de radio mayor (ec. 6.4) en el mismo tiempo $T/2$ que es independiente de v. Se encuentra ahora el ion en el borde de D_2 habiéndose invertido de nuevo la polaridad, sufre un nuevo incremento de energía cinética $q\,V$ al pasar a D_1, etc. Al cabo de n pasos de una D a otra, su energía cinética habrá aumentado en $n\,q\,V$, el radio será grande y la partícula saldrá de las dés habiendo adquirido una energía elevada.

Obsérvese que el campo magnético establece un período propio del sistema dado por la ecuación 6.5 y que al aplicar un campo eléctrico de igual período, lo que hacemos es provocar un fenómeno de resonancia (cfr. § 10.10, pág. 175, tomo I). Al recíproco del período T dado por la ecuación 6.5 se le da el nombre de *frecuencia ciclotrónica.*

La máxima energía que se puede dar a los protones con un ciclotrón es de unos 10 MeV (cfr. final § 2.14) debido a que la celeridad del protón ya supera a la décima parte de la de la luz y su masa no puede considerarse ya constante según indica la teoría de la Relatividad einsteiniana, según la cual dicha *masa* vale

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{6.6}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula y c la celeridad de la luz. Al ir aumentando v, pues, aumenta m y con ello T y se perdería el efecto de resonancia, a menos que se hiciera variar adecuadamente el período del oscilador eléctrico. Éste es el principio del *sincrociclotrón* que es un ciclotrón en el cual se inyectan iones en O durante un tiempo corto y el período del oscilador se mantiene constante hasta que las masas de los iones empiezan a crecer. Entonces, aumenta el período de oscilación gradualmente hasta que los iones alcancen la salida, en cuyo momento se inyecta un nuevo grupo de iones, se restaura el período inicial del oscilador y se repite el proceso. De esta manera se puede comunicar a los protones energías de varios centenares de MeV.

Con el ciclotrón simple pueden obtenerse energías mayores de 10 MeV utilizando partículas más pesadas, tales como deuterones, tritones, partículas α, etc.

En cambio, no es eficaz para acelerar electrones porque, a causa de su poca masa alcanzan velocidades próximas a la de la luz para energías del orden de los 3000 eV.

6.5 Carga específica del electrón. En 1897, el físico inglés SIR JOSEPH JOHN THOMSON (1856-1940) midió por primera vez la carga específica q/m del electrón. Podemos esquematizar el método de la manera siguiente: Disponemos de un *tubo de rayos catódicos* (figura 6.6) consistente en un tubo de vidrio en el que se ha practicado un vacío elevado y que contiene un cañón de electrones K, análogo

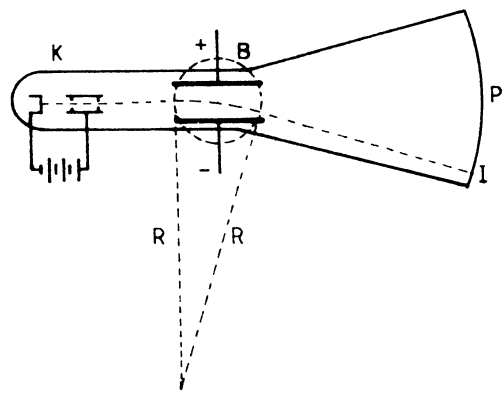


FIG. 6.6 Método de J. J. THOMSON para la determinación de e/m.

al de la figura 2.15, que dispara electrones en forma de rayo catódico con una celeridad v determinada. Estos electrones alcanzan la zona limitada por un círculo en la figura 6.6, en la que existe un campo magnético **B** normal al papel que obliga a los electrones a describir un arco de circunferencia de radio $R = (m\,v/e\,B)$, donde e es la carga del electrón y m su masa (cfr. ec. 6.4). Al salir los electrones del campo magnético no se hallan sometidos a fuerza alguna, por lo que siguen con movimiento rectilíneo y uniforme hasta *incidir* en el punto I de la pantalla P que, por ser fluorescente, mostrará en I un punto luminoso.

Aplicando a las placas existentes en la región del campo magnético una ddp de la polaridad indicada, entre ellas aparecerá un campo eléctrico uniforme **E** que ejercerá sobre los electrones una fuerza que podemos ajustar para que en cada punto equilibre a la que les ejerce el campo magnético **B**. Es decir, deberá ser

$$e\,E = e\,v\,B \quad \text{o sea} \quad v = \frac{E}{B} \tag{6.7}$$

con ello logramos que la fuerza resultante sobre cada electrón sea nula, por lo que su movimiento será rectilíneo y uniforme, incidiendo en el centro de la pantalla.

La posición del punto I nos permite determinar R por consideraciones geométricas y la medida de E y B nos permite determinar v. Sustituyendo la ecuación 6.7 en la expresión de R queda

$$R = \frac{m}{e}\,\frac{E}{B^2} \quad \text{o sea} \quad \frac{e}{m} = \frac{E}{R\,B^2}$$

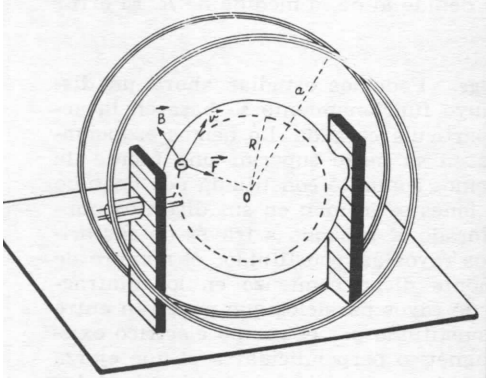
en cuyo segundo miembro todas las cantidades son conocidas. El valor de la *carga específica* e/m aceptado actualmente es

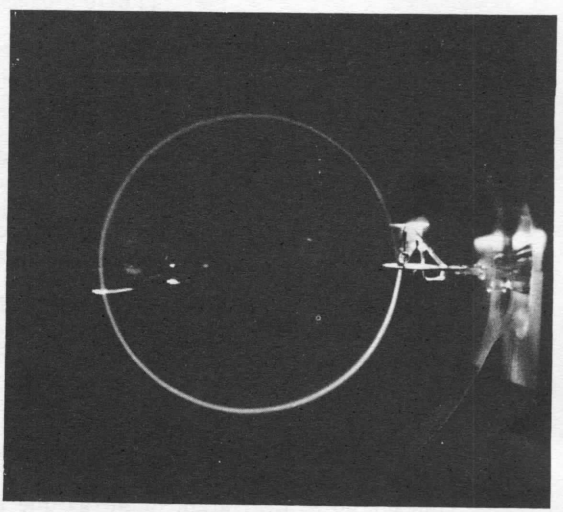
$$e/m = 1{,}758796 \times 10^{11}\ \mathrm{C \cdot kg^{-1}}$$

Medida de e/m a partir de la trayectoria descrita por los electrones que se mueven en un campo magnético uniforme perpendicular a la dirección inicial de los mismos.

Disponemos de un globo de vidrio vacío (fig. 6.6 *bis*) en el cual se ha introducido hidrógeno a la presión de 10^{-2} torr. En él existe un dispositivo acele-

FIG. 6.6 bis





rador de electrones y un ánodo a un potencial positivo respecto al cátodo emisor de electrones. Los electrones parten a celeridad v que puede deducirse de la condición de que el trabajo del campo eléctrico sea igual a la energía cinética $e\,V = \frac{1}{2}\,m\,v^2$. En el exterior hay dos bobinas de Helmholtz distantes 15 cm situadas simétricamente respecto al plano vertical medio del globo, de $a = 15$ cm de radio y $n = 130$ espiras cada una. El campo magnético producido por estas bobinas, al circular por ellas una corriente de intensidad I, es prácticamente

constante en el plano medio y su valor es $B = 4\pi \cdot 10^{-7} \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} n\, I/a$, según demuestra el cálculo. Por acción de este campo B los electrones describen una circunferencia con celeridad prácticamente constante y dicha trayectoria es visible por la luminiscencia que producen los electrones al chocar con los átomos de hidrógeno con la energía requerida. Si disminuimos la tensión V la trayectoria circular tiene radio cada vez menor, hasta que, bruscamente, desaparece cuando la energía de los electrones es insuficiente para excitar la luminiscencia.

Para calcular la relación e/m medimos el radio de la circunferencia con un catetómetro o bien a partir de la fotografía en la cual conocemos el diámetro del globo, 17,5 cm, y de aquí sabemos la escala y hallamos R. Sabemos que $e\,v\,B = m\,v^2/R$ y que $e\,V = \frac{1}{2}\,m\,v^2$, de donde $v = 2\,V/B\,R$ y $e/m = v/B\,R$, o sea,

$$e/m = 2\,V/(B\,R)^2$$

Los datos experimentales son:

$$I = 1 \text{ A} \qquad V = 150 \text{ V} \qquad R = 5{,}5 \text{ cm}$$

Calculamos B de la anterior expresión y resulta, para $I = 1$ A, $B = 7{,}8 \cdot 10^{-4}$ T y obtenemos

$$e/m = \frac{2{,}150}{(7{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}055)^2} = 1{,}63 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$$

el valor aceptado es de $1{,}76 \cdot 10^{11}$ C/kg cuyo valor no hemos obtenido por los errores experimentales, principalmente el debido al de la medida de R. El error relativo total no alcanza el 10 %.

6.6 Espectrógrafo de masas de Bainbridge. Podemos estudiar ahora un dispositivo utilísimo de la Física Atómica cuyo funcionamiento se basa en la acción de un campo magnético sobre una partícula cargada. Lo hemos esquematizado en la figura 6.7 en la cual vemos en su parte superior una fuente de iones positivos que, para fijar ideas, la hemos supuesto constituida por un tubo que contenga un gas a baja presión. Los iones se forman en sus distintos puntos y son acelerados hacia el cátodo perforado K pasando a través de sus orificios. Por ello se dio en un principio a los rayos así constituidos el nombre de *rayos canales*. El espectrógrafo propiamente dicho comienza en los diafragmas D_1 y D_2 que forman un haz estrecho de rayos paralelos que penetran entre las placas del *selector de velocidades* S constituido por el campo eléctrico existente entre dichas placas y un campo magnético perpendicular a él que ejerza sobre los iones positivos en movimiento fuerzas de sentido opuesto al de las ejercidas por el campo eléctrico. Los iones cuya celeridad cumple la ecuación 6.7 no se desviarán, mientras que los que estén animados de celeridades superior o inferior se desviarán hacia la izquierda o hacia la derecha, respectivamente, y no alcanzarán la rendija R. Al otro lado de ésta existe un campo magnético uniforme **B** (no tiene nada que ver con el del selector de velocidades) que obligará a los iones a describir una semicircunferencia de radio dado por la ecuación 6.4, yendo a incidir sobre una placa fotográfica P donde darán una imagen I de la rendija R. Midiendo la distancia $R\,I = 2\,r$, como conocemos v y B podremos obtener la carga específica de los iones q/m despejándola de la ecuación 6.4.

En la figura 6.7 se han representado dos imágenes I_1 e I_2 de la rendija que corresponden a dos tipos de iones de diferente carga específica. Si el gas contenido en el tubo es puro y la ddp entre K y A insuficiente para producir iones

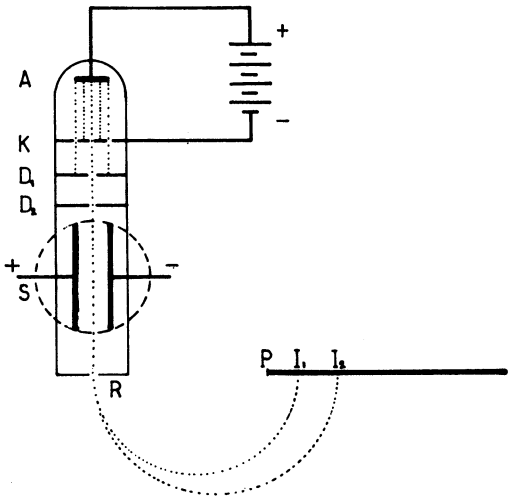


FIG. 6.7 Espectrógrafo de masas de Bainbridge.

con dos cargas en cantidad apreciable, podremos hacer $q = e$ en la ecuación 6.4 y tendremos

$$r_1 = \frac{R I_1}{2} = \frac{m_1 v}{e B} \qquad r_2 = \frac{R I_2}{2} = \frac{m_2 v}{e B}$$

de donde

$$\frac{R I_1}{R I_2} = \frac{m_1}{m_2} \tag{6.8}$$

que nos permitiría determinar la razón de las masas de dos *isotopos*. Operando con isotopos conocidos, obtendríamos sobre la placa fotográfica P un *espectro de masas* conocidas que serviría como escala de masas atómicas que nos permitiera después por la comparación 6.8 determinar la masa atómica de un cuerpo problema. Si en vez de la placa se colocaran en I_1 e I_2 dos dispositivos colectores, el espectrógrafo de masas podría servir para la separación de isotopos y así se hizo para separar el U^{235} del U^{238} en la fabricación de la primera bomba atómica.

6.7 Acción de un campo magnético sobre un elemento de corriente. Consideremos un conductor metálico filiforme recorrido por una corriente de intensidad I y situado en un campo magnético cualquiera. Consideremos un tramo muy corto de longitud dl y sea $\mathbf{B}$ el campo magnético existente en él. Siendo n el número de electrones libres por unidad de volumen y S el área de la sección recta del

tramo elemental considerado, en él existirán $n\,S\,dl$ electrones libres, cada uno de los cuales se hallará sometido a una fuerza que, por término medio, vendrá dada por la ecuación 6.2 si representamos por **v** la velocidad media de dichos electrones y en la que deberíamos hacer $q = -e$. La interacción de los electrones libres con la estructura cristalina del conductor hace que las fuerzas mencionadas se apliquen a éste, y por tanto, el elemento considerado se hallará sometido a una fuerza resultante

$$\mathbf{dF} = n\,S\,\mathrm{dl}\,(-e)\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \tag{6.9}$$

Si asociamos al tramo (fig. 6.8) un vector **dl** de módulo igual a su longitud, de igual dirección, pero de sentido opuesto al del movimiento

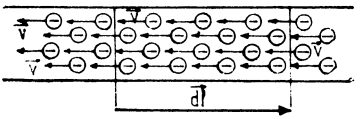


FIG. 6.8 Tramo elemental de un conductor recorrido por una corriente. El vector **dl** tiene sentido opuesto a la velocidad de los electrones.

de los electrones libres, la ecuación 6.9 puede escribirse en la forma

$$\mathbf{dF} = e\,n\,S\,v\,\mathrm{dl} \wedge \mathbf{B}$$

que en virtud de la ecuación 4.2 será igual que escribir

$$\mathbf{dF} = I\,\mathrm{dl} \wedge \mathbf{B} \tag{6.10}$$

El vector $I\,\mathrm{dl}$ recibe el nombre de *elemento de corriente* y la ecuación 6.10, debida a PIERRE SIMON DE LAPLACE (1749-1827), aplicada a todos los elementos de una corriente, nos permitirá determinar el sistema de fuerzas que un campo magnético ejerza sobre un circuito.

La ley de Laplace puede generalizarse al caso de corrientes que no circulen, precisamente, por conductores metálicos. Así, si en un punto cualquiera tomamos un tubo de corrientes de sección S y longitud dl, en su interior habrá, en general, $n_1\,S\,dl$ portadores de un tipo cuya velocidad media sea $\mathbf{v}_1$ y cuya carga sea q_1; $n_2\,S\,dl$ de velocidad media $\mathbf{v}_2$ y carga q_2, etc. La fuerza que el campo magnético **B** ejerciera sobre un tipo de portadores genérico sería $n_i\,S\,\mathrm{dl}\,q_i\,\mathbf{v}_i \wedge \mathbf{B}$ y la fuerza que ejercería sobre todos los portadores del elemento considerado sería

$$\mathbf{dF} = (\Sigma\, n_i\, q_i\, \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{B})\, S\,\mathrm{dl}$$

y teniendo en cuenta la ecuación 4.5

$$d\mathbf{F} = \mathbf{J} \wedge \mathbf{B}\, S\, dl = (\mathbf{J}\, S\, dl) \wedge \mathbf{B} \tag{6.11}$$

que, considerando asociado al elemento un vector dl de la dirección y sentido de **J** y cuyo módulo sea dl, queda reducida a la ecuación 6.10, pues $J\,S$ sería la intensidad de la corriente a través del tubo considerado.

6.8 Acción de un campo magnético sobre una espira. Consideremos una espira rectangular (fig. 6.9) de base b y altura a, recorrida por una corriente de intensidad I. Esta espira está situada en un campo magnético de manera que **B** sea constante y forme un ángulo φ con la normal al plano de la espira tal como se indica en la figura 6.9.

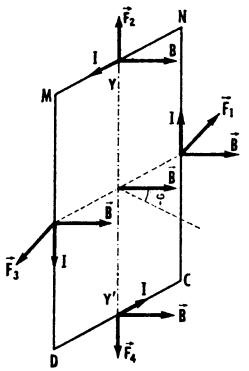


FIG. 6.9 Acción de un campo magnético sobre una espira rectangular.

Los elementos que constituyen el lado $N\,C$ están sometidos todos a fuerzas normales al plano determinado por **B** y $N\,C$ y de módulo $B\,I\,dl$. Constituyen, pues, un sistema de fuerzas paralelas que se ejercen sobre el lado $N\,C$ que, si lo consideramos rígido, equivaldrán a una fuerza única $\mathbf{F}_1$ aplicada en su punto medio de igual dirección y sentido que aquéllas y de valor

$$F_1 = \int B\, I\, dl = B\, I\, a \tag{6.12}$$

ya que la suma se extiende a todos los elementos del lado $N\,C$ y puede sacarse factor común al producto $B\,I$ que tiene el mismo valor en todos los elementos de $N\,C$. Análogamente, sobre el lado $M\,D$

se ejercerá otra fuerza $\mathbf{F}_3$ de igual dirección y módulo, pero de sentido opuesto (el sentido de la corriente es opuesto al del lado $N\,C$), que constituirá con la $\mathbf{F}_1$ un par cuyo momento es paralelo a los lados $N\,C$ y $M\,D$, de módulo

$$P = (B\,I\,a)\cdot b \text{ sen } \varphi \tag{6.13}$$

ya que b sen φ será el brazo del par y cuyo sentido será el del avance de un sacacorchos que gire en la forma indicada por las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_3$.

Sobre los lados $M\,N$ y $D\,C$ se ejercerán fuerzas que son opuestas dos a dos, constituyendo un sistema nulo, por lo que si la espira es rígida, quedará sometida solamente al par antes mencionado. Ahora bien, podemos asociar a la espira un vector **M** normal a su plano, dirigido en el sentido que avanzaría un sacacorchos que girase de igual manera que la corriente y cuyo módulo fuera $I\,S$, siendo $S = a\,b$ el área plana limitada por la espira. En tal caso, la ecuación 6.3 la podremos poner en forma vectorial escribiendo

$$\mathbf{P} = \mathbf{M} \wedge \mathbf{B} \tag{6.14}$$

pues este producto vectorial coincide en módulo dirección y sentido con el momento **P** del par que se ejerce sobre la espira.

Vamos a ver que la ecuación 6.14 es válida para toda espira, sea rectangular, como la considerada, o no. El campo magnético **B** lo podemos descomponer en dos: $\mathbf{B}_1$ normal al plano de la espira y $\mathbf{B}_2$ contenido en su plano. Veamos

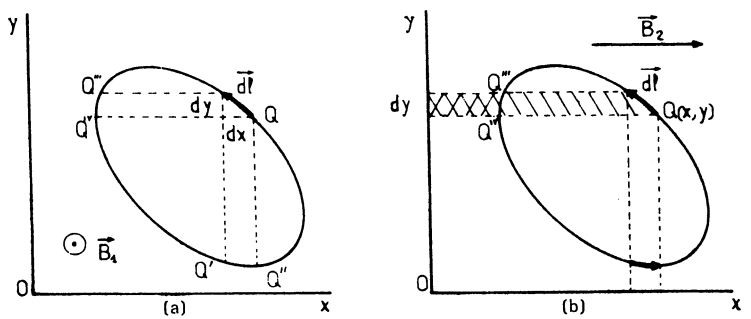


FIG. 6.10 *a*) El campo $\mathbf{B}_1$ es normal al plano de la espira. b) $\mathbf{B}_2$ está contenido en el plano de la espira.

qué acción ejerce cada componente sobre la espira. Consideremos ésta descompuesta en elementos **dl**. Un elemento genérico será el correspondiente al punto $Q(x, y)$ (fig. 6.10 *a*). El campo $\mathbf{B}_1$ ejerce sobre él una fuerza

$$d\mathbf{F} = I\, d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}_1 = I \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ dx & dy & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{vmatrix} = I B_1 (\mathbf{i}\, dy - \mathbf{j}\, dx) \tag{6.15}$$

y sumando las expresiones correspondientes a toda la espira tendremos la resultante general del sistema de fuerzas:

$$\oint d\mathbf{F} = I B_1 \left[\mathbf{i} \oint dy - \mathbf{j} \oint dx \right] \tag{6.16}$$

Pero como las cantidades dy son dos a dos opuestas (p. ej. las correspondientes al elemento considerado y el $Q^{III}\, Q^{IV}$), su suma extendida a todos los elementos de la espira será nula. Lo mismo puede decirse de las cantidades dx (elemento considerado y $Q^{I}\, Q^{II}$). Por tanto, la resultante general 6.16 será nula.

El momento de la fuerza 6.15 respecto al origen de coordenadas es

$$(Q - O) \wedge d\mathbf{F} = I B_1 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ dy & -dx & 0 \end{vmatrix} = -I B_1 (x\, dx + y\, dy)\, \mathbf{k}$$

y el momento resultante del sistema de fuerzas será

$$-I B_1 \left[\oint x\, dx + \oint y\, dy \right] \mathbf{k}$$

que también es nulo por ser nulas las dos sumas, ya que para cada valor de x existen dos valores opuestos de dx (puntos Q y Q^{II}, p. ej.); y para cada valor de y existen dos valores opuestos de dy (puntos Q y Q^{IV}). Como son nulas la resultante general y el momento resultante, el sistema de fuerzas debidas a $\mathbf{B}_1$ es equivalente a cero.

El sistema de fuerzas debidas a $\mathbf{B}_2$ tiene también resultante general nula. En efecto: La fuerza que se ejerce sobre el elemento $d\mathbf{l}$ situado en el punto $Q(x, y)$ (fig. 6.10 b) es

$$d\mathbf{F} = I\, d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}_2 = I \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ dx & dy & 0 \\ B_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -I B_2\, dy\, \mathbf{k} \tag{6.17}$$

pues no hay inconveniente en tomar el eje Ox de igual dirección y sentido que $\mathbf{B}_2$. La resultante general será, pues,

$$\mathbf{F} = \oint d\mathbf{F} = -I B_2\, \mathbf{k} \oint dy = 0$$

pues la suma es la que ya salió en la ecuación 6.16 y vimos que era nula. Como la resultante general es nula, el sistema de fuerzas es un par (cfr. § 2.5, pág. 21, tomo I). Como su momento es el mismo para todos los puntos del espacio busquemos el momento resultante respecto a O. El momento de la fuerza 6.17 respecto a O será:

$$(Q - O) \wedge d\mathbf{F} = -I B_2\, dy\, (Q - O) \wedge \mathbf{k} =$$

$$= -I B_2\, dy \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -I B_2\, dy\, (y\, \mathbf{i} - x\, \mathbf{j})$$

y el momento resultante será:

$$\mathbf{P} = I B_2 \left[\mathbf{j} \oint x \, dy - \mathbf{i} \oint y \, dy \right] \tag{6.18}$$

La segunda de estas sumas ya hemos visto antes que es nula. En cuanto a la primera, vamos a ver que es igual al área plana encerrada por la espira. En efecto: $x\,dy$ es igual al área limitada entre el elemento **dl** en Q, el eje Oy y las dos paralelas a Ox trazadas por los extremos de **dl**. Al sumar $x\,dy$ para todos los elementos de la espira, vemos que para el $Q^{III}\,Q^{IV}$ el producto $x\,dy$ es de signo contrario por haber cambiado el signo de dy, luego esta área se restará de la anterior y la suma total se reducirá al área limitada por la espira. La ecuación 6.18 podemos, pues, escribirla en la forma

$$\mathbf{P} = I S B_2 \mathbf{j} \tag{6.19}$$

y como B_2 es la proyección del campo **B** que forma un ángulo φ con la normal a la espira, la ecuación 6.19 equivale a

$$\mathbf{P} = (I S B \text{ sen } \varphi)\,\mathbf{j} \tag{6.20}$$

El sistema de fuerzas debidas al campo **B** es equivalente al de las debidas a $\mathbf{B}_2$, pues $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ y el sistema de las fuerzas debidas a $\mathbf{B}_1$ es equivalente a cero (cfr. § 2.8, pág. 24, tomo I). Por tanto, la ecuación 6.20 nos da el momento del par resultante de la acción sobre la espira de las fuerzas debidas al campo **B**. Llamando momento magnético **M** de la espira a un vector normal a ella y sentido el de avance de un sacacorchos que gire como la corriente y módulo el producto $I\,S$ de la intensidad de la corriente por el área plana limitada por la espira, se deduce inmediatamente de la ecuación 6.20 que

$$\mathbf{P} = \mathbf{M} \wedge \mathbf{B} \tag{6.14}$$

que es la misma expresión hallada para la espira rectangular.

6.9 Acción de un campo magnético sobre un solenoide recto. Llamaremos solenoide a un conjunto de espiras poco separadas entre sí, cuyos centros se hallen sobre una misma línea y estén recorridas todas por corrientes de la misma intensidad. Si los centros están sobre una recta, diremos que se trata de un solenoide recto. En la práctica, las espiras no se cierran cada una sobre sí misma, sino que enlaza cada una con las inmediatas (fig. 6.11).

Al situar un solenoide recto en un campo magnético, éste ejercerá sobre cada espira un par de momento dado por la ecuación 6.14 y si el conjunto es rígido, el sistema de fuerzas será un par de momento

$$\mathbf{P} = \Sigma\, \mathbf{M}_i \wedge \mathbf{B} \tag{6.21}$$

donde $\mathbf{M}_i$ sería el momento magnético de la espira i-sima. Es decir, $M_i = I\,S_i$, luego si $\mathbf{M} = \Sigma\, \mathbf{M}_i$

$$M = \Sigma\, I\, S_i = I\, \Sigma\, S_i \tag{6.22}$$

ya que todos los vectores $\mathbf{M}_i$ son de igual dirección y sentido. El vector $\mathbf{M}$ es el llamado *momento magnético del solenoide.* Será un vector dirigido según su eje en el sentido de avance de un sacacorchos que girase como la corriente y cuyo módulo (ec. 6.22) es el producto de la intensidad de la corriente por el área limitada por *todas* las espiras. El par que se ejerce sobre el solenoide (ec. 6.21) será, pues,

$$\mathbf{P} = \mathbf{M} \wedge \mathbf{B} \tag{6.23}$$

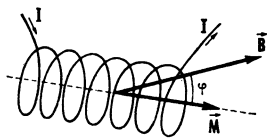


FIG. 6.11 Solenoide recto.

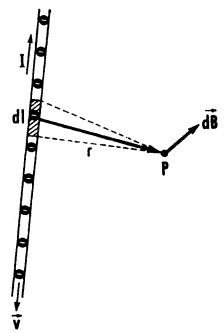


FIG. 6.12 Campo creado por un elemento de corriente.

6.10 Campo creado por un elemento de corriente. Es un hecho experimental que dos corrientes cualesquiera se ejercen acciones mutuas y ya indicamos en § 6.1 que para estudiar dicho fenómeno se descompone en dos: 1.° campo creado por una de las corrientes y 2.° acción de este campo sobre la otra corriente. Esta segunda parte la hemos estudiado ya y sabemos se resuelve con auxilio de la ecuación 6.10. Por lo que respecta al campo creado por una corriente cualquiera en un punto dado, los trabajos de JEAN BAPTISTE BIOT (1774-1862) y FELIX SAVART (1791-1841) acerca del campo magnético creado por una corriente rectilínea muy larga, dieron como resultado que en un punto P a distancia a del conductor, dicho campo vale K/a según comunicaron a la Académie des Sciences el 30-X-1820. Pocos días después, LAPLACE indica que la contribución al campo en P de un elemento dl que se halla a una distancia r de P formando un ángulo φ dicho elemento con la recta que lo une a P viene dada por

$$dB = \frac{A}{r^2} f(\varphi)\, dl$$

pero de sus experimentos no puede determinar $f(\varphi)$. El 4 de diciembre del mismo año BIOT comunica que de sus estudios experimentales parece deducirse que $f(\varphi)$ es sen φ. Hoy admitimos, porque todas las consecuencias que se deducen de ello vienen corroboradas por la experiencia, que el campo magnético creado por una corriente estacionaria de forma cualquiera en un punto P, puede considerarse como la suma vectorial de las contribuciones de los distintos elementos de corriente, siendo la contribución de un elemento genérico un vector normal al plano determinado por el punto P y el elemento, de sentido el de giro de un sacacorchos que avance como la corriente y de módulo

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, dl \text{ sen } \varphi}{r^2} \tag{6.24}$$

De lo dicho resulta que $\mathbf{dB}$ tiene la dirección y sentido del producto vectorial $I\,\mathbf{dl} \wedge \mathbf{r}$, por lo que podríamos escribir

$$\mathbf{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\mathbf{dl} \wedge \mathbf{r}}{r^3} \tag{6.25}$$

como expresión de la *ley de Laplace* para el campo creado por un elemento de corriente. Algunos autores llaman *ley de Biot y Savart* a la expresada por la ecuación 6.25.

La constante μ_0 que figura en el coeficiente de proporcionalidad recibe el nombre de *permeabilidad magnética* del vacío. Su valor en el sistema giorgi racionalizado es

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A}$$

y representa la propiedad del vacío (donde hemos supuesto tenían lugar los fenómenos estudiados) para transmitir los campos magnéticos. El resto del segundo miembro de la ecuación 6.25 sólo contiene cantidades geométricas además de I, por lo que puede considerarse como la *excitación* del magnetismo en el punto P y puede representarse por un vector $\mathbf{dH}$.

6.11 Campo creado por una carga en movimiento. Consideremos un elemento de una corriente constituida por un solo tipo de portadores de carga q y velocidad media $\mathbf{v}$. Sea S la sección recta de dicho elemento y n el número de portadores por unidad de volumen existente en él. Por la definición dada de elemento de corriente en § 6.7 podemos escribir

$$I\,\mathbf{dl} = n\,S\,q\,v\,\mathbf{dl} = n\,S\,q\,dl\,\mathbf{v} \tag{6.26}$$

En dicho elemento, habrá $n\,S\,dl$ portadores que, podemos suponer, contribuyen por igual al campo **dB** creado en un punto P. Luego, la contribución de cada carga móvil la obtendremos dividiendo por $n\,S\,dl$ la ecuación 6.25 y sustituyendo en ella la 6.26 queda

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{r}}{r^3} \tag{6.27}$$

como expresión del campo creado en P por una carga q que se mueve con velocidad **v**, estando determinada la posición de P por un vector **r** de origen en la carga y extremo en P. En la figura 6.13 se ilustra el caso en que la carga q es positiva. Si fuera negativa, el campo tendría sentido opuesto según se desprende de la ecuación 6.27 y confirma la experiencia. De la misma ecuación se deduce que el módulo del campo creado es

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \left| \frac{q\,v\ \text{sen}\ \varphi}{r^2} \right|$$

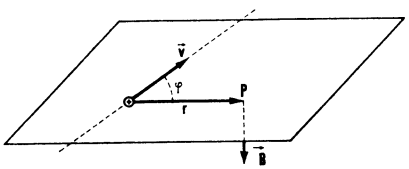


FIG. 6.13 Campo magnético creado por una carga en movimiento.

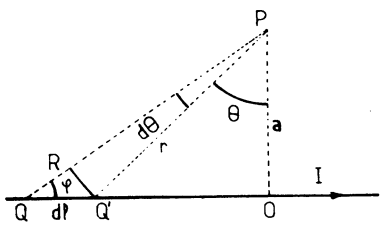


FIG. 6.14 Ley de Biot y Savart.

6.12 Campo magnético creado por una corriente rectilínea indefinida; ley de Ampère. Consideremos en un conductor rectilíneo indefinido recorrido por una corriente de intensidad I un elemento de corriente $I\,\mathbf{dl} = I\,(Q' - Q)$, el cual creará en un punto P un campo magnético **dB** normal al plano determinado por el elemento y el punto (plano del papel) y dirigido hacia el lector. Como todos los elementos crearán en P campos de igual dirección y sentido, el campo resultante tendrá la misma dirección y sentido y su módulo será igual a la suma de los módulos. La simetría axial del sistema hace que lo dicho valga para cualquiera de los planos que se cortan según el conductor rectilíneo y las líneas de fuerza serán circulares, situadas en planos normales al conductor y centradas en él.

Con centro en P y radio $r = PQ'$ (fig. 6.14) tracemos un arco $Q'R = r\,d\theta$, siendo $d\theta$ el incremento del ángulo θ que forma PQ' con la perpendicular PO al conductor, al pasar del extremo Q' al Q del elemento dl. Como $Q'R$ puede considerarse como cateto del triángulo QRQ' podemos escribir

$$r\,d\theta = dl\ \text{sen}\ \varphi \tag{6.28}$$

y como

$$r = \frac{a}{\cos\ \theta} \tag{6.29}$$

sustituyendo 6.28 y 6.29 en 6.24 queda

$$dB = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\frac{I}{a}\,\cos\ \theta\ d\theta \tag{6.30}$$

como módulo del campo creado por el elemento de corriente al que corresponde el valor θ del ángulo $Q'PO$. Sumando las contribuciones de todos los elementos, o sea los módulos 6.30 para todos los valores de θ entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$, resulta

$$B = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\frac{I}{a}\,\cos\ \theta\,d\theta = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\frac{I}{a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\ \theta\,d\theta = \frac{\mu_0}{2\,\pi}\,\frac{I}{a} \tag{6.31}$$

que es la ley deducida experimentalmente por BIOT y SAVART (cfr. § 6.10).

Calculemos ahora la circulación (cfr. § 3.2, p. 29, tomo I) del vector $\mathbf{B}$ a lo largo de una línea de fuerza. En tal caso, el vector es tangente siempre al camino, y llamando ds al elemento de camino será

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \oint B\,ds = \oint \frac{\mu_0 I}{2\,\pi\,a}\,ds = \frac{\mu_0 I}{2\,\pi\,a}\oint ds = \mu_0 I \tag{6.32}$$

El vector $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$, que ya mencionamos al final de § 6.10, recibe el nombre de *campo magnético de excitación* o excitación magnética, y de 6.32 deducimos que su circulación a lo largo de una línea de fuerza es

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s} = I \tag{6.33}$$

esto es cierto aun cuando el camino no sea una línea de fuerza y el campo magnético esté creado por un sistema de corrientes cualesquiera, según indica la *ley de Ampère,* que dice que *la circulación*

a lo largo de un camino cerrado del campo magnético de excitación H es igual a la intensidad total de la corriente abrazada por dicho camino. No vamos a demostrar la ley de Ampère en toda su generalidad, pero intentaremos aclarar su significado: el camino de circulación puede considerarse límite de una superficie abierta, la cual puede ser atravesada por varias corrientes. Considerando un sentido de recorrido del camino, las corrientes que atraviesen la superficie

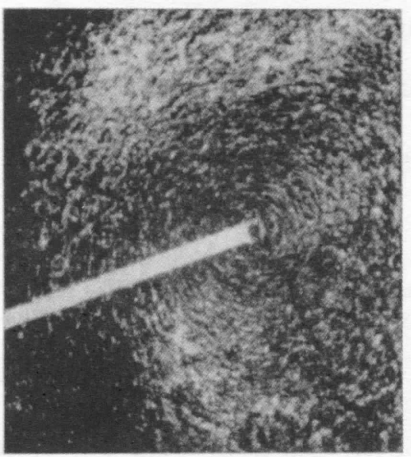


FIG. 6.15 Líneas de fuerza del campo magnético creado por un hilo recto recorrido por una corriente de 17 A.

abierta creando campos de circulación positiva se considerarán de intensidad positiva, y las que la atraviesen en sentido opuesto se considerarán de intensidad negativa, y el segundo miembro de la ecuación 6.33 será la suma algebraica de dichas intensidades, es decir, la carga eléctrica total que, por unidad de tiempo, atraviese en el sentido positivo la superficie limitada por el camino.

6.13 Campo magnético creado por una espira circular en un punto de su eje. Consideremos ahora una espira circular de radio R, recorrida por una corriente de intensidad I y busquemos el campo magnético que crea en un punto P de su eje de simetría (fig. 6.16). El punto P y la espira determinan un cono de revolución de semiángulo α y la simetría en torno a su eje hace que las contribuciones $d\mathbf{B}$ de los elementos de corriente sean vectores que formen todos un ángulo β, complementario del α, con dicho eje. Cada $d\mathbf{B}$ tendrá una componente axial y otra transversal y los elementos de corriente diametralmente opuestos darán origen a componentes transversales opuestas, por lo que el campo magnético resultante será axial. Para calcularlo bastará, pues, sumar

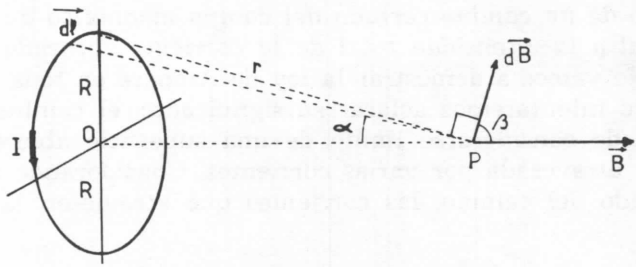


FIG. 6.16 Campo creado por una corriente circular.

las componentes axiales $dB \cos \beta$. Ahora bien, los vectores **r** están dirigidos según generatrices de un cono de revolución y por tanto serán perpendiculares a la circunferencia de base, o sea, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Ello hace que la componente axial de **dB** sea

$$dB \cos \beta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, dl}{r^2} \cos \beta$$

sumando las componentes axiales correspondientes a todos los elementos y sacando factor común las cantidades comunes a todos ellos, resulta

$$B = \oint \cos \beta \, dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \cos \beta \oint dl$$

Pero $\cos \beta = \operatorname{sen} \alpha$ por ser α y β complementarios y $\oint dl$ es la longitud de la espira $2\pi R$, luego

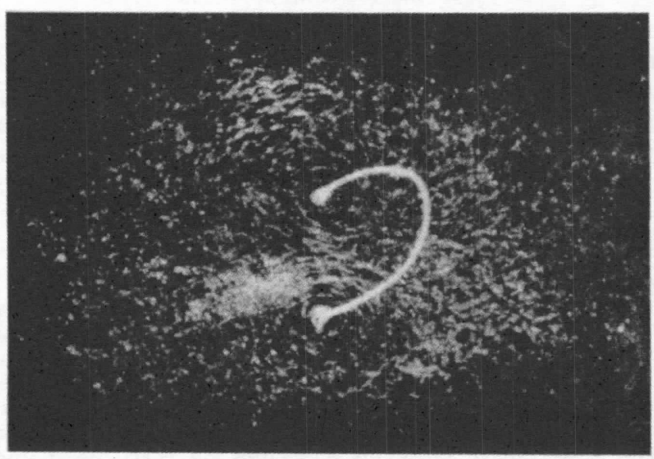


FIG. 6.17 Líneas de fuerza del campo magnético creado por una espira circular recorrida por una corriente de 17 A.

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{I R}{r^2} \operatorname{sen} \alpha = \frac{\mu_0}{2} \frac{I R^2}{r^3} \tag{6.34}$$

En el centro de la espira, $r = R$ y el campo valdrá

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R}$$

Al otro lado de la espira representada en la figura 6.16 el campo estaría dirigido hacia el plano de la espira, pues desde allá se vería la corriente circulando en el sentido de las agujas del reloj. El módulo seguiría siendo el dado por la ecuación 6.34. En la figura 6.17 puede verse el campo materializado por sus líneas de fuerza logradas espolvoreando limaduras de hierro sobre una cartulina atravesada por la espira.

6.14 Campo creado por un solenoide. Consideremos un solenoide recto constituido por N espiras iguales distribuidas apretada y uniformemente a lo largo de una longitud l. El número de espiras por unidad de longitud será $n = N/l$

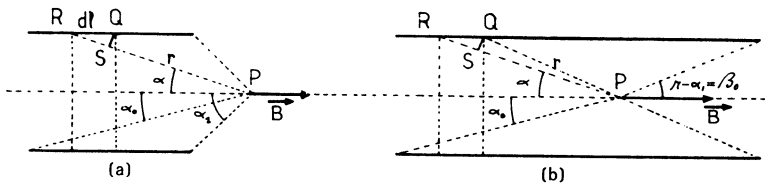


FIG. 6.18 Campo en un punto del eje de un solenoide recto.

y en una longitud dl (RQ en fig. 6.18) habrá $n\,\mathrm{d}l$ espiras que al ser recorridas todas por la misma corriente de intensidad I y sumar sus efectos crearán en el punto P un campo igual al que crearía una espira única situada en RQ y recorrida por una corriente de intensidad $I\,n\,\mathrm{d}l$. Dicho campo valdrá en virtud de la ecuación 6.34

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{2} \frac{(I\,n\,\mathrm{d}l)R}{r^2} \operatorname{sen} \alpha \tag{6.35}$$

donde R es el radio de la sección del solenoide. Con centro en P y radio $r = PQ$ tracemos un arco de circunferencia $QS = r\,\mathrm{d}\alpha$ que por poderse considerar como cateto del triángulo QSR nos da

$$\mathrm{d}l \operatorname{sen} \alpha = r\,\mathrm{d}\alpha \tag{6.36}$$

y como

$$\frac{R}{r} = \operatorname{sen} \alpha \tag{6.37}$$

sustituyendo (6.36) y (6.37) en (6.35) resulta

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{2} n I \operatorname{sen} \alpha\,\mathrm{d}\alpha \tag{6.38}$$

y sumando las contribuciones de todos los elementos dl que integran el solenoide resulta

$$B = \frac{\mu_0}{2} n I \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \operatorname{sen}\ \alpha\, d\alpha = \frac{\mu_0}{2} n I (\cos \alpha_0 - \cos \alpha_1) =$$

$$= \frac{\mu_0}{2} \frac{N I}{l} (\cos \alpha_0 + \cos \beta_0) \qquad (6.39)$$

pues en la figura 6.18 b, $\beta_0 = \pi - \alpha_1$. En esta expresión se ha sustituido $n = N/l$.

Si el punto P estuviera en la región central del solenoide y éste fuera suficientemente largo, cos α_0 y cos β_0 serían poco diferentes de 1 y la ecuación 6.39 nos daría para el campo en un punto tal

$$B \simeq \mu_0 \frac{N I}{l} \qquad (6.40)$$

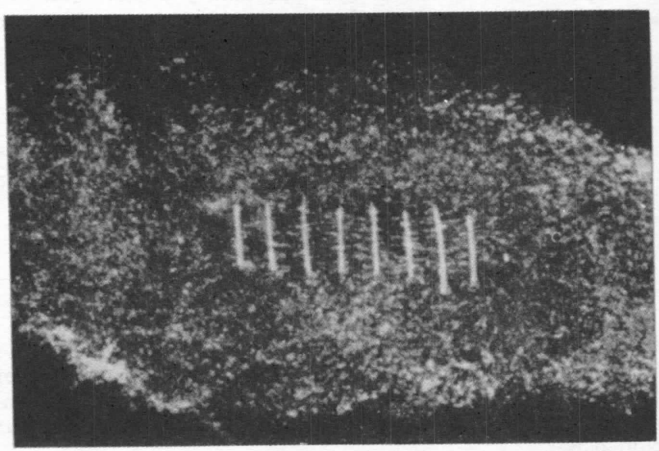


FIG. 6.19 Líneas de fuerza de un solenoide de espiras separadas. El campo en su interior es homogéneo. (Intensidad de la corriente: 4 A.)

Si el solenoide fuera tórico, es decir, si las N espiras se distribuyeran uniformemente sobre un toro de radio medio R (fig. 6.20), la simetría del sistema haría que en los puntos de la circunferencia de radio R el campo fuera tangente a ella y podemos calcularlo empleando la ley de Ampère. Veamos cómo: Por razón de simetría, el campo magnético de excitación **H** será tangente y de igual módulo en todos los puntos de la circunferencia de radio R, luego su circulación a lo largo de ella valdrá $H \cdot 2\pi R$. El círculo limitado por dicha circunferencia es atravesado en el sentido hacia el lector por N corrientes de intensidad I, luego el segundo miembro de la ecuación 6.33 será $N I$ y la ley de Ampère nos da

$$H \cdot 2\pi R = N I \qquad \text{de donde} \qquad H = \frac{N I}{2\pi R}$$

y como $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ y $2\pi R = l$ es la longitud del solenoide, el campo en los puntos de la circunferencia considerada tiene un módulo que viene dado también por la ecuación 6.40.

6.15 Fuerzas que se ejercen dos corrientes paralelas. Consideremos (fig. 6.21) dos corrientes rectilíneas, indefinidas, paralelas, del mismo sentido, separadas una distancia a, y de intensidades respectivas I_1 e I_2, como las mencionadas en § 6.1. Vamos a analizar su

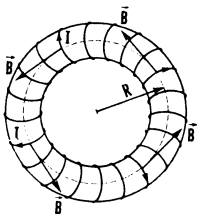


FIG. 6.20 Solenoide tórico.

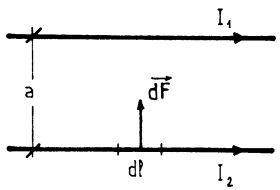


FIG. 6.21

interacción a la luz de los conocimientos adquiridos en este capítulo. El campo creado por la corriente de intensidad I_1 en los puntos de la otra será normal al papel, dirigido hacia atrás y de módulo (cfr. ec. 6.31)

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{a}$$

Sobre un elemento de corriente $I_2\,\mathrm{dl}$, dicho campo ejerce una fuerza (cfr. ec. 6.10)

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = I_2\,\mathrm{dl} \wedge \mathbf{B}_1 \tag{6.41}$$

Los tres vectores son perpendiculares y $\mathrm{d}\mathbf{F}$ está dirigida según se indica en la figura 6.21, siendo su módulo

$$\mathrm{d}F = I_2\,\mathrm{d}l\,B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{a}\,\mathrm{d}l$$

por lo que la fuerza que se ejercen por unidad de longitud será atractiva y de valor

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{a} \tag{6.42}$$

Se comprende que si las corrientes tuvieran sentidos opuestos, en la ecuación 6.41 cambiaría el sentido de dl o de $\mathbf{B}_1$, lo que invertiría el sentido de $\mathrm{d}\mathbf{F}$ y la fuerza sería repulsiva.

El ampère absoluto se define, precisamente, como la intensidad de una corriente que al circular por dos conductores paralelos separados 1 m se ejercen entre sí, por cada metro de longitud, una fuerza de $2 \cdot 10^{-7}$ N. Como esta fuerza es fácil de medir, suele tomarse el ampère como cuarta unidad fundamental del sistema giorgi, quedando el coulomb como unidad derivada. Por eso suele denominarse al sistema giorgi como sistema MKSA.

6.16 Osciloscopio de rayos catódicos. El tubo de rayos catódicos inventado por KARL FERDINAND BRAUN (1850-1918) ha sufrido diversas modificaciones que lo han convertido en un útil instrumento de laboratorio y de comunicación (tubo de imagen de TV). El *osciloscopio* de rayos catódicos consta, en esencia, de un tubo de vacío o de gas a muy baja presión, que contiene un cañón de electrones y dos dispositivos creadores de campos que desvíen el haz de electrones constituyente del rayo catódico según dos direcciones perpendiculares. Al incidir el rayo desviado sobre una pantalla fluorescente situada en el extremo del tubo, produce en el punto de incidencia una mancha luminosa.

El tubo de Braun tenía en el cañón de electrones un cátodo frío que emitía electrones al ser bombardeado por los iones positivos del gas. Los modernos tubos tienen un cañón de electrones similar al representado en la figura 2.15 y es el filamento caliente F el que caldea el cátodo que emitirá electrones por efecto termoiónico (§ 11.2).

El tubo empleado por J. J. THOMSON (fig. 6.6) producía una desviación vertical mediante el campo eléctrico existente entre dos placas (desviación electrostática), la cual anulaba con otra desviación causada por el campo magnético creado por una bobina. Si ésta se colocara de manera que el campo **B** creado por ella tuviera igual dirección que el **E** creado por las placas (fig. 6.22 *a*), produciría una desviación horizontal electromagnética. El tipo más corriente de osciloscopio de laboratorio contiene un tubo con dos sistemas de placas perpendiculares que hacen que las dos desviaciones sean electrostáticas (fig. 6.22 *b*).

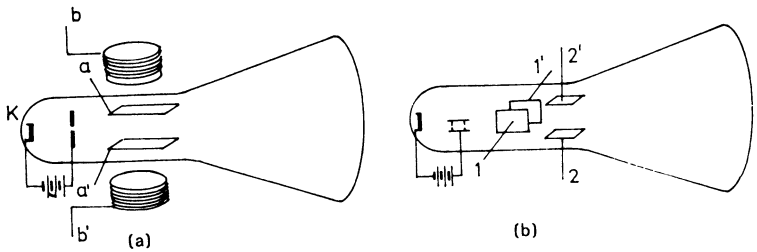


FIG. 6.22 Osciloscopio de rayos catódicos: *a*) desviación vertical electrostática y horizontal electromagnética. *a* y *a'* son los terminales de las placas de desviación vertical. *b* y *b'* los terminales de las bobinas en serie creadoras de la desviación horizontal; *b*) cuyas dos desviaciones son electrostáticas. 11' son los terminales de las placas de desviación horizontal, 22' los de las de desviación vertical.

Los tubos de imagen de TV son también tubos de rayos catódicos en los que las dos desviaciones son electromagnéticas, creadas por dos pares de bobinas. Vamos a estudiar los efectos de los dos tipos de desviación.

Desviación electrostática. Un electrón procedente del cañón llega al punto O a la entrada de las placas (fig. 6.23) con una velocidad dirigida según el eje Ox de celeridad v_0. Al penetrar entre las placas, se encuentra con un campo eléctrico uniforme de dirección perpendicular a Ox y valor

$$E = \frac{V - V'}{d} = \frac{V_d}{d} \tag{6.43}$$

llamando V_d a la ddp entre las placas P y P'. El problema es análogo al del tiro horizontal, pues en éste también se tiene un campo $\mathbf{g}$ uniforme perpendicular a la velocidad inicial. La trayectoria será parabólica, pues, y su ecuación será, en el sistema de coordenadas de la figura 6.23

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{a}{v_0^2}\,x^2 \qquad \text{donde} \qquad a = \frac{e\,E}{m} \tag{6.44}$$

es el módulo de la aceleración del electrón, la cual tiene la dirección y sentido de Oy. Se ha tomado e como valor absoluto de la carga del electrón.

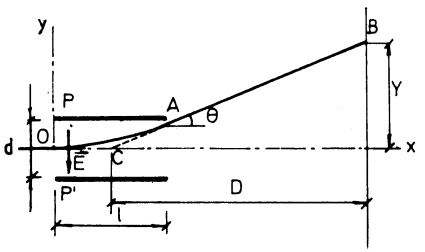


FIG. 6.23 Desviación electrostática.

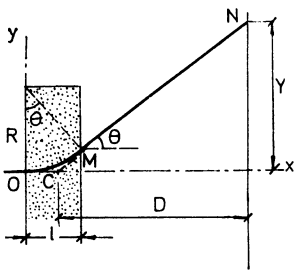


FIG. 6.24 Desviación electromagnética.

En efecto: Como la fuerza sólo tiene componente según Oy, la componente de la velocidad según Ox no varía y el movimiento según Oy será uniformemente acelerado por ser constante a. Luego:

$$x = v_0\,t \qquad y = \tfrac{1}{2}\,a\,t^2$$

y eliminando t entre estas dos ecuaciones se obtiene la 6.44.

Entre los puntos A y B no se ejerce fuerza alguna sobre el electrón, por lo que éste estará animado de movimiento rectilíneo y uniforme de velocidad igual a la que lleva en B. Es decir, la recta AB será tangente en A a la parábola, por lo que formará con la dirección Ox un ángulo θ definido por

$$\operatorname{tg}\theta = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = \frac{a\,l}{v_0^2} \quad \text{(coeficiente angular de } AB\text{)}$$

las coordenadas del punto A son $A\left(l;\ \frac{1}{2}\,\frac{a}{v_0^2}\,l^2\right)$ y la recta AB tendrá por ecuación

$$y - \frac{1}{2}\,\frac{a\,l^2}{v_0^2} = \frac{a\,l}{v_0^2}\,(x - l) \quad \text{o sea} \quad y = \frac{a\,l}{v_0^2}\left(x - \frac{l}{2}\right) \tag{6.45}$$

que nos indica que su prolongación pasa por el centro C del sistema de placas. Esto nos permite considerar C como cátodo virtual que emite electrones en línea recta hasta B. En este punto, $y = Y$, $x = D + \frac{l}{2}$ y la ecuación 6.45 se reduce a

$$Y = \frac{a\, l\, D}{v_0^2}$$

y sustituyendo a por su valor 6.44 y teniendo en cuenta la ecuación 6.43, queda

$$Y = \left(\frac{e}{v_0^2\, m} \right) \left(\frac{l\, D}{d} \right) V_d \tag{6.46}$$

Las dos cantidades entre paréntesis son constantes, la primera característica del electrón y del cañón de electrones, la segunda de las dimensiones geométricas del sistema, por lo que la ecuación 6.46 nos indica que la desviación Y sobre la pantalla es proporcional a la ddp desviadora y el tubo podrá utilizarse para medir tensiones.

Desviación electromagnética. Supongamos que en la región punteada de la figura 6.24 existe un campo magnético uniforme **B** normal al plano del papel y dirigido hacia el lector. El electrón que llega al punto O con velocidad dirigida según el eje Ox de celeridad v, no varía ésta pero describe un arco de circunferencia (cfr. § 6.3) de radio

$$R = \frac{m\, v}{e\, B}$$

saliendo tangente a él en el punto M yendo a incidir sobre la pantalla en el punto N. Como el ángulo θ es pequeño, por ser $l \ll R$, podremos escribir

$$\text{tg}\ \theta \simeq \theta \simeq \text{sen}\ \theta = \frac{l}{R}$$

y también

$$Y = D\ \text{tg}\ \theta \simeq \frac{D\, l}{R} = (D\, l) \left(\frac{e}{m\, v} \right) B \tag{6.47}$$

Donde resulta que la desviación sobre la pantalla es proporcional al campo magnético.

Utilización del osciloscopio. La principal utilización del osciloscopio es, como su nombre indica, para el estudio de oscilaciones. Sin entrar en detalles, diremos que las oscilaciones mecánicas pueden traducirse en oscilaciones de un potencial eléctrico (o de una corriente) que obedezcan la misma ley de variación con el tiempo. Si dicho potencial lo llevamos a las placas de desviación vertical (o dicha corriente a las bobinas de desviación vertical), mientras que la desviación horizontal la hacemos proporcional al tiempo, sobre la pantalla se moverá la mancha luminosa obedeciendo a las ecuaciones

$$y = f(t) \qquad x = k\, t \qquad \text{de donde} \qquad y = f\left(\frac{x}{k} \right)$$

es decir, la persistencia de la fluorescencia en cada punto de la pantalla puede ser suficiente para observar en ella la curva $y = f(x/k)$ que es semejante

a $y = f(x)$ salvo el coeficiente de distorsión k (cfr. § 15.6, pág. 274, tomo I) y nos permite *ver* la forma de la onda. La desviación proporcional al tiempo se anula periódicamente (si no se haría demasiado grande) dando lugar a la llamada *onda en dientes de sierra* (fig. 6.25).

Si la oscilación estudiada fuera sinusoidal, aplicando a las placas de desviación horizontal una ddp sinusoidal de frecuencia variable a voluntad, podríamos conseguir sobre la pantalla curvas de Lissajous (cfr. § 10.6, pág. 162, tomo I) que nos permitirían determinar la frecuencia de la oscilación en estudio, por comparación con la de la oscilación conocida.

6.17 Partícula cargada en movimiento en un campo electromagnético; efecto Hall. Consideremos una partícula de masa m y carga q que se mueva con velocidad $\mathbf{v}$ en una región del espacio donde existan simultáneamente un campo eléctrico $\mathbf{E}$ y un campo magnético $\mathbf{B}$. La fuerza resultante que se ejerce sobre la partícula será, evidentemente,

$$\mathbf{F} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \tag{6.48}$$

cualesquiera que sean las direcciones de estos vectores, el campo magnético no incrementará la celeridad de la partícula. En efecto: multiplicando escalarmente por $\mathbf{v}$ los dos miembros de la ecuación 6.48 y teniendo en cuenta la segunda ley de Newton (ec. 7.4, página 89, tomo I) resulta

$$m \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{v} = q\,(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \cdot \mathbf{v})$$

o sea

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} m\, \mathbf{v}^2\right) = q\, \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

ya que el segundo sumando del paréntesis es nulo por ser el producto escalar de dos vectores perpendiculares. En esta última ecuación vemos que a la variación de su energía cinética sólo contribuye el campo eléctrico $\mathbf{E}$.

Consideremos ahora una tira metálica de anchura a y grosor g por la que circula una corriente eléctrica de intensidad I.

Considerando los ejes xyz de la figura 6.26, los electrones libres se moverían en el sentido negativo del eje z y en el conductor existiría un campo eléctrico $\mathbf{E}$ dirigido en el sentido positivo del eje z, que sería el que mantiene la corriente.

Ahora bien, al aplicar un campo magnético $\mathbf{B}$ de la dirección y sentido del eje y, los electrones libres se hallarán sometidos a una fuerza dada por la ecuación 6.48, donde $q = -e$, la cual tiene una componente según el semieje $-x$ que llevará los electrones

hacia el borde izquierdo que se irá cargando así negativamente, mientras el derecho se irá cargando positivamente al ser abandonado por los electrones libres. Este fenómeno proseguirá hasta que

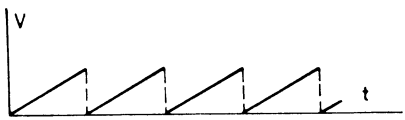


FIG. 6.25 Onda en dientes de sierra.

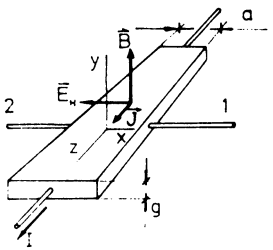


FIG. 6.26 Efecto Hall.

el campo creado por estas distribuciones ejerza sobre los electrones una fuerza opuesta a la debida al campo magnético, es decir, que aquél sea

$$\mathbf{E}_H = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \tag{6.49}$$

en cuyo momento ya los electrones seguirán moviéndose a lo largo del eje x en condiciones estacionarias. Al campo $\mathbf{E}_H$ se le llama *campo eléctrico de Hall* en recuerdo del físico americano EDWIN HERBERT HALL (1855-1938), descubridor de este efecto que lleva su nombre.

Ahora bien, $\mathbf{v}$ es la velocidad media de los electrones que está relacionada con la densidad de corriente $\mathbf{J}$ mediante la ecuación

$$\mathbf{J} = -e\,N\,\mathbf{v} \tag{6.50}$$

(cfr. § 4.2) donde N es el número de electrones libres por unidad de volumen. Sustituyendo $\mathbf{v}$ en la ecuación 6.49 tenemos

$$\mathbf{E}_H = \frac{1}{e\,N}\,\mathbf{J} \wedge \mathbf{B} \tag{6.51}$$

o sea, dirigido según el semieje $-x$, pues $e > 0$ por ser el valor absoluto de la carga del electrón. Entre los bordes izquierdo y derecho aparecerá una ddp $V_H = E_H\,a$ a la que se da el nombre de *fem Hall*. Pero (ec. 6.51) $E_H = \dfrac{1}{e\,N}\,J\,B$, ya que $\mathbf{J}$ y $\mathbf{B}$ son perpendiculares, luego

$$V_H = \frac{a}{e\,N}\,J\,B \quad \text{y como} \quad J = \frac{I}{a\,g}$$

resulta

$$V_H = \frac{I\,B}{e\,N\,g} \quad \text{y haciendo} \quad R_H = \frac{1}{(-e)\,N} \tag{6.52}$$

queda

$$V_H = -R_H \frac{I\,B}{g} \tag{6.53}$$

donde R_H es el llamado *coeficiente de Hall.*

La fem Hall V_H puede medirse llevando los electrodos 1 y 2 a un *potenciómetro* que permita medir la fem con precisión. Para fijar ideas, podríamos imaginar que los electrodos 1 y 2 fueran a las placas desviadoras de un osciloscopio, con lo cual no habría corriente y la ddp medida sería la fem Hall. No obstante, un osciloscopio ordinario no tendría sensibilidad suficiente para medirla.

Conocidas las cantidades I, B y g, la medida de V_H permitiría conocer R_H y como de la ecuación 6.52 resulta

$$N = \frac{1}{(-e)\,R_H} \tag{6.54}$$

el conocimiento del coeficiente de Hall permite conocer el número de electrones por unidad de volumen del metal examinado.

En el caso considerado de la conducción metálica deberá ser $R_H < 0$. Así ocurre, en efecto, en metales como el Cu, Ag, Au, Li, Na, K, Ni, pero en algunos otros como el Fe y Co, $R_H > 0$. Esto nos indica que la teoría clásica de la conducción eléctrica no es adecuada, pues si $R_H > 0$ los portadores deberían ser cargas positivas que cargaran positivamente el borde izquierdo. La explicación de este efecto Hall «anómalo» requiere la utilización de la teoría cuántica de la conducción eléctrica en la cual no podemos profundizar en este libro. No obstante, este hecho nos enseña hasta dónde puede llegar la teoría clásica. La teoría cuántica de la conducción eléctrica explica todos los fenómenos que explica la clásica pero va más allá, pues es capaz de explicar también el efecto Hall anómalo. El hecho de haber podido interpretar el efecto Hall normal con la teoría clásica se debe a que la expresión cuántica se reduce a la clásica cuando la banda de conducción está casi vacía, caso de los metales que den aproximadamente 1 electrón libre por átomo. También coincide, salvo cambio de signo, cuando la banda de conducción está casi llena. Pero ello equivale a considerar que los portadores son huecos y su banda de conducción casi vacía. Puede comprenderse esto imaginando una calle ancha por donde circulan pocos coches, está casi

vacía. Los coches se mueven con libertad. Si hubiera un embotellamiento, estaría casi llena y no circularían bien. De haber un hueco, el coche detrás de él pasa a ocuparlo y el hueco se desplaza en sentido contrario al coche. El coche de más atrás pasará a ocuparlo y el hueco volverá a desplazarse. Podríamos seguir el movimiento del hueco en la calle (banda) casi llena de coches (electrones).

Si la tira considerada fuera de semiconductor tipo *n*, en vez de metálica, tendríamos un efecto Hall normal, mientras que si fuera semiconductor tipo *p*, los portadores son positivos y en la ecuación 6.52 habría que sustituir $-e$ por e, con lo que tendríamos un coeficiente de Hall positivo. La medida de R_H en un semiconductor puede indicarnos qué tipo de impurezas domina en él.

El efecto Hall constituye un poderoso auxiliar para el estudio de la estructura electrónica de los sólidos. Podemos ilustrar algunas de sus aplicaciones con el siguiente

Ejemplo. La plata tiene un coeficiente Hall $R_H = -9 \times 10^{-11}$ m³/C y una resistividad $\rho = 1{,}59 \times 10^{-8}$ Ω·m. Sabemos también que la carga y la masa del electrón son $-e = -1{,}60 \times 10^{-19}$ C, $m = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg.

Busquemos primeramente cuántos electrones libres tiene por m³ la plata: La ecuación 6.54 nos da

$$N = \frac{1}{(-1{,}60 \times 10^{-19})(-9 \times 10^{-11})} = 7 \times 10^{28} \text{ electrones/m}^3$$

Con este nuevo dato, podemos buscar el valor medio del tiempo entre choques consecutivos, llamado *tiempo de relajación* τ a la temperatura ordinaria, que es a la que corresponde la resistividad dada. La ecuación 4.10 *bis* nos da

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}\,\frac{N e^2 L}{m v}\,.$$

de donde

$$\tau = \frac{L}{v} = \frac{2m}{\rho N e^2} = \frac{2(9{,}1 \times 10^{-31})}{(1{,}59 \times 10^{-8})(7 \times 10^{28})(1{,}60 \times 10^{-19})^2} = 6 \times 10^{-14} \text{ s}$$

De la densidad y masa atómica de la plata, se deduce que tiene $6 \cdot 10^{28}$ átomos/m³, número que comparado con los $N = 7 \cdot 10^{28}$ electrones libres/m³ nos indica que da poco más de 1 electrón libre/átomo.

6.18 Magnetohidrodinámica. Consideremos ahora un fluido fuertemente ionizado en el que la densidad cúbica de carga sea nula en todos los puntos por haber tanta carga positiva como negativa en todo volumen. Imaginemos que en dicho fluido ionizado o *plasma* se mueve una columna de fluido con velocidad $\mathbf{v}$ respecto al resto. Para fijar ideas, tomemos un sistema de ejes coordenados cartesianos rectangulares en el que el eje Oz tenga la dirección del movimiento de la columna y sentido opuesto al de su velocidad (fig. 6.27) y apliquemos un campo magnético $\mathbf{B}_y$ paralelo a Oy. Al igual que ocurre en el

efecto Hall, los portadores positivos sufrirán desviaciones hacia la región de las x positivas mientras los negativos las sufrirán en sentido opuesto, creándose un campo eléctrico que satisfará a una ecuación análoga a la 6.49 y estableciéndose un sistema de corrientes como el representado en la figura 6.28 que es una sección de la figura 6.27 normal al eje *Oz*.

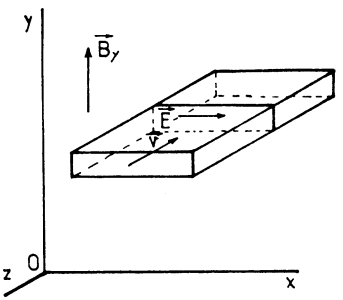


FIG. 6.27 Columna en movimiento en un plasma.

Estas corrientes están constituidas por el movimiento de portadores positivos en un sentido y de negativos en el opuesto, con lo que suman sus contribuciones a la intensidad. En el interior de la columna, la fuerza que ejerce el campo magnético sobre las corrientes está dirigida en el sentido positivo del eje *Oz*, es decir, frena a la columna. En cambio, por encima y por debajo de ésta, la fuerza es de sentido opuesto a causa del sentido de la corriente; por

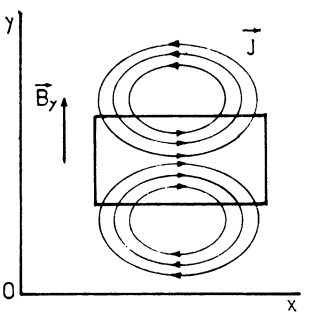


FIG. 6.28 Corrientes inducidas por el movimiento del plasma en un campo magnético.

tanto, acelera en el sentido de movimiento de la columna el plasma, que estaría en reposo de no haber campo magnético. El efecto, es análogo al de la viscosidad, pero las causas son muy diferentes, pues ahora se debe al movimiento relativo en el seno de un campo magnético.

Este efecto puede aprovecharse para construir un generador magnetihidrodinámico (fig. 6.29) consistente en dos placas conductoras por entre las que

circula un gas ionizado por estar a temperatura muy elevada. El campo magnético aplicado lleva los iones positivos hacia una placa y los negativos hacia la otra, cargándolas con signos opuestos y pudiendo mantener así una corriente en un circuito exterior.

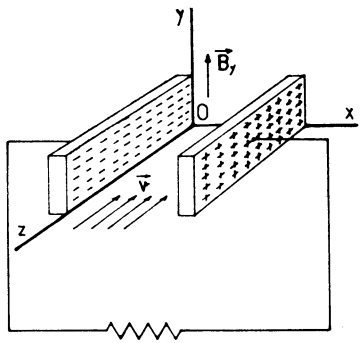


FIG. 6.29 Generador magnetohidrodinámico.

7

Propiedades magnéticas de la materia

Los fenómenos magnéticos estudiados hasta ahora tenían lugar en el vacío, o si se quiere en el aire que es magnéticamente casi igual, y la propiedad del mismo de transmitir a distancia las fuerzas magnéticas venía caracterizada por su permeabilidad magnética μ_0. Ahora bien, la presencia de un medio material altera las propiedades magnéticas del espacio de manera análoga a como altera las propiedades eléctricas del mismo y el campo magnético debido a una excitación **H** será igual al que ésta produciría en el vacío, más el que crean las *corrientes de Ampère* circulantes por el interior de la materia y que este físico previó en su interpretación del magnetismo de los imanes.

No podremos efectuar, en este capítulo, un análisis detallado del magnetismo en la materia, por carecer aún de los conocimientos necesarios de Física Atómica, pero podremos, no obstante, adquirir un primer conocimiento de los fenómenos macroscópicos admitiendo la existencia de las mencionadas corrientes de Ampère.

7.1 Comportamiento de un material en un campo magnético no uniforme. Imaginemos que se dispone de un solenoide recto capaz de crear en su región central un campo magnético muy intenso (por ejemplo 3 T). En las bocas del solenoide, el campo será ya menos intenso y a poca distancia, ya fuera del solenoide, tendremos la región de más fuerte disminución del campo con la distancia. Si colocamos en esta región un cuerpo C (fig. 7.1) se hallará sometido a una fuerza mayor que la que sobre él se ejercería en cualquier otro punto. Dicha fuerza puede tender a llevarlo hacia el solenoide o a alejarlo de él. En este último caso, se dice que el cuerpo es *diamagnético* y la fuerza que experimenta suele ser muy pequeña frente a su peso. En el primer caso, la fuerza puede ser análogamente débil y se dice que el cuerpo es *paramagnético,* o puede ser mucho mayor

que el peso del cuerpo y se dice, entonces, que el cuerpo es *ferromagnético*. Son ejemplos de cuerpos diamagnéticos, el agua, ClNa, cuarzo, la mayoría de compuestos inorgánicos y casi todos los compuestos orgánicos. Son paramagnéticos, entre otros, el O_2 líquido, SO_4Ni, Cl_2Cu, Al, Na, etc., y ferromagnéticos el Fe, Co, Ni, y ciertas aleaciones y compuestos cristalinos.

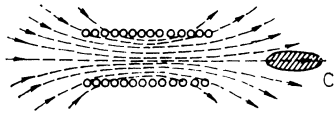


FIG. 7.1 Acción de un campo magnético sobre un cuerpo *C*.

7.2 Interpretación del paramagnetismo y del diamagnetismo. En el estudio de los dieléctricos, los efectos observados los interpretábamos por la polarización eléctrica del medio. Es decir, cada molécula se polarizaba en la dirección del campo eléctrico o tendía a orientarse según él si era ya de por sí un dipolo. Veíamos (§§ 3.1 y 3.2) que la susceptibilidad eléctrica era siempre positiva y la constante dieléctrica mayor que la unidad. En Magnetismo, llamaremos dipolo magnético a una corriente cerrada de muy poca extensión y (cfr. § 6.8) sabemos que un campo magnético le aplicaría un par que tendería a colocar su momento magnético en la dirección y sentido de dicho campo. Existe hoy evidencia suficiente para afirmar que los electrones de los átomos constituyen dipolos magnéticos y que se aparejan de manera que dos a dos tengan sus momentos magnéticos opuestos. No obstante, en los átomos que tengan subniveles incompletos puede haber electrones sin pareja que den al átomo un momento magnético no nulo y podríamos considerar al medio como una colección de dipolos magnéticos que bajo la acción de un campo magnético **B** exterior tenderían a orientarse con sus momentos magnéticos en la dirección y sentido de **B**. Un tal medio diremos que es *paramagnético* y se comprende que, en él, la agitación térmica tenderá a destruir la orientación de los dipolos igual que ocurría en los dieléctricos de moléculas polares.

Veamos que un material de este tipo experimentará la atracción por parte del solenoide mencionado en § 7.1. Una vez orientado un dipolo con su momento dirigido según el campo (fig. 7.2) al no ser éste uniforme tendrá una componente radial $\mathbf{B}_r$, la cual dará origen a una fuerza dirigida en sentido opuesto al momento magnético **M**. Es decir, que tendería a llevar el dipolo hacia el interior del solenoide de la figura 7.1, y si el dipolo es uno de los existentes en el

cuerpo C, éste se hallará sometido a un sistema de fuerzas atractivas por parte del solenoide.

Consideremos un electrón en su órbita que recorre f veces por segundo. Como por cada punto de la órbita pasa en 1 s una carga $-e\,f$, ello equivaldrá a una corriente de intensidad $I = e\,f$ que circula en sentido opuesto al del movimiento del electrón y a dicha órbita irá asociado un momento magnético **M** de la dirección y sentido que se representan en la figura 7.3 y módulo $e\,f\,S$, siendo S el área de la superficie plana limitada por la órbita. El momento cinético del electrón será un vector **L** de igual dirección que **M** pero de sentido opuesto (cfr. ec. 7.16, p. 99, tomo I).

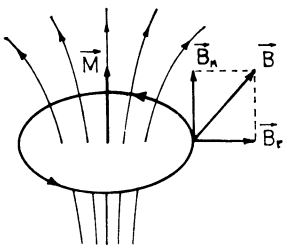


FIG. 7.2 La componente radial del campo da lugar a una fuerza de sentido opuesto a **M**.

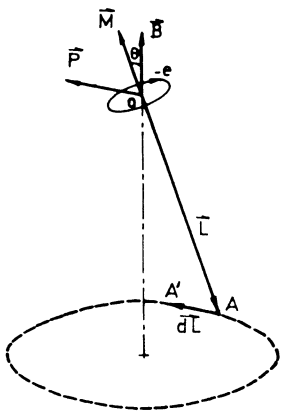


FIG. 7.3 Movimiento de precesión causante del diamagnetismo.

Al aplicar un campo magnético **B** que forme un ángulo θ con **M**, sobre el dipolo que constituye el electrón en su órbita se ejerce un par de momento **P** dado por la ecuación 6.14, el cual originará una variación del momento cinético del electrón regida por el teorema del momento cinético (cfr. ec. 7.18, p. 100, tomo I)

$$\mathrm{d}\mathbf{L} = \mathbf{P}\,\mathrm{d}t$$

Es decir, que como **P** es perpendicular a **L** también lo será d**L** y al cabo de un tiempo dt el momento cinético será el vector $A' - O$ en vez del $A - O$, con lo que el vector **L** describirá una superficie cónica de vértice O, semiángulo θ y eje determinado por **B**. Este movimiento de la órbita consistente en que su plano gire alrededor de **B** manteniendo θ constante, recibe el nombre de movimiento de *pre-*

cesión. En la figura 7.3 podemos ver que el sentido de esta precesión es opuesto al del movimiento del electrón en su órbita y por tanto el electrón tardará más en dar una vuelta alrededor de la dirección de **B** que si no hubiera precesión. Ello equivale a disminuir la componente de **M** según **B** o, lo que es igual, a originar un momento magnético de sentido opuesto al de **B**, que se superponga al primero. Este fenómeno consistente en que la aplicación de un campo magnético origina un momento magnético de sentido opuesto se conoce con el nombre de *diamagnetismo* y se comprende que exista en todos los materiales. Un material será paramagnético o diamagnético según cuál de los dos fenómenos predomine en él, pues ambos pueden estar presentes. Digamos, también, que los electrones libres contribuyen al paramagnetismo a causa de su momento magnético propio (*spin*) y al diamagnetismo a causa de su movimiento por el conductor. La explicación de esto exige conocimientos de Mecánica Cuántica que se salen del ámbito de este libro. Con ellos podría demostrarse que el efecto paramagnético es aproximadamente el doble que el diamagnético y que ambos son casi independientes de la temperatura.

7.3 Intensidad de imanación. En ausencia de campo magnético aplicado, los momentos magnéticos elementales tienen orientaciones distribuidas de tal manera que el momento magnético resultante en un volumen cualquiera es nulo si el medio es para- o diamagnético. La aplicación del campo magnético **B** origina, según acabamos de ver, la aparición de un momento magnético resultante de igual dirección que **B** y cuyo sentido es el de **B** o el opuesto según que el medio sea paramagnético o diamagnético, respectivamente. *Al momento magnético por unidad de volumen se le llama intensidad de imanación* **I** del medio y será un vector definido en cada punto de manera que considerando un volumen pequeño $d\tau$, su momento magnético **dM** será

$$\mathbf{dM} = \mathbf{I}\, d\tau \tag{7.1}$$

Estos momentos magnéticos elementales podemos considerarlos debidos a las corrientes de Ampère distribuidas por el medio. Imaginemos una rebanada de éste de espesor dz y considerémosla descompuesta en elementos de superficie (fig. 7.4 *a*), cada uno de los cuales sea un dipolo magnético cuyo momento magnético sea el adecuado. Cada tramo común a dos elementos contiguos estará recorrido por las corrientes respectivas en sentidos opuestos, con lo que se eliminarán los efectos magnéticos correspondientes y sólo quedarán los debidos a los tramos no comunes a dos elementos de superficie no

contiguos, que son los periféricos, los cuales constituyen una cinta de anchura dz (fig. 4.7 *b*) recorrida por una corriente de intensidad i igual a la supuesta para las corrientes de Ampère. Éstas podemos considerarlas atómicas, y en tal caso, llamando dS al área del ele-

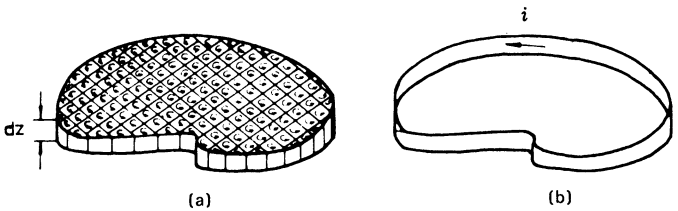


FIG. 7.4 *a*) distribución de corrientes de Ampère en una lámina de medio material, y *b*) corriente eléctrica equivalente a efectos magnéticos.

mento de superficie correspondiente a un átomo, el volumen ocupado por un átomo será $dS\,dz$ y a cada uno de ellos corresponderá un momento dipolar

$$d\mathbf{M} = \mathbf{I}\,dS\,dz = i\,d\mathbf{S}$$

de donde

$$i = I\,dz \tag{7.2}$$

relaciona la intensidad de la corriente que podemos considerar circula por la cinta de la figura 7.4 *b* con la intensidad de imanación. Se comprende que un bloque de material podemos imaginarlo descompuesto en láminas como la antes mencionada (fig. 7.5) y que el efecto

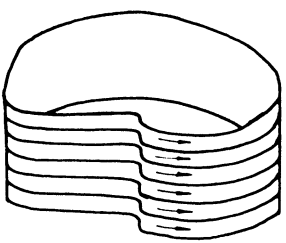


FIG. 7.5

magnético del material puede considerarse producido por la corriente que circula por la superficie lateral y prescindir, de esta manera, de la presencia de la sustancia, pudiéndola considerar sustituida por un solenoide de igual forma, cuya intensidad de corriente por unidad de longitud fuera igual a $|\mathbf{I}|$.

En las ecuaciones 7.1 y 7.2 vemos que las dimensiones de la intensidad de imanación son las de una intensidad de corriente dividida por una longitud, por lo que su unidad de medida será el A/m. Lo mismo ocurre con el campo magnético de excitación **H** (cfr. ec. 6.33) y el problema actual podemos enfocarlo de la manera siguiente: un campo **H** ha excitado el magnetismo dando por resultado la orientación de los dipolos en la materia, cuyo efecto es análogo al de la corriente que circula por la cinta ancha de la figura 7.5. Esta corriente, por su parte, produce una excitación magnética coincidente con la intensidad de imanación **I**, con lo que la excitación total será **H** + **I** y el campo magnético de inducción que se tendrá en cada punto del medio será

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{I}) \tag{7.3}$$

Queda claro, pues, que el campo magnético de inducción es la suma de dos términos, uno correspondiente al vacío y otro a la materia imanada.

7.4 Susceptibilidad y permeabilidad magnética. Los razonamientos del § 7.3 referentes a los fenómenos microscópicos del magnetismo han llevado a la ecuación 7.3, válida para cada punto del medio material. Los vectores que figuran en dicha ecuación representan magnitudes físicas que se miden a través de efectos macroscópicos, y así podemos decir que en los cuerpos para- y diamagnéticos **I** y **H** están relacionados por

$$\mathbf{I} = \chi \mathbf{H} \tag{7.4}$$

donde χ es una constante característica del medio en cuestión llamada *susceptibilidad magnética*. Como los vectores que relacionan son de igual sentido o de sentido contrario, según que el medio sea para- o diamagnético, respectivamente, tendremos

para medios paramagnéticos $\quad \chi > 0$

para medios diamagnéticos $\quad \chi < 0$

y como en el sistema giorgi los dos vectores tienen dimensiones iguales, χ será un número abstracto.

Sustituyendo la ecuación 7.4 en la 7.3 resulta

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H} \qquad \text{o sea} \qquad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{7.5}$$

donde

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi) \tag{7.6}$$

es la llamada *permeabilidad magnética del medio*. Como χ es siempre, en valor absoluto, mucho menor que 1, μ diferirá muy poco de μ_0 en los medios para- y diamagnéticos, y será

$$\mu > \mu_0 \text{ en los paramagnéticos}$$
$$\mu < \mu_0 \text{ en los diamagnéticos}$$

Las dimensiones de μ en el sistema giorgi serán, según se desprende de la ecuación 6.24,

$$[\mu] = \frac{[B]\,L^2}{[I]\,L} = \frac{M\,T^{-1}\,Q^{-1}\,L}{Q\,T^{-1}} = M\,Q^{-2}\,L$$

y su unidad, el T·m/A (cfr. § 6.10), veremos en el capítulo 8 que suele expresarse como henry/metro. Es también frecuente emplear la *permeabilidad magnética relativa* $\mu_r = \mu/\mu_0$, que será un número abstracto característico del medio.

Las ecuaciones de este § 7.4 se refieren al caso de medios homogéneos, isotropos y lineales. Sólo en tal caso pueden considerarse χ y μ como escalares constantes. En el caso más general serán magnitudes tensoriales, cosa que se sale del ámbito de este libro.

7.5 Ferromagnetismo. Hemos citado en § 7.1 la existencia de un tercer tipo de materiales, los ferromagnéticos, que sufrían acciones del mismo sentido que los paramagnéticos pero de intensidad mucho mayor. Vamos a describir primeramente algunos fenómenos macroscópicos de este tipo de materiales y posteriormente daremos una idea del origen íntimo de los mismos.

Consideremos un toro de hierro que no haya sido imanado y devanemos sobre él uniformemente un arrollamiento por el que pueda

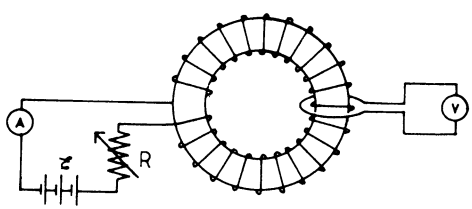


FIG. 7.6 Esquema de montaje para determinar la relación entre B y H.

circular una corriente señalada por el amperímetro A (fig. 7.6). Coloquemos también una espira, aislada del devanado anterior, que abrace al toro y se cierre sobre un instrumento de medida V que determi-

ne la fem que exista en dicha espira. Según veremos en el capítulo 8, existirá una fem proporcional a la velocidad de variación del flujo de inducción magnética Φ que atraviesa la espira. Así pues, partiendo de $H = 0$, $B = 0$, midiendo las fem en V podremos determinar las variaciones de Φ y por tanto de B. Llevando los valores de esta inducción magnética en ordenadas y el valor de $H = N\,I/2\,\pi\,R$ (cfr. § 6.14) en abscisas, se hallaría, al ir aumentando H desde cero, una curva

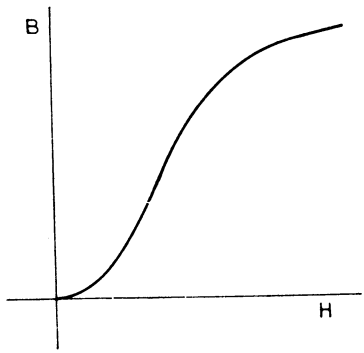


FIG. 7.7 Curva de primera imanación.

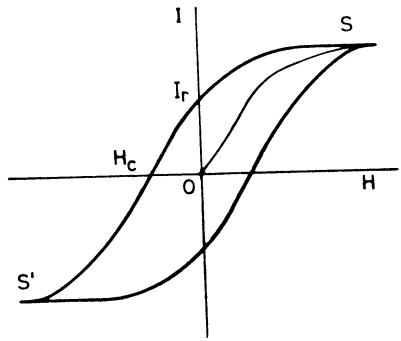


FIG. 7.8 Ciclo de histeresis.

como la representada en la figura 7.7. Es bien evidente que si aceptamos la ecuación 7.5, no puede considerarse constante la permeabilidad magnética μ. Por tanto, deberemos considerar que es función de **H**.

Si en ordenadas representáramos la intensidad de imanación

$$I = \frac{B}{\mu_0} - H$$

(cosa que podremos hacer si admitimos que los tres vectores de la ecuación 7.3 son de igual dirección y sentido en cada punto), la curva mencionada o curva de primera imanación veríamos que tiende asintóticamente a un valor llamado de *saturación magnética* (punto S en fig. 7.8). Disminuyendo posteriormente H, se observa que los valores que adopta I son superiores a los que adoptó en la primera imanación para los mismos valores de H y que al anular la excitación no desaparece I, sino que queda una *imanación remanente* I_r. Es decir, en ausencia de excitación exterior existe un momento magnético por unidad de volumen no nulo.

Para anular esta imanación aplicaremos un campo magnético de excitación de sentido contrario (invirtiendo el sentido de circulación

de la corriente por el devanado) y la imanación se anulará para un cierto valor H_c llamado *campo coercitivo*. Si seguimos aumentando H en este sentido, llegaremos a alcanzar la saturación S' para un campo H de igual valor que el correspondiente a S, pero de sentido opuesto. Disminuyendo ahora H se seguirá el tramo inferior de la figura 7.8, y al anular la excitación se alcanza una imanación remanente de igual valor pero sentido opuesto que la I_r obtenida antes. Volviendo a invertir el sentido de H seguiremos recorriendo el tramo inferior del lazo de la figura 7.8 hasta anular la imanación para un campo coercitivo de igual valor pero sentido opuesto que el H_c de antes, y si se sigue aumentando H, volverá a alcanzarse la saturación S, cerrándose el llamado *ciclo de histeresis*, el cual podríamos volver a recorrer haciendo variar H de la misma manera que antes. De la curva de figura 7.8 vemos ya que I no sólo depende de H, sino de los estados de imanación anteriores.

Los valores de la imanación remanente y del campo coercitivo varían de unas sustancias a otras. En el caso del hierro dulce, el campo coercitivo es mucho menor que para el acero. Por eso, los núcleos de maquinaria eléctrica que deban estar sometidos a excitaciones cíclicas suelen ser de hierro dulce, porque en tal caso el ciclo de histeresis es estrecho, cosa que interesa a fin de reducir al mínimo las pérdidas de energía, pues el área de dicho ciclo es proporcional a la energía disipada en el núcleo en forma de calor a causa de la histeresis cada vez que se recorre el ciclo.

Cuando en ordenadas se representan los valores de B en vez de los de I, la curva de primera imanación no tiene una asíntota hori-

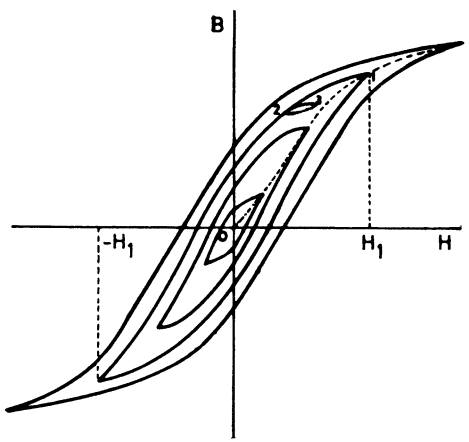


FIG. 7.9 Ciclos de histeresis sin alcanzar la saturación.

zontal, sino inclinada (fig. 7.7). Esto influye algo en la forma de los ciclos de histeresis tal como se observa en la figura 7.9, en la que se han representado ciclos obtenidos sin llegar a alcanzar la saturación. En uno de ellos, se disminuye H de manera que el punto figurativo pase de 1 a 2; pero si en este momento se hace crecer de nuevo el campo H, el punto figurativo pasará de 2 a 3 por el tramo de abajo, y si de nuevo disminuimos H, los valores de B que se obtienen son los del tramo superior del lacito 3-2. Vemos, una vez más, que la imanación del material depende de su historia magnética. Por ello convendrá distinguir entre el caso de que el material haya sido sometido a una imanación simétrica cíclica o no. En el primer caso, al valor de B correspondiente a la intersección del ciclo con el eje de ordenadas se le da el nombre de *inducción residual*, mientras que en el segundo caso, el valor de B que queda en el material una vez suprimida la excitación H se denomina *magnetismo remanente*. Si se suprimiera H tras haber alcanzado la saturación, el valor de B que queda en el material se llama *retentividad*.

Otro aspecto interesante del ferromagnetismo es su dependencia de la temperatura, pues los cuerpos ferromagnéticos pierden la calidad de tales a temperaturas elevadas, convirtiéndose en paramagnéticos. Podemos poner esto de manifiesto mediante una varilla de níquel soportada por un imán en herradura. Calentando la varilla, observaremos que al alcanzar unos 350°C cae, pues el imán ya no le ejerce una fuerza suficiente para compensar su peso. La temperatura θ a la cual se pierde el carácter ferromagnético recibe el nombre de *punto de Curie*. Es característica de cada sustancia, pero no está definida de una manera neta, sino que las propiedades magnéticas se modifican rápidamente en un pequeño intervalo de temperaturas. Muy por encima del punto de Curie (unos 100°C), la susceptibilidad magnética obedece la ley de Curie-Weiss

$$\chi = \frac{C}{T - \theta}$$

donde C es la llamada *constante de Curie*.

Los puntos de Curie del Fe, Co y Ni son 750°C, 1100°C y 350°C, aproximadamente.

7.6 Dominios de Weiss. Los fenómenos macroscópicos que acabamos de ver tienen su origen en la estructura atómica de los materiales ferromagnéticos y vamos a intentar dar una idea de él. El hecho de que la susceptibilidad magnética sea positiva y que la tem-

peratura influya en su valor, como ocurre en los cuerpos paramagnéticos, nos lleva a pensar en que sus átomos o moléculas tengan un momento magnético propio, es decir, sean de por sí dipolos magnéticos, y el hecho de que el valor de la susceptibilidad pueda ser muchísimo mayor que en los cuerpos paramagnéticos nos indica que no nos hallamos ahora ante dipolos individuales que se muevan libremente, sino ante grupos numerosos de ellos orientados todos de igual manera dentro de cada grupo. Dentro de cada grupo, aunque no exista excitación exterior, la intensidad magnética es la de saturación, pues el momento magnético por unidad de volumen será el máximo dentro de cada grupo. Pronto podremos comprender el porqué de esto, pero bueno será, para empezar, exponer el llamado *modelo de Ewing,* que nos dará ya una base experimental.

Consiste dicho modelo en un tablero horizontal sobre el que se han distribuido reticularmente gran número de pequeñas brújulas. Mediante un sistema de espiras que rodean al tablero, se consigue compensar el campo magnético terrestre en todos los puntos del tablero ajustando la intensidad de la corriente, y logrado esto, se observa que las brújulas se orientan por sí mismas formando grupos en los cuales son paralelas entre sí. Sacudiendo el tablero se observa una gran estabilidad de los grupos formados. Variando poco a poco el campo exterior, EWING reprodujo cualitativamente el recorrido de la curva de imanación.

Los grupos que se forman en el modelo de Ewing en ausencia de campo magnético exterior dan idea del fenómeno de la *imanación espontánea,* que tiene lugar en los cuerpos ferromagnéticos, consistente en que en pequeñas regiones (volúmenes comprendidos entre 10^{-8} y 10^{-9} cm^3 que contienen unos 10^{15} átomos), todos los dipolos se orientan de igual manera a causa de unas fuerzas a las que WERNER HEISENBERG (n. 1901) ha llamado *fuerzas de intercambio* (Austausch), que son de origen cuántico y que a corta distancia son muchísimo más intensas que las interacciones magnéticas entre dipolos.

En el año 1907, mucho antes de conocerse la existencia de las fuerzas de intercambio, PIERRE WEISS (1865-1940) consideró ya la existencia de la imanación espontánea, y basándose en la teoría termodinámica del paramagnetismo de LANGEVIN dio un fundamento termodinámico a la teoría de los *dominios ferromagnéticos,* que fue como llamó a las regiones mencionadas. El hecho de que un pedazo de hierro no cree, en general, un campo magnético, se debe a que al existir un número enorme de dominios, cada uno con una orientación particular, el momento magnético resultante es nulo. El propio Weiss puso de manifiesto que los cuerpos cristalinos tienen direcciones de

imanación privilegiadas, llamadas direcciones de *imanación fácil,* que en el hierro coinciden con los ejes de simetría del cristal. Así, un monocristal de hierro se satura al aplicarle un campo H en la dirección de sus aristas de 560 A/m, mientras que si la dirección del campo aplicado fuera la de la diagonal del cubo o de una de sus caras, para tener la saturación haría falta un campo de más de 35 000 A/m. Todo ello lleva consigo que los dominios se imanen espontáneamente en las direcciones de imanación fácil (fig. 7.10).

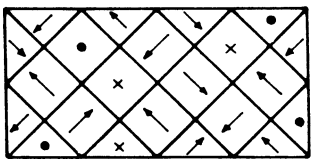


FIG. 7.10 Aspecto microscópico de los dominios. Las flechas indican las direcciones de imanación. Las aspas indican una imanación perpendicular al papel y hacia adentro del dibujo. Los puntos indican perpendicularidad al papel pero hacia el lector.

Imaginemos una barra de hierro sobre la que devanamos un solenoide. Al circular por éste una corriente débil, creará un campo magnético débil que ejercerá, sobre los dipolos, pares de fuerzas que

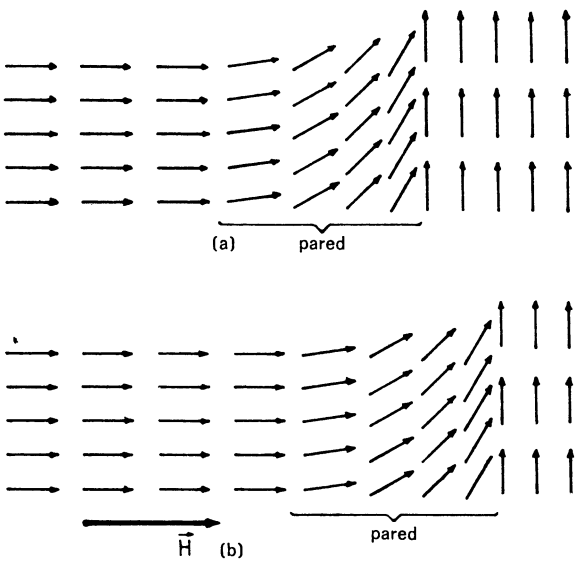


FIG. 7.11 *a*) Dos dominios y la pared que los separa en ausencia de campo exterior. *b*) Efecto de un campo exterior: la pared se ha desplazado.

tenderán a orientarlos según el campo. Veamos qué sucede en dos dominios próximos, uno de los cuales esté orientado en la dirección y sentido del campo. Entre ambos dominios existe una región de transición en la que los dipolos tienen orientaciones que llevan de la correspondiente a un dominio a la del otro. Dicha región de transición se denomina *pared*. Al aplicar un campo exterior de la dirección y sentido correspondientes al dominio de la izquierda en la figura 7.11, los dipolos de éste no se verán afectados porque el momento del par a que se encuentren sometidos (ec. 6.14) será nulo. Los dipolos de la pared sí se hallarán sometidos a pares orientadores que alinearán los dipolos de la parte izquierda de la pared con un pequeño dispen-

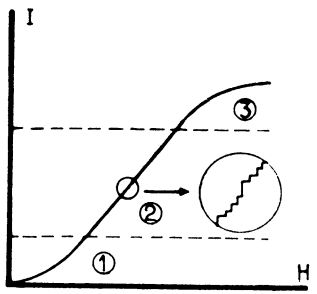


FIG. 7.12 Proceso de imanación. Zona 1, desplazamientos reversibles de las paredes. Zona 2, desplazamientos irreversibles de las paredes. Zona 3, rotación de la imanación en los dominios.

dio de energía, pues girarán un ángulo pequeño, y afectarán sensiblemente a los dipolos del dominio de la derecha más próximos a la pared, pues para ellos el par es máximo y las fuerzas de intercambio son menores que para los dipolos situados más a la derecha. El resultado es un desplazamiento de la pared que aumentará el volumen del dominio de la izquierda a expensas del de la derecha. Esto hace que si antes estaban compensadas las componentes de los momentos magnéticos, ahora predominan las componentes según **H** por haber aumentado el volumen de los dominios orientados en esta dirección. Ello lleva consigo que el valor medio del momento magnético por unidad de volumen sea un vector $\overline{\mathbf{I}}$ de igual dirección que **H**. Es este valor medio el que es accesible a la medida. Si el campo aplicado no fuera exactamente paralelo a una dirección de imanación fácil, la reducción de los dominios orientados menos favorablemente dejaría aún los momentos sin estar dirigidos exactamente en la dirección de **H** y haría falta un campo muchísimo más intenso para hacer que todos

los dipolos estuvieran orientados según **H** y obtener así la máxima imanación posible.

Así, con campos relativamente débiles (zona 1 en fig. 7.12) tenemos desplazamientos reversibles de las paredes. La presencia de impurezas u otros materiales impide que estos desplazamientos tengan lugar con toda libertad y los limita. Pero si aumentamos el campo, podrá producirse un «salto» de una pared y el aumento de volumen del dominio tiene lugar de manera brusca e irreversible. Ello origina un salto del momento magnético en la dirección del campo y por tanto un salto de **I**, y estos saltos hacen subir más rápidamente la curva de imanación (zona 2 de fig. 7.12). Devanando sobre el cuerpo en estudio un arrollamiento que vaya a un altavoz a través de un amplificador, al ir aumentando H se perciben una serie de chasquidos debidos a los saltos mencionados y que se han representado en la ampliación de una pequeña zona de la curva de imanación (fig. 7.12). Este efecto recibe el nombre de *efecto Barkhausen* en honor de su descubridor. Lograremos así que los dominios se hallen todos imanados en direcciones próximas a la de **H**, pero como lo que tenemos es un conjunto de cristales diferentemente orientados, la mayoría estarán imanados en direcciones de imanación fácil no coincidentes con la de **H**, y tal como indicamos ya, para lograrlo será necesario aplicar campos muy intensos (zona 3 en fig. 7.12) hasta lograr la imanación máxima (saturación). La supresión del campo exterior lleva consigo el que desaparezca esta rotación forzada de los dominios, pero como los desplazamientos de las paredes habían llevado a una cierta imanación y eran irreversibles, lógico es que quede una imanación remanente, tal como se señaló en § 7.5.

Para terminar, diremos que los dominios de Weiss han sido vistos y fotografiados (al microscopio) gracias a los trabajos de FRANCIS BITTER en 1931, quien, extendiendo sobre los cristales ferromagnéticos una solución coloidal de Fe_2O_3, observó como este óxido se distribuía según rectas que de un dominio al contiguo eran perpendiculares.

7.7 Imanes permanentes. Ya hemos visto que puede darse imanación a un cuerpo ferromagnético sometiéndolo a la acción de un campo magnético exterior y que al suprimir éste queda una imanación remanente (§ 7.5) debida a que los dominios están orientados en direcciones próximas a las de **H.** Los estudios realizados en Grenoble por NÉEL en 1927 indicaron que las inclusiones de sustancias extrañas no magnéticas daban origen a campos desimanadores, cosa que también producen las cavidades internas en los imanes. En vista de ello, para poder disponer de un *imán permanente*, es decir, un cuerpo que conserve su imanación en ausencia de excitación exterior, será necesario que dicho campo desimanador sea inferior al campo coercitivo y es por esto por

lo que el hierro dulce no sirve para fabricar imanes permanentes, dada la pequeñez de su campo coercitivo. Trabajos posteriores del mismo autor pusieron de manifiesto que las paredes de los dominios tienden a detenerse en dichas inclusiones y que su desplazamiento está dificultado por las tensiones internas. También puso de manifiesto NÉEL que cuando los granos de la sustancia son dominios simples sin paredes, los cambios de la imanación sólo pueden deberse a rotaciones, lo que exige la aplicación de campos muy intensos, para variar su dirección.

Así, se fabrican imanes con hierro pulverizado muy finamente, o constituidos por hilillos de grosor inferior al de una pared, y se da al conjunto la forma y tamaño convenientes, se prensan y se llevan a una temperatura superior al punto de Curie, con lo que la presión y lo elevado de la temperatura da compacidad a la pieza. Después se da tratamiento térmico en un campo magnético para que, al descender la temperatura por debajo del punto de Curie, adquiera las propiedades direccionales. El mismo fin se logra con ciertas aleaciones en las cuales las partículas finas se forman de manera natural.

Las ferritas, óxidos de hierro combinados con óxidos de otros metales, son útiles también como imanes permanentes y presentan la ventaja de tener una gran resistividad. La teoría de las ferritas también se debe a NÉEL. Daremos una idea breve con un ejemplo. Cuando se combina el óxido de hierro Fe_2O_3 con óxido de níquel, se forma una ferrita cuya fórmula podemos expresar en la forma $NiFe_2O_4$. Los átomos de oxígeno, más voluminosos, forman el esqueleto de la estructura sólida; se hallan apilados como bolas de billar y los átomos de Fe y Ni, más compactos, se hallan alojados en huecos entre ellos. En algunos huecos, un átomo de metal tiene equidistantes cuatro vecinos (posición *A*); en otros tiene seis (posición *B*). En la ferrita de níquel, la mitad de los átomos de Fe están en posiciones *A* y la otra mitad en posiciones *B*. Los de Ni están todos en posiciones *B*. NÉEL sugirió que los átomos en las posiciones *A* y *B* tenían sus momentos magnéticos de sentidos opuestos, por lo que puede esquematizarse

$$\underset{\rightarrow}{Fe^{+++}} \qquad (\underset{\leftarrow}{Ni^{++}} \ \underset{\leftarrow}{Fe^{+++}}) \qquad 4\,O^{=}$$

Según esto, los momentos magnéticos de los dos átomos de hierro se compensan y el momento magnético resultante de la molécula total será el del ion de níquel. Los imanes de ferrita se construyen prensando el polvo de los óxidos, dándole la forma adecuada, etc., tal como se ha indicado anteriormente.

7.8 Polos magnéticos. Imaginemos un imán permanente en forma de barra y coloquémoslo horizontal y sobre él una cartulina en la que espolvoreamos limaduras de hierro. Percutiendo sobre ella, las limaduras se orientarán según las líneas de fuerza del campo magnético creado por el imán, dibujando el llamado *espectro magnético* (fig. 7.13). Las líneas de fuerza parecen salir todas de un punto (*N* en fig. 7.13) e ir a parar a otro (*S* en fig. 7.13) a los que se da el nombre de *polos del imán*. Si el imán pudiera moverse libremente, giraría orientándose según la dirección aproximada del meridiano terrestre, yendo *N* hacia el norte y *S* hacia el sur, por lo que dichos puntos reciben, respectivamente, los nombres de *polo norte* y *polo sur* del imán.

El espectro magnético observado es análogo al que se obtiene con un solenoide de iguales dimensiones que el imán (fig. 6.19), por lo que también po-

dríamos considerar asociados al solenoide un polo N y otro S cuya posición en los extremos dependerá del sentido de la corriente. En virtud de la ecuación 6.25 y de lo visto en § 6.14, podemos dar la regla nemotécnica siguiente para identificar los polos del solenoide: Mirando uno de los extremos desde fuera, la corriente puede circular en el sentido indicado en la figura 7.14 *a*, en cuyo caso, en dicho extremo habría un polo N, o en el opuesto (fig. 7.14 b), en cuyo caso el polo sería S.

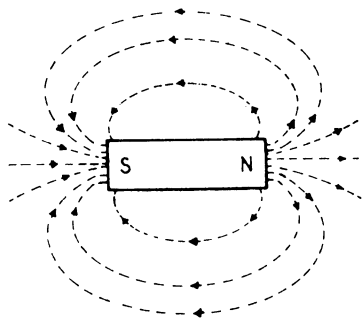


FIG. 7.13 Espectro magnético de una barra imanada.

En realidad, el campo creado por el imán de la figura 7.13 se debe a los dipolos orientados existentes en su masa. Si rompiéramos el imán en dos o más pedazos, en cada uno de ellos aparecerían dos polos, lo que concuerda con el hecho de que el magnetismo se halla distribuido por toda la masa del imán. Hasta la fecha no ha sido posible nunca aislar un polo magnético único y ello es comprensible si se admite toda la teoría vista hasta el momento.

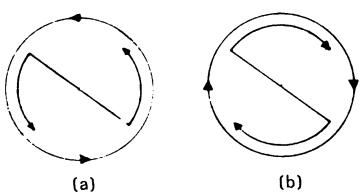


FIG. 7.14 *a*) Extremo norte de un solenoide (o espira) visto desde fuera. *b*) Extremo sur de un solenoide (o espira) visto desde fuera.

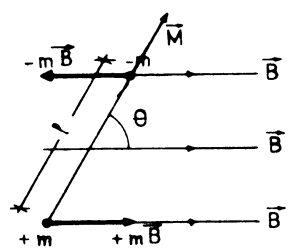


FIG. 7.15 Dipolo magnético en un campo **B**.

Se mencionó al principio del capítulo 6 que antes de AMPÈRE se pretendía seguir en Magnetismo un camino paralelo al de la Electrostática y los polos de una barra se suponían constituidos por dos *masas magnéticas* $\pm m$ separadas por la distancia l existente entre ellos, con lo que el imán se comportaría en un campo magnético de igual manera que un dipolo eléctrico en un campo eléctrico. Es decir, en un campo magnético uniforme **B** el imán se hallaría

sometido a dos fuerzas $\pm m\,\mathbf{B}$ aplicadas en sus polos, que constituyen un par de momento $m\,B\,l$ sen θ (fig. 7.15). La simetría de la barra imanada hace que el momento magnético resultante **M** de todos los dipolos elementales que la integran sea un vector que pase por los polos dirigido en el sentido SN. En el campo magnético **B** se hallará sometido a un par (cfr. ec. 6.14) cuyo momento vale $M\,B$ sen θ, que igualado con el del par de fuerzas $\pm m\,\mathbf{B}$ da

$$m\,B\,l \text{ sen } \theta = M\,B \text{ sen } \theta \qquad \text{de donde} \qquad m = \frac{M}{l}$$

Las dimensiones de la masa magnética, también llamada *intensidad de polo*, serán, pues,

$$[m] = [I]L^2/L = [I]L$$

y su unidad giorgi será el *ampère·metro* (A·m).

Las experiencias realizadas por COULOMB con imanes largos (cfr. cap. 6) le llevaron a formular una ley análoga a la de la Electrostática que se expresa modernamente en la forma

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{m\,m'}{r^2}$$

donde m y m' son las masas magnéticas puestas en presencia y r la distancia que las separa. De aquí y de la expresión

$$\mathbf{F} = m'\,\mathbf{B}$$

resulta que el campo creado por una masa magnética m en un punto a distancia r será radial, del sentido de alejamiento si $m > 0$, o de acercamiento si $m < 0$ y cuyo módulo será

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{m}{r^2}$$

Esto equivale a decir que, en dicho punto, el polo considerado crea una excitación magnética

$$H = \frac{1}{4\pi}\,\frac{m}{r^2}$$

Así, podríamos deducir una expresión análoga a la del teorema de Gauss

$$\int_S \mathbf{H}\cdot d\mathbf{S} = m$$

es decir, que el flujo de **H** a través de una superficie cerrada S es igual a la masa magnética total existente en su interior. Esto permite considerar que las líneas de fuerza del campo **H** nacen en los polos norte y van a parar a los sur. Es decir, que en el interior de los imanes no tengan el mismo sentido que las líneas de fuerza del campo magnético B. En efecto: Consideremos un camino cerrado coincidente en el exterior del imán con una línea de fuerza de **H**, así como en el interior de aquél (fig. 7.16). En el exterior, $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ y ambos vectores tendrán en cada punto igual dirección y sentido, por lo que la línea de fuerza va de N a S. Ahora bien, la circulación de **H** a lo largo del camino cerrado ha de ser nula (ec. 6.33) por ser $I = 0$. Luego la circulación de **H** por

el interior ha de ser opuesta a la circulación por el exterior y ello obliga a que el campo **H** esté dirigido en el interior de N a S también, a diferencia de lo que ocurre con **B**. Las líneas de fuerza de **H**, por tanto, puede considerarse que nacen en las masas magnéticas (ficticias) del polo N y terminan en las del polo S. No son cerradas.

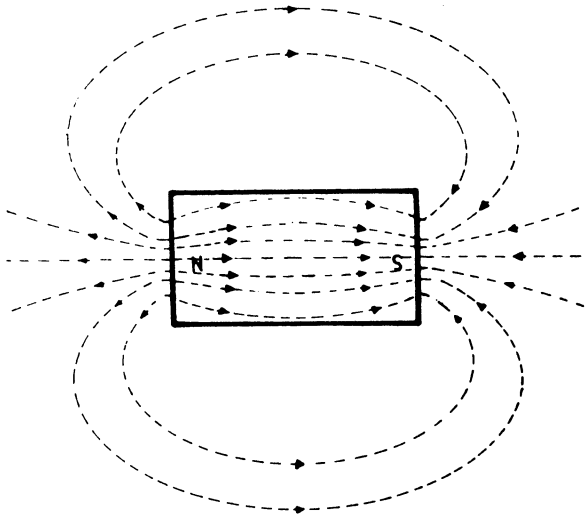


FIG. 7.16 Campo magnético de excitación de una barra imanada.

7.9 Circuitos magnéticos. Acabamos de ver que las líneas de fuerza de la excitación **H** son abiertas, mientras que las líneas de inducción son cerradas. Si consideramos de nuevo un toro ferromagnético como el de la figura 7.6, sobre el que se ha devanado un solenoide tórico, las líneas de inducción estarán todas canalizadas por el toro, y el flujo que circula (por así decirlo) a través del núcleo ferromagnético será (cfr. ec. 6.40)

$$\Phi = B\,S = \mu \frac{N\,I}{l} S = \frac{N\,I}{\frac{1}{\mu}\,\frac{l}{S}} \tag{7.7}$$

donde l es la longitud de la circunferencia media del toro y S su sección recta.

El espacio por donde se canalizan las líneas de inducción recibe el nombre de *circuito magnético*, y al denominador de la ecuación 7.7 se le llama *reluctancia* del mismo y se representa por $\mathfrak{R}$. El numera-

dor de 7.7 es la llamada *fuerza magnetomotriz* $\mathfrak{F}$, que se mide en *ampère-espiras,* y la ecuación 7.7 puede escribirse en la forma

$$\Phi = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{R}} \tag{7.8}$$

que presenta una analogía con la ley de Ohm (ec. 4.32). También existe analogía entre la resistencia de un conductor (ec. 4.16) y la reluctancia

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\mu}\frac{l}{S} \tag{7.9}$$

con lo que se corresponden la permeabilidad magnética con la conductividad eléctrica, y el flujo «que circula» por el circuito magnético con la intensidad de la corriente que circula por el circuito eléctrico.

No obstante, las anteriores analogías son puramente formales, como lo son las establecidas entre la ley de Ohm y la ley que rige la conducción del calor (ec. 16.6, p. 306, tomo I). Entre la conducción eléctrica y el flujo de inducción existente en un núcleo ferromagnético no existe relación alguna. Es más, son de señalar las siguientes diferencias:

1.° La fem $\mathcal{E}$ medía la potencia que había que consumir del exterior para mantener una corriente de intensidad unidad. En cambio, para mantener un flujo de inducción en el núcleo no es necesario consumir potencia alguna (podría crearlo un imán permanente).

2.° La conductividad de un conductor no depende de la fem, mientras que la permeabilidad magnética sí que depende de $\mathfrak{F}$ en los cuerpos ferromagnéticos.

No obstante, la ecuación 7.8 puede ser muy útil para una previsión aproximada de los fenómenos en los circuitos magnéticos, por lo que vamos a generalizarla.

Si el devanado de excitación no estuviera extendido a todo el toro, sino que sólo cubriera una parte de él, la experiencia indica que el flujo es el mismo. Practiquemos ahora un entrehierro de anchura e (fig. 7.17), lo suficientemente estrecho para poder suponer que el campo magnético de inducción tenga en él el mismo valor B que en el hierro. Llamando H_0 al valor de la excitación en el entrehierro y H a su valor en el hierro, será

$$H_0 = \frac{B}{\mu_0} \quad \text{y} \quad H = \frac{B}{\mu} \tag{7.10}$$

Aplicando la ley de Ampère tal como se hizo al final de § 6.14 tendremos para la circulación de **H**

$$H_0\, e + H\, l = N\, I \tag{7.11}$$

donde l es la longitud del circuito magnético y N el número de espiras excitadoras. Sustituyendo en la ecuación 7.11 las 7.10 y multi-

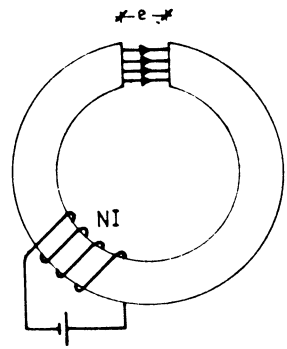


FIG. 7.17 Circuito magnético con entrehierro.

plicando los dos miembros por la sección S del circuito magnético tenemos

$$\left(\frac{e}{\mu_0} + \frac{l}{\mu}\right) B\, S = N\, I\, S$$

de donde

$$\Phi = B\, S = \frac{N\, I}{\dfrac{1}{\mu_0}\,\dfrac{e}{S} + \dfrac{1}{\mu}\,\dfrac{l}{S}}$$

que concuerda con la ecuación 7.8 si hacemos

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\mu_0}\,\frac{e}{S} + \frac{1}{\mu}\,\frac{l}{S} \tag{7.12}$$

Es decir, llamando

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{1}{\mu_0}\,\frac{e}{S} \quad \text{y} \quad \mathfrak{R}_2 = \frac{1}{\mu}\,\frac{l}{S}$$

a las reluctancias del entrehierro y del núcleo, la ecuación 7.12 nos dice que la reluctancia del circuito magnético constituido por dos reluctancias en serie, es igual a la suma de éstas.

Este hecho puede generalizarse a un número cualquiera de reluctancias. Éstas pueden también estar *en paralelo* distribuyéndose el flujo entre ellas y a causa de la analogía formal con las leyes que rigen el funcionamiento de los circuitos eléctricos es fácil deducir que

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \Sigma \frac{1}{\mathcal{R}_i} \quad \text{para reluctancias en paralelo}$$

$$\mathcal{R} = \Sigma \mathcal{R}_i \quad \text{para reluctancias en serie}$$

Los cálculos son sólo aproximados, pues siempre hay variación de la sección efectiva del circuito magnético en muchos lugares tales como codos, cambios de medio, etc. No obstante, podemos darnos cuenta de que un entrehierro, aun siendo muy estrecho, aumenta mucho la reluctancia de un circuito por ser $\mu_0 \ll \mu$ (cfr. ec. 7.12), disminuyendo sustancialmente el flujo que se obtiene con una fuerza magnetomotriz dada.

8

Inducción electromagnética

Ya hemos visto que el campo magnético se debe a la existencia de cargas en movimiento y vamos ahora a ver que los campos magnéticos pueden poner en movimiento a las cargas eléctricas. Hasta el presente, la manera más eficaz de producir corrientes eléctricas consiste, precisamente, en generarlas por acción de un campo magnético sobre un circuito aprovechando el fenómeno conocido por el nombre de *inducción electromagnética* que va a ser objeto de estudio en este capítulo. El descubrimiento de este fenómeno por MICHAEL FARADAY (1791-1867) en Inglaterra y JOSEPH HENRY (1797-1879) en Estados Unidos independientemente y los estudios de H. F. E. LENZ (1804-1865) en Rusia han llevado a la construcción de los potentes generadores existentes en las centrales eléctricas modernas y han proporcionado una base a la teoría del campo electromagnético desarrollada por JAMES CLERK MAXWELL (1831-1879).

8.1 Evidencia experimental de la inducción electromagnética. Supongamos que disponemos de un imán recto que pueda oscilar como un péndulo suspendido por su polo S (fig. 8.1). Disponemos también de un solenoide cuyos extremos se cierran a través de un galvanómetro G con el cero en el centro de la escala, de manera que cuando la corriente circule en un sentido se desviará la aguja hacia la derecha y cuando circule en sentido contrario, lo hará hacia la izquierda. Mientras el imán esté en reposo, por muy cerca que esté su polo N del solenoide, por éste no circula corriente. Hagámoslo oscilar y veremos que cuando el polo N se acerca al solenoide (figura 8.1 *a*) el galvanómetro señala paso de corriente en el sentido en que crearía un polo N en el extremo del solenoide hacia el que se aproxima el polo N del imán. Cuando éste pasa a la mínima distancia de aquél, la corriente se anula e invierte su sentido al alejarse el

imán (fig. 8.1 *b*). Decimos que el solenoide es asiento de una *corriente inducida.*

Consideremos ahora dos solenoides coaxiales, aislados entre sí, cerrado uno por un galvanómetro y el otro por un generador. Por éste circulará corriente, pero no por el otro (fig. 8.2 *a*). Dejemos caer un pedazo de hierro dulce en el interior de los solenoides y observaremos que al penetrar, el galvanómetro señala paso de corriente. Durante parte de su recorrido por el interior de las bobinas desaparece la corriente inducida y cuando sale por el extremo inferior, vuelve a inducirse corriente pero en sentido contrario al primitivo.

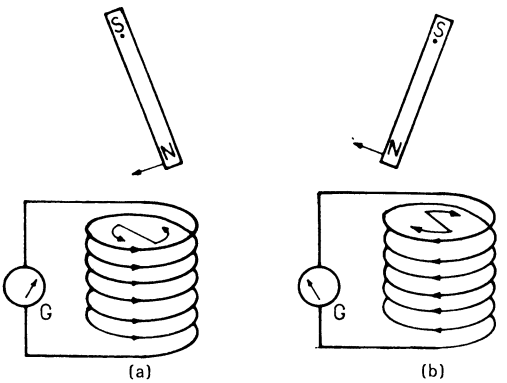


FIG. 8.1 *a*) Al acercarse el polo N del imán al extremo de la bobina, induce en éste un polo N. *b*) Al alejarse, induce un polo S.

En los tres experimentos que acabamos de describir, existe movimiento relativo entre las partes del sistema y ello podría sugerirnos que es este movimiento el origen de las corrientes inducidas. Pero en el experimento que llevó a HENRY a descubrir el fenómeno de la inducción electromagnética no existe dicho movimiento. HENRY disponía un circuito magnético constituido por un electroimán en herradura y una barra de hierro dulce colocada entre sus polos. Sobre ésta había devanado un solenoide que se cerraba sobre un galvanómetro *G* (fig. 8.2 *b*). Cuando conectaba la batería de pilas que alimenta al electroimán, observaba en *G* un paso de corriente muy breve y cuando la desconectaba volvía a observar paso de corriente por *G*, pero en sentido opuesto al anterior. En el solenoide cerrado sobre *G* se había inducido corriente en los instantes de cierre y apertura solamente.

Como en este experimento no existe movimiento de las partes del sistema, deberemos buscar alguna causa común a los cuatro expe-

rimentos presentados que pueda ser origen de la inducción electromagnética. Esta causa no es sino la *variación* del flujo de inducción (ahora vemos el porqué de su denominación) a través del circuito en que se induce la corriente. En efecto: en el primer caso (fig. 8.1 *a*) la aproximación del polo N al solenoide hace que aumente la inducción magnética creada por aquél (cfr. § 7.8)

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^2}$$

en todos los puntos interiores al solenoide y por tanto aumente el flujo de inducción a través de sus espiras. Al alejarse (fig. 8.1 *b*),

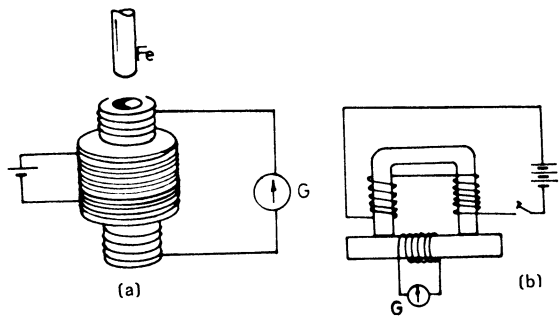


FIG. 8.2 *a*) Al penetrar el hierro por un extremo de la bobina larga, se induce en ésta una corriente y cuando sale el hierro, la corriente inducida es de sentido opuesto. Entre ambos estados existe un tiempo en que no se induce corriente. b) Experimento de Henry.

aumenta r y disminuye B y por tanto Φ. En el experimento de la figura 8.2 *a*, la variación de flujo se debe a que el hierro dulce tiene una permeabilidad magnética $\mu \gg \mu_0$. Antes de penetrar, la inducción magnética en los puntos interiores al solenoide era $B_0 = \mu_0 H$ y al introducirse el hierro, en los puntos que ocupa, dicha inducción aumenta al valor $B = \mu H$ aumentando, en consecuencia, el flujo de inducción. Durante el recorrido por el interior, si el solenoide es suficientemente largo, en las regiones que abandona el hierro disminuye dicho flujo en la misma cuantía en que aumenta en las regiones adonde llega y el flujo total se mantiene invariable y no hay corriente inducida. Por último, cuando sale el hierro del solenoide se produce una disminución del flujo, la cual induce la corriente observada. En el experimento de Henry, al conectar la excitación del electroimán se establece una fuerza magnetomotriz (cfr. § 7.9)

que crea un campo y un flujo de inducción apreciables en la barra de hierro dulce, o sea que aumenta rápidamente el flujo a través del solenoide devanado sobre ella, induciéndose una corriente en éste. Mientras se mantenga constante dicho flujo, G no señalará paso de corriente pero al desconectar las pilas, el flujo disminuye rápidamente y se induce una nueva corriente de sentido opuesto al anterior. Es interesante observar que al cambiar el signo de la variación del flujo, se invierte el sentido de la corriente, que cuanto mayor es la velocidad de variación del flujo tanto más importante son los fenómenos de inducción electromagnética, por lo que para poner éstos de manifiesto, convendrá que el circuito *inducido* tenga el mayor número de espiras posible.

8.2 Ley de Faraday. El hecho de que la corriente inducida circule por circuitos resistivos exige que exista una fem. La relación entre la fem inducida en un circuito y la variación del flujo a su través constituye la llamada *ley de Faraday* cuya demostración general debida a FRANZ ERNST NEUMANN (1798-1895) no podemos dar aquí. No obstante, la deduciremos para un caso particular y la admitiremos como general habida cuenta de que todas las consecuencias que de ella se derivan vienen corroboradas por la experimentación.

Consideremos, en primer lugar, una barra conductora perpendicular a un campo magnético uniforme $\mathbf{B}$ normal al papel y hacia adentro y que se mueva perpendicularmente a él con velocidad $\mathbf{v}$ (figura 8.3). Las cargas eléctricas contenidas en la barra se hallarán sometidas a fuerzas magnéticas por razón de su movimiento en $\mathbf{B}$ y los electrones libres se hallarán sometidos, a consecuencia de la componente $\mathbf{v}$ de su velocidad, a una fuerza que los desplazará hacia el extremo inferior en la figura 8.3 (cfr. ec. 6.2) dada por $-e\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$. Dicho extremo, pues, se poblará de electrones procedentes del resto de la barra mientras que el otro extremo, al ser abandonado por los electrones libres que en él existían, quedará cargado positivamente. El tránsito de electrones proseguirá hasta que el campo eléctrico $\mathbf{E}$ creado por esta distribución de cargas eléctricas ejerza en todos los puntos fuerzas sobre las cargas que equilibren a las fuerzas magnéticas, es decir, que

$$-e\,\mathbf{E} = e\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} \quad \text{o sea} \quad \mathbf{E} = -\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} \tag{8.1}$$

como $\mathbf{v}$ y $\mathbf{B}$ son los mismos en todos los puntos, también lo será $\mathbf{E}$ y su circulación a lo largo de la barra nos dará la ddp que existe entre sus extremos

$$V = E\,l = v\,B\,l \tag{8.2}$$

donde l es la longitud de la barra. Si los extremos de ésta se unieran a un conductor, cerrando un circuito, se establecería una corriente. Es decir, la barra en movimiento haría las veces de generador y su ddp en circuito abierto (ec. 8.2) sabemos que sería igual a su fem $\mathcal{E}$ (cfr. final § 4.7), la cual estaría distribuida a lo largo de la barra y como según la ecuación 8.2 la fem por unidad de longitud sería igual a E, a un elemento de longitud dl le correspondería una fem

$$d\mathcal{E} = E\, dl = v\, B\, dl \qquad (8.2 \text{ bis})$$

Es interesante tener presente que este campo eléctrico creado por el movimiento puede considerarse como una fem por unidad de longitud.

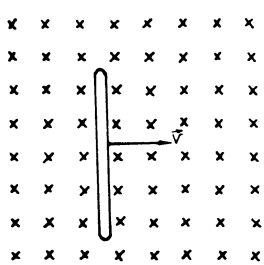


FIG. 8.3 Barra conductora en movimiento en un campo magnético.

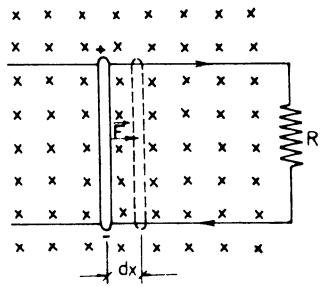


FIG. 8.4 Corriente inducida por el movimiento de una barra en un campo magnético.

El anterior razonamiento puede parecer un tanto artificioso por lo que vamos a presentar de otra manera la fem inducida en el caso que nos ocupa. Si la barra se mueve apoyando sus extremos sobre dos conductores que cierren el circuito, cuya resistencia total representaremos por R (fig. 8.4), para desplazarla una distancia $dx = v\, dt$ habrá que aplicarle una fuerza $\mathbf{F}$ que efectuará un trabajo en el desplazamiento mencionado dado por

$$dW = F\, dx = F\, v\, dt$$

La fuerza $\mathbf{F}$ deberemos aplicarla para contrarrestar la fuerza que el campo magnético $\mathbf{B}$ ejerza sobre la corriente inducida de intensidad I que valdría (cfr. ec. 6.10) $F = B\, I\, l$. Luego tendremos

$$dW = B\, I\, l\, v\, dt$$

Lo que exige que para que circule una corriente de intensidad I debemos gastar una potencia mecánica

$$\frac{dW}{dt} = B\,I\,l\,v$$

y como la razón de la potencia consumida a la intensidad de la corriente es la fem del circuito (cfr. § 4.7) resulta

$$\mathcal{E} = B\,l\,v \tag{8.3}$$

que concuerda con la ecuación 8.2.

Ahora bien, la superficie encerrada por el circuito ha disminuido en el tiempo dt en un área $dS = l\,v\,dt$. Ello entraña que el flujo de inducción magnética que atravesaba el circuito ha disminuido en

$$d\Phi = B\,l\,v\,dt = \mathcal{E}\,dt \tag{8.4}$$

durante el tiempo dt. Luego

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} \tag{8.5}$$

es la relación buscada entre la fem inducida y la variación de flujo. No obstante, hemos de tener en cuenta que la corriente inducida tiene un sentido tal que el campo que ella crea tiende a aumentar el flujo. En cambio, si la barra se hubiera desplazado en sentido opuesto, la corriente sería de sentido contrario y por tanto tendería a disminuir Φ. Es decir, en uno y otro caso, la *corriente tiende a oponerse a la variación de flujo que le da origen* y por ello suele escribirse

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{8.6}$$

en vez de la ecuación 8.5. En realidad, el $d\Phi$ de la ecuación 8.4 es negativo, pues en el ejemplo considerado se trataba de una disminución de flujo y si hubiera sido positivo la polaridad hubiera sido la opuesta. La ecuación 8.6 es la expresión analítica de la llamada *ley de Faraday* y ya hemos dicho que tiene validez general para todos los casos en que varíe el flujo de inducción magnética a través de un circuito. Como la fem está localizada en el circuito, la podremos escribir, teniendo en cuenta la ecuación 8.2 bis

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

y como

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

la ecuación 8.6 puede escribirse en la forma más general

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} \tag{8.7}$$

El primer miembro de esta ecuación será nulo, pues, cuando sea constante con el tiempo el flujo de inducción y el campo eléctrico E será conservativo, como ocurre en el caso electrostático. Pero si el flujo de inducción magnética varía con el tiempo, ya no será nula la circulación de **E** a lo largo de algún camino cerrado y por tanto el campo eléctrico inducido no será conservativo.

Es interesante notar que el primer miembro de la ecuación 8.7 es la circulación de **E** a lo largo de *todo* el circuito, cualquiera que sea la forma de éste y que el segundo miembro es la velocidad de variación del flujo a través de la superficie S limitada por dicho circuito. Es decir, si éste fuera un solenoide de N espiras, el flujo a considerar sería a través de la superficie limitada por las N espiras. Si todas ellas fueran atravesadas por un mismo flujo φ, sería $\Phi = N\,\varphi$ y la ecuación 8.6 podría escribirse en la forma

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\varphi}{dt} \tag{8.8}$$

Ejemplos. 1.º Un avión en vuelo horizontal a 900 km/h tiene una antena vertical de 1,5 m de longitud y se mueve perpendicularmente al meridiano magnético en un lugar en que la componente horizontal del campo magnético terrestre vale $2{,}5\cdot10^{-5}$ T. ¿Qué ddp se induce entre los extremos de la antena?

El campo magnético terrestre lo podemos considerar descompuesto en una componente vertical **B′** y la horizontal mencionada **B″**. Con ello (cfr. ec. 8.1).

$$\mathbf{E} = \mathbf{v}\wedge(\mathbf{B}' + \mathbf{B}'')$$

y como $d\mathbf{l}$ tiene igual dirección que **B′**

$$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \mathbf{v}\wedge\mathbf{B}''\cdot d\mathbf{l} = v\,B''\,dl$$

y la ddp pedida será

$$V = \int_{l=0}^{1,5} v\,B''\,dl$$

y como 900 km/h son 250 m/s será

$$V = 250\times 2{,}5\times 10^{-5}\times 1{,}5 = 9{,}4\cdot10^{-3}\ \text{V}$$

2.° Una bobina plana constituida por 20 espiras cuadradas de 10 cm de lado está colocada normal a un campo magnético uniforme de 0,75 T y tiene una resistencia de 3 Ω. Se le da un giro de 90° que la deja con el campo tangente a ella. ¿Qué carga eléctrica habrá circulado por la bobina durante este giro?

En un instante cualquiera del giro, la ley de Ohm y la ecuación 8.6 nos permiten determinar la intensidad I de la corriente en dicho instante

$$I = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}$$

y la carga que circulará en un tiempo dt inmediatamente posterior será

$$dq = I\,dt = -\frac{d\Phi}{R}$$

y la que circula entre dos instantes t_0 y t_1 será

$$Q = \int dq = -\frac{\Phi_1 - \Phi_0}{R}$$

siendo Φ_0 y Φ_1 los flujos que atraviesan el circuito en los instantes t_0 y t_1, respectivamente. En nuestro caso, el flujo final Φ_1 es nulo por ser el campo tangente a las espiras, mientras que el flujo inicial Φ_0 será

$$\Phi_0 = B\,S = 0{,}75 \times 20 \times 0{,}01 = 0{,}15 \text{ Wb}$$

y la carga que ha circulado será

$$Q = \frac{0{,}15}{3} = 0{,}05 \text{ C}$$

8.3 Ley de Lenz. Hemos visto en § 8.2 que la generación de la corriente inducida exige que efectuemos un trabajo mecánico y ello es natural, pues la corriente inducida es capaz de realizar un trabajo, calentar los conductores y, en general, desarrollar una energía. Ésta deberá suministrarla el agente que induce la corriente, si admitimos el principio de conservación de la energía (§ 17.6, p. 320, tomo I). Este razonamiento llevó a LENZ a enunciar que: *el sentido de la corriente inducida es siempre tal que tiende a oponerse a la causa que la origina.* Así, en el experimento de la figura 8.1 *a*, el sentido de la corriente inducida crea en el solenoide un polo N que se opone a que se aproxime el polo N del imán (lo repele). En cambio, si intentamos alejar éste, se induce un polo S (fig. 8.1 *b*) que lo atrae. En el experimento de la figura 8.2 *a*, el pedazo de hierro dulce se imana por efecto del campo magnético del solenoide exterior y el sentido de la corriente inducida es tal que crea un campo que se opone a la penetración del hierro en el solenoide y también a su salida de él. Asimismo, la corriente inducida en el solenoide del experimento de Henry (fig. 8.2 *b*) crea en la barra de hierro un campo

de sentido contrario al que crea el electroimán cuando se conecta su excitación y del sentido de éste cuando se desconecta, con lo que en uno y otro caso se opone a la variación de flujo que induce la corriente.

8.4 Corrientes de Foucault. Consideremos el campo magnético creado por el electroimán de la figura 8.5, el cual tiene intensidad máxima en la región central y va disminuyendo a medida que nos alejamos de ella. Si asimos con la mano una placa de cobre y la hacemos pasar entre los polos, notaremos una resistencia semejante a la que se nota al cortar queso. No se trata de la fuerza magnética

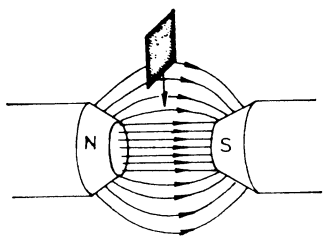


FIG. 8.5 Placa conductora que penetra en un campo magnético no uniforme.

sobre el Cu, que es diamagnético y sería imperceptible, sino de la fuerza que se ejerce por parte del campo magnético sobre unas corrientes inducidas en la placa a las que se da el nombre de *corrientes de Foucault*. Estas corrientes se inducen por estar sometido cada punto de la placa a un campo magnético que varía al moverse aquélla, pasando de unos puntos en los que existe un campo magnético de valor determinado a otros en los que el valor es diferente. En el seno de la placa podrán formarse circuitos de cualquier forma y las corrientes, por ser inducidas, cumplirán la ley de Lenz y la fuerza que el campo magnético ejerza sobre ellas tenderá a oponerse a la penetración, primero y a la salida, después, de la placa en el campo del electroimán.

Las corrientes de Foucault aparecen siempre que un conductor extenso tenga sometidos sus puntos a campos magnéticos variables, como sucede en las partes de la maquinaria eléctrica que tengan un movimiento relativo respecto a un campo magnético, o en los núcleos de los transformadores (§ 10.9). Al circular por el medio en que se inducen, lo calientan por efecto Joule, con lo que se produce una pérdida de energía. Para reducir ésta al mínimo, convendrá aumentar la resistencia eléctrica en un plano normal al campo, para lo

cual suele formarse la masa metálica con láminas delgadas aisladas entre sí mediante una capa de barniz o de óxido.

En los contadores de energía eléctrica el disco giratorio suele frenarse mediante un imán permanente, aprovechando la fuerza que éste ejerce sobre las corrientes de Foucault que induce en aquél al estar girando.

Otro efecto interesante de las corrientes de Foucault es el que se produce en los núcleos sometidos a campos magnéticos variables y conocido por el nombre de *efecto cortical.* Como las corrientes de Foucault obedecen la ley de Lenz, crean en la región interna del núcleo un campo que se opone a las variaciones del que las origina, dando como resultado un campo magnético de inducción menor en la región central del bloque que en la superficie.

8.5 Betatrón. Consideremos un electroimán (fig. 8.6 *a*) que cree un campo magnético variable con el tiempo y que presente simetría alrededor del eje de

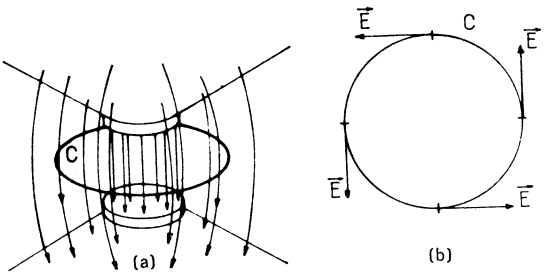


FIG. 8.6 Principio del betatrón.

las piezas polares. La ecuación 8.7, que será válida tanto si existe un conductor filiforme como si no, indica la existencia de un campo eléctrico inducido **E** cuyas líneas de fuerza serán, por la simetría mencionada, circunferencias centradas en el eje de simetría y situadas en planos normales a él. Consideremos la línea de fuerza *C* situada en el plano equidistante de los polos (fig. 8.6 *a* y b), de radio *R*, para la cual la ecuación 8.7 da

$$2\pi R E = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{8.9}$$

Consideremos dicha línea de fuerza como trayectoria de un electrón y veamos qué condiciones deben concurrir para que ello sea posible. El electrón se hallará sometido a una fuerza (cfr. ec. 7.15, pág. 98, tomo I)

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{8.10}$$

donde **p** es la cantidad de movimiento del electrón, cuya componente tangencial será $-e\,E$. La componente tangencial del segundo miembro de la ecua-

ción 8.10 será dp/dt según puede deducirse mediante un razonamiento análogo al de § 4.3 del tomo I, tomando **p** en vez de **v**. Por tanto, igualando las componentes tangenciales de los dos miembros de la ecuación 8.10 tenemos

$$-e\,E = \frac{dp}{dt}$$

que teniendo en cuenta la ecuación 8.9 nos da

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{e}{2\pi R}\,\frac{d\Phi}{dt}$$

e integrando se tiene

$$p - p_0 = -\frac{e}{2\pi R}\,\Phi$$

y para un electrón que tuviera cantidad de movimiento despreciable cuando $\Phi = 0$, su cantidad de movimiento cuando el flujo a través de la superficie limitada por C sea Φ será

$$p = -\frac{e}{2\pi R}\,\Phi \tag{8.11}$$

pero, llamando $\mathbf{B}_C$ al campo magnético en los puntos de C, la ecuación 6.4 nos indica que

$$p = -e\,R\,B_C \tag{8.12}$$

e igualando los segundos miembros de las ecuaciones 8.11 y 8.12 resulta

$$B_C = \frac{\Phi}{2\pi R^2} = \frac{\overline{B}}{2} \tag{8.13}$$

llamando $\overline{B}$ al valor medio del campo en la superficie limitada por C. La ecuación 8.13 nos dice que en los puntos de la circunferencia, el campo debe ser igual a la mitad de su valor medio en la superficie que limita, para que dicha circunferencia sea la trayectoria del electrón. Es decir, el campo B variable con el tiempo hará describir al electrón la órbita C si su valor medio en el círculo limitado por C es igual al doble de B_C. Se trata, pues, de dar a las piezas polares la forma adecuada para que se cumpla esta condición.

Supuesta cumplida, el electrón acelerado por el campo eléctrico **E** gana en cada vuelta una energía

$$(e\,E)\,2\pi R = e\left|\frac{d\Phi}{dt}\right|$$

(cfr. ec. 8.9) que vemos es proporcional a la velocidad de variación del flujo. Como durante el tiempo de variación del flujo el electrón da muchísimas vueltas, adquirirá una gran energía y si entonces producimos una alteración de la distribución del campo magnético que haga que no se cumpla la ecuación 8.13, el electrón abandonará la órbita circular yendo a incidir sobre el blanco que se quiere bombardear.

Lo anterior constituye el fundamento del *betatrón*, acelerador de electrones inventado por DONALD W. KERST en 1940. En él, los electrones circulan por el interior de un tubo de material cerámico en forma de anillo de sección ovalada,

siendo inyectados tangencialmente con una energía del orden de los 50 kV en el instante $t = 0$, T, $2T$, ... (fig. 8.7) en que el flujo magnético generado por la corriente alterna que circula por el devanado del electroimán empieza a variar de manera prácticamente lineal con el tiempo ($d\Phi/dt \simeq$ const.). En el interior del tubo se ha practicado el vacío, con objeto de que los electrones no pierdan

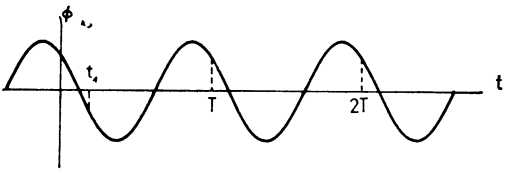


FIG. 8.7 Flujo magnético alterno de un betatrón.

energía por choque con moléculas. Al cabo de un tiempo t_1 los electrones habrán alcanzado la energía deseada y aplicando entonces un campo magnético auxiliar que destruya la distribución que satisface la ecuación 8.13, los electrones saldrán hacia el blanco mencionado. Con los modernos betatrones se han llegado a alcanzar energías superiores o los 300 MeV.

8.6 Inducción mutua. Consideremos dos circuitos (1 y 2 en figura 8.8) de forma cualquiera y sea I_1 la intensidad de la corriente que circula por el circuito número 1. Esta corriente creará en todos los

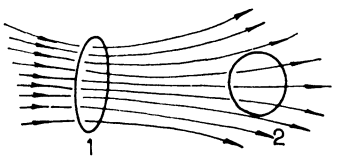


FIG. 8.8 El flujo a través del circuito 2 es proporcional a la intensidad de la corriente que circula por 1.

puntos un campo magnético de módulo proporcional a I_1 (cfr. § 6.10) y por tanto mandará a través del circuito número 2 un flujo Φ_2 también proporcional a I_1, es decir,

$$\Phi_2 = M_{21} I_1 \tag{8.14}$$

Análogamente, si por el circuito número 2 circulara una corriente de intensidad I_2 crearía a través del otro circuito un flujo de inducción

$$\Phi_1 = M_{12} I_2 \tag{8.15}$$

Puede demostrarse, si bien nosotros lo admitimos como hecho experimental, que

$$M_{12} = M_{21}$$

por lo que de ahora en adelante prescindiremos de los subíndices y a este *coeficiente de inducción mutua* lo representaremos por M. Es siempre positivo, y sus dimensiones serán

$$[M] = \frac{[\Phi]}{[I]} = M\,L^2\,Q^{-2}$$

pero si recordamos que las dimensiones de la permeabilidad magnética son $[\mu] = M\,Q^{-2}\,L$ (cfr. § 7.4), resulta

$$[M] = [\mu]\,L$$

es decir, que aparte la naturaleza del medio en que se hallen los dos circuitos, sólo depende de la geometría del sistema.

Si I_1 fuera variable, variaría Φ_2 y en el circuito número 2 se induciría una fem

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt} \tag{8.16}$$

Análogamente, si fuera variable I_2, el circuito número 1 sería asiento de una fem inducida

$$\mathcal{E}_1 = -M\frac{dI_2}{dt} \tag{8.17}$$

La unidad giorgi de coeficiente de inducción mutua es el *henry* (H) que se define como *el coeficiente de inducción mutua de dos circuitos tales que al variar en uno la corriente a razón de 1 A/s, se induce en el otro una fem de 1 V.*

Ejemplo. Un solenoide largo de N_1 espiras y longitud l_1 tiene superpuesto coaxialmente en su región central un solenoide corto de N_2 espiras y longitud l_2, teniendo ambos igual sección (fig. 8.9). Hallar su coeficiente de inducción mutua.

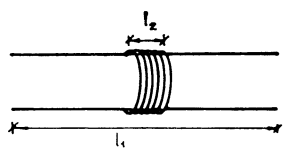


FIG. 8.9

Como el campo creado por el solenoide largo en la región central es prácticamente uniforme e igual a

$$B_1 = \mu_0\frac{N_1 I_1}{l_1}$$

el flujo a través de cada una de las espiras del otro se obtendrá multiplicando esta cantidad por la sección S y como el solenoide corto tiene N_2 espiras, el flujo total que lo atraviesa será

$$\Phi_2 = N_2 \mu_0 \frac{N_1 I_1}{l_1} S$$

y teniendo en cuenta la ecuación 8.14

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1} S$$

Aplicación. Consideremos $N_1 = 3000$, $N_2 = 100$, $l_1 = 3{,}14$ m y $S = 100$ cm^2. Al conectar el solenoide corto a un generador, se establece en él rápidamente la corriente y su crecimiento es, en un instante dado, de 100 A/s. ¿Qué fem se inducirá en ese instante en el solenoide largo?

El coeficiente de inducción mutua vale

$$M = 4\pi \times 10^{-7} \frac{3000 \times 100}{3{,}14} \times 0{,}01 = 1{,}2 \times 10^{-3} \text{ H} = 1{,}2 \text{ mH}$$

y la aplicación de la ecuación 8.17 nos da

$$\mathcal{E}_1 = 1{,}2 \times 10^{-3} \times 100 = 0{,}12 \text{ V} = 120 \text{ mV}$$

8.7 Autoinducción. La intensidad I de la corriente del circuito 1 (fig. 8.8) crea también un flujo de inducción a través de toda superficie limitada por el propio circuito 1, y dicho flujo será, claro está, proporcional a I. Es decir que, prescindiendo de la existencia de otras corrientes, si llamamos Φ al flujo considerado, será

$$\Phi = L I \tag{8.18}$$

donde L es el llamado *coeficiente de autoinducción* del circuito. Tiene las mismas dimensiones que el coeficiente de inducción mutua y depende solamente del medio en que se halle el circuito y de la forma de éste.

Al variar la intensidad I_1 de la corriente, variará Φ y en el circuito se inducirá una *fem de autoinducción*

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \tag{8.19}$$

Se comprende que la unidad de medida es también el *henry*, que podría definirse como *el coeficiente de autoinducción de un circuito tal que al variar en él la intensidad de la corriente a razón de 1 A/s se induce en él una fem de 1 V.*

Es de señalar que por tratarse de un fenómeno de inducción elec-

tromagnética, la fem de autoinducción tiende a oponerse a la causa que le da origen (de ahí el signo — en ec. 8.19), por lo que si la corriente se debilita, tenderá a reforzarla, y si se intensifica, tenderá a debilitarla. Los elementos de circuito que presentan un coeficiente de autoinducción o de inducción mutua importante reciben el nombre genérico de *inductancias*. En la figura 8.10 puede verse el símbolo utilizado para representar una inductancia autoinductiva de coeficiente L. Al cerrar el interruptor Y se iniciará la conducción, y la fem existente en el circuito será la $\mathcal{E}$ de la pila más la fem de autoinducción $-L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$. Entre un instante t cualquiera y el instante $t + \mathrm{d}t$ podemos considerar que no varía I apreciablemente y aplicar la ley de Ohm (ec. 4.32)

$$\mathcal{E} - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = R\,I \tag{8.20}$$

de donde

$$\frac{-\mathrm{d}I}{\frac{\mathcal{E}}{R} - I} = -\frac{\mathrm{d}t}{L/R} = -\frac{\mathrm{d}t}{\tau} \tag{8.21}$$

donde $\tau = L/R$ es la constante de tiempo del circuito. Integrando la ecuación 8.21 tenemos

$$\ln\left(\frac{\mathcal{E}}{R} - I\right) = -\frac{t}{\tau} + \text{const.} \tag{8.22}$$

Pero, en el instante inicial $t = 0$, $I = 0$; luego

$$\ln\frac{\mathcal{E}}{R} = \text{const.} \tag{8.23}$$

y restando las ecuaciones 8.22 y 8.23 queda

$$\ln\frac{\frac{\mathcal{E}}{R} - I}{\frac{\mathcal{E}}{R}} = -\frac{t}{\tau} \quad \text{o sea} \quad \frac{\mathcal{E}}{R} - I = \frac{\mathcal{E}}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

de donde

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\,(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}) \tag{8.24}$$

que pone de manifiesto cómo la autoinducción retarda el establecimiento de la corriente en el circuito. La constante de tiempo $\tau = L/R$ juega aquí el mismo papel que la $\tau = R\,C$ en el proceso de carga de un condensador (cfr. ec. 4.57).

Al cabo de un tiempo suficientemente largo, la corriente alcanza una intensidad prácticamente igual a la de régimen $\mathcal{E}/R$. Suponga-

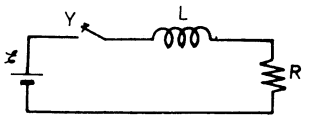


FIG. 8.10 Circuito inductivo.

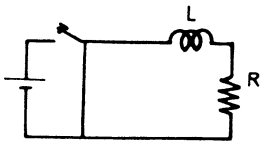


FIG. 8.11 Circuito inductivo del que se ha suprimido el generador que lo alimentaba.

mos ésta alcanzada y suprimamos la pila cortocircuitándola y desconectándola (fig. 8.11). La ley de Ohm se reduce ahora a

$$-L\frac{dI}{dt} = R\,I \tag{8.25}$$

de donde

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\,dt$$

que integrada da

$$\ln I = -\frac{t}{\tau} + \text{const.} \tag{8.26}$$

y tomando el instante de supresión de la pila como $t = 0$, como en él la intensidad era $I_0 = \mathcal{E}/R$ será

$$\ln I_0 = \text{const.} \tag{8.27}$$

y restando la ecuación 8.27 de la 8.26 resulta

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\,e^{-t/\tau} \tag{8.28}$$

que nos indica que después de suprimir la pila, la autoinducción, por oponerse a la causa que la origina (supresión de la corriente), sigue manteniendo la circulación de la corriente. Al cabo de un tiempo $t = \tau$, la intensidad se ha reducido al 37 % de la inicial.

8.8 Bobina de inducción. Los fenómenos de inducción electromagnética pueden aprovecharse para obtener descargas de alta tensión a partir de generadores de fem pequeña. Un dispositivo utilizado a tal efecto en los motores de explosión (p. e. en automóviles) es la *bobina de inducción* que hace saltar la chispa entre la bujía b y la masa del cilindro (fig. 8.12). Dicho dispositivo consta de un núcleo de hierro dulce constituido por un mazo de alambres paralelos

al eje sobre el que van arrollados dos devanados: uno, llamado *primario*, constituido por pocas espiras de hilo grueso por el que circulará una corriente relativamente intensa procedente de la batería; y otro, llamado *secundario*, constituido por muchas espiras de hilo fino. Estos devanados están tan próximos uno a otro que puede considerarse que todo el flujo magnético creado en el núcleo por la corriente del primario, pasa a través de las espiras del secun-

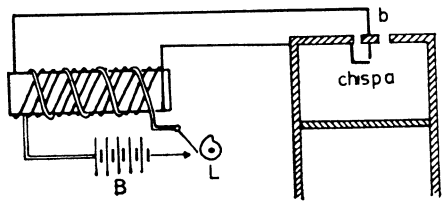


FIG. 8.12 Bobina de inducción.

dario. La leva L abre y cierra periódicamente el circuito primario sobre la batería B. Al cerrar el circuito, se establece en él una corriente bastante intensa que crea en el núcleo un flujo apreciable. Al interrumpirse el circuito, la rápida disminución de intensidad ($|\,dI_1/dt\,|$ grande) induce en el secundario una fem grande (cfr. ec. 8.16), pues también es elevado M a causa del núcleo de hierro y entre los dos terminales del secundario aparecerá una ddp muy elevada que hará saltar la chispa entre la masa del cilindro, a la cual se ha conectado un terminal, y la bujía a la cual se conecta el otro.

El núcleo, por estar constituido por alambres paralelos al campo, hará que las corrientes de Foucault queden limitadas a la pequeña sección de cada alambre, con lo que el primer miembro de la ecuación 8.7 tendrá un valor muy pequeño por ser muy corto el camino de integración. Con ello se reducen mucho las pérdidas por corrientes de Foucault.

8.9 Energía electromagnética de una corriente. Consideremos nuevamente el circuito representado en la figura 8.10 y cerremos en el instante $t = 0$ el interruptor Y. La intensidad de la corriente que circula en un instante t satisface la ecuación 8.20, y entre los instantes t y $t + dt$ la pila hace circular una carga eléctrica $I\,dt$ entregando al circuito una energía $dW = \mathcal{E}\,I\,dt$, que en virtud de la ecuación 8.20 valdrá

$$dW = L\,I\,dI + R\,I^2\,dt \tag{8.29}$$

El segundo término del segundo miembro de la ecuación 8.29 es la energía que aparece en forma de calor por efecto Joule, mientras que el primer término del segundo miembro es la energía que queda almacenada en el campo magnético asociado a la corriente de intensidad I. Para calcular esta energía, llamada *electromagnética*, bastará sumar las cantidades $L\,I\,dI$ correspondientes a todos los incrementos

de intensidad que se han producido entre el instante inicial en que era nula la intensidad, hasta el instante t en que vale I. Es decir,

$$U = \int_0^I L\, I\, dI = \tfrac{1}{2} L\, I^2 \tag{8.30}$$

Esta energía que hay que gastar, a causa de la autoinducción del circuito, para establecer una corriente de intensidad I, nos será restituida cuando se suprima la corriente por el campo magnético que se extingue con ella. En efecto, al cortocircuitar la pila, la intensidad de la corriente que sigue circulando obedece a la ecuación 8.25. La energía disipada en forma de calor será, pues,

$$Q = \int_0^\infty R\, I^2\, dt = \int_I^0 -L\, I\, dI = \tfrac{1}{2} L\, I^2$$

que es igual a la que se había almacenado en el campo magnético (cfr. ec. 8.30). Ya MAXWELL había enunciado que *en todo punto del espacio donde exista un campo magnético, existe una energía que se distribuye con una densidad igual a* $\frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}$. Por densidad queremos significar energía por unidad de volumen.

Podemos considerar la afirmación anterior en el caso de un solenoide tórico. Al final de § 6.14 veíamos que el campo en el interior de un tal solenoide está dirigido siempre tangente a una circunferencia centrada en el centro del toro y su valor es

$$H = \frac{N\, I}{2\pi R}$$

luego

$$B = \mu \frac{N\, I}{2\pi R} \tag{8.31}$$

donde N es el número de espiras y R el radio medio del toro. Llamando S al área de la sección circular del toro, el flujo de inducción a través de una espira será $B\, S$, y el flujo total será $\Phi = N\, B\, S$, y tendremos (cfr. ec. 8.18)

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{N\, B\, S}{I}$$

que sustituida en la ecuación 8.30 da

$$U = \tfrac{1}{2} \frac{N\, B\, S}{I} I^2 = \tfrac{1}{2} N\, B\, S\, I$$

y sustituyendo I por el valor deducido de la primera ecuación 8.31 tenemos

$$U = \tfrac{1}{2} H B (2 \pi R S)$$

pero la cantidad entre paréntesis es el volumen del toro, y como en todos sus puntos interiores **H** y **B** coinciden en dirección, la energía por unidad de volumen resulta ser

$$u = \tfrac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \tag{8.32}$$

según queríamos comprobar.

8.10 Descarga oscilante de un condensador. Consideremos un condensador de capacidad C en serie con un interruptor Y y una inductancia que encierra dentro de ella el campo magnético que crea la corriente que por ella circula. Sea L su coeficiente de autoinducción (fig. 8.13). Sea Q_0 la carga que tiene el condensador. Al cerrar el interruptor Y, se ponen en comunicación las dos armaduras y pa-

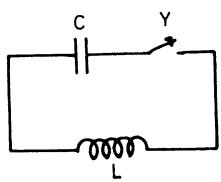


FIG. 8.13 Circuito asiento de oscilaciones eléctricas.

sarán electrones de la armadura negativa a la positiva originando en el circuito una corriente que va de la armadura positiva a la negativa a través de la inductancia. A consecuencia de ello, en un instante t la carga del condensador tendrá un valor q distinto, en general, de Q_0, y entre los instantes t y $t + dt$ perderá una carga igual a $i\,dt$ si llamamos i a la intensidad de la corriente que circula por la inductancia en el instante t. Ello significa que la carga del condensador se incrementa en

$$dq = -i\,dt \qquad \text{de donde} \qquad i = -\frac{dq}{dt} \tag{8.33}$$

La suma de las ddp a lo largo de todo el circuito ha de ser 0; luego

$$\frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} = 0$$

que teniendo en cuenta la ecuación 8.33 puede escribirse en la forma

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \tag{8.34}$$

ecuación formalmente igual a la 10.1, p. 146, tomo I, en la que sería

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \tag{8.35}$$

o, si se quiere, la ecuación 8.34 se obtiene de la 10.1, tomo I, sustituyendo m por L, k por $1/C$ y x por q. Su solución sería (cfr. ec. 10.2, p. 147, tomo I)

$$q = A \text{ sen } (\omega t + \theta_0) \tag{8.36}$$

y la ecuación 8.33 daría

$$i = -A\omega \cos (\omega t + \theta_0) \tag{8.37}$$

Para determinar las constantes A y θ_0 tendremos en cuenta que en el instante $t = 0$, $q = Q_0$, $i = 0$; luego las ecuaciones 8.36 y 8.37 dan

$$Q_0 = A \text{ sen } \theta_0 \qquad 0 = -A\omega \cos \theta_0$$

de la segunda de estas ecuaciones resulta $\theta_0 = \pi/2$ y la primera dará, entonces, $A = Q_0$, por lo que las ecuaciones 8.36 y 8.37 podrán escribirse en la forma

$$q = Q_0 \cos \omega t \qquad i = Q_0 \omega \text{ sen } \omega t \tag{8.38}$$

que nos indican que la carga del condensador y la intensidad de la *corriente* de descarga son funciones sinusoidales del tiempo de frecuencia (cfr. ec. 8.35)

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{8.39}$$

es decir, la descarga es oscilante y su frecuencia de oscilación sólo depende de los parámetros del circuito y no de la carga inicial del condensador.

Podríamos razonar este resultado desde un punto de vista puramente conceptual. Si inicialmente es Q_0 la carga del condensador, el campo eléctrico entre sus armaduras tendrá acumulada una energía igual a $\frac{1}{2}Q_0^2/C$ (cfr. ec. 3.24), que al ir descargándose el condensador irá pasando a la forma de energía electromagnética de la corriente

de descarga hasta que ésta será máxima cuando la otra sea nula. Es decir, que $\frac{1}{2} L I^2$ (y por tanto I) será máxima en el instante en que el condensador esté totalmente descargado. En este instante desaparecería la corriente si no fuera por la fem de autoinducción que se opone a la causa que la produce (disminución de la intensidad) e induce una corriente del mismo sentido que hace que siga circulando la corriente y cargando el condensador con polaridad opuesta a la inicial. Al ir cargándose el condensador, almacena en su campo eléctrico energía que toma del campo magnético de la corriente, la cual irá disminuyendo hasta anularse en el momento en que el condensador haya recuperado la carga Q_0 con la polaridad opuesta. En este momento se halla en condiciones análogas a las iniciales (salvo la polaridad) y se inicia una nueva descarga en sentido contrario, y así sucesivamente. La energía va pasando del campo eléctrico del condensador al magnético de la inductancia, y recíprocamente, de manera análoga a como en un péndulo la energía pasa de potencial a cinética y de cinética a potencial, dando oscilaciones mecánicas.

Si el circuito disipara energía, p. ej. en una resistencia R (fig. 8.14), se comprende que tras cada oscilación la carga del condensador sería

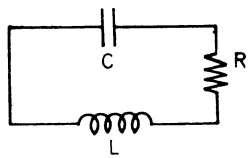


FIG. 8.14 Descarga amortiguada de un condensador.

menor que al final de la oscilación anterior y las oscilaciones serían amortiguadas. La resistencia eléctrica juega un papel análogo a la resistencia mecánica vista en § 10.8, tomo I. Como la suma de las ddp a lo largo del circuito de la figura 8.14 ha de ser nula, tendremos

$$\frac{q}{C} - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - R\,i = 0$$

y sustituyendo aquí la ecuación 8.33 resulta

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L\,C}\,q = 0 \qquad (8.40)$$

que es formalmente igual a la ecuación 10.21, p. 167, tomo I, que rige las oscilaciones amortiguadas, pues basta sustituir en ella m por L, k por $1/C$ y x por q para obtener la ecuación 8.40. La solución, pues,

la obtendremos realizando dicha sustitución en la ecuación 10.22, página 167, tomo I, y queda

$$q = Q_0 \, e^{-bt} \cos \omega t \tag{8.41}$$

donde $$b = \frac{R}{2L} \quad \text{y} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \tag{8.42}$$

si $R^2 < 4L/C$. Es decir, la carga del condensador y la intensidad de la corriente están representadas por funciones sinusoidales amortiguadas del tiempo (fig. 8.15). En cambio, si $R^2 = 4L/C$ no habría os-

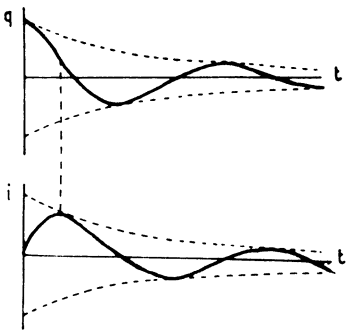


FIG. 8.15 Variación con el tiempo de la carga q del condensador y de la intensidad i de la corriente de descarga oscilante amortiguada.

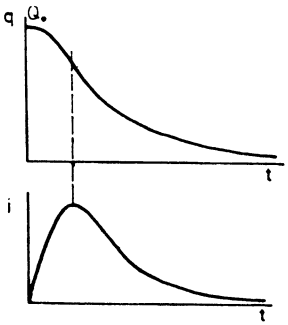


FIG. 8.16 Carga q del condensador e intensidad de la corriente en una descarga aperiódica.

cilación, pues $\omega = 0$ y estaríamos en las condiciones de *amortiguamiento crítico* (§ 10.8, p. 170, tomo I), y para valores de R mayores, tampoco habría oscilación y la descarga se dice que es aperiódica (fig. 8.16).

9

Corriente alterna

El mayor aprovechamiento de la energía eléctrica se hace bajo la forma de corrientes que se repiten invirtiendo el sentido de recorrido periódicamente y que reciben el nombre de corrientes alternas. El comportamiento de éstas en un circuito depende no solamente de los elementos componentes del mismo, sino también de la frecuencia de la corriente. Las instalaciones de gran potencia que suministran energía eléctrica a los usuarios, lo hacen mediante corrientes de baja frecuencia (50 Hz en Europa, 60 Hz en Estados Unidos), mientras que en las comunicaciones por radio son frecuentes las corrientes alternas de frecuencias del orden del millón de hertz (onda media) y superiores, empleándose en TV frecuencias de hasta 3000 MHz en UHF (ultra-high-frequency).

El problema a analizar es semejante al estudiado en § 10.9 del tomo I para las oscilaciones forzadas, y en nuestro estudio prescindiremos de los fenómenos transitorios que se producen al conectar el generador al circuito, pues ello requeriría conocimientos de Ecuaciones Diferenciales superiores a los que tendrán la mayoría de los lectores. Así pues, en todos los casos supondremos que los fenómenos han sido originados con suficiente antelación para que el transitorio haya desaparecido prácticamente.

9.1 Valor eficaz de una función periódica. En muchas ocasiones en las que intervienen fenómenos periódicos se obtienen efectos que dependen, no del valor instantáneo de la función, sino de su cuadrado. Así, por ejemplo, la potencia calorífica desprendida en un conductor recorrido por una corriente es, en cada instante, proporcional al cuadrado de la intensidad de la corriente. Por ello convendrá calcular en muchos casos el valor medio durante un período del cuadrado de una función periódica, el cual sería una medida del cuadra-

do de dicha función, y a la raíz cuadrada de dicho valor medio se le da el nombre de *valor eficaz* de la función periódica.

Así pues, si es $y = Y(t)$ una función periódica de período T, dividamos éste en fracciones infinitesimales dt. Dentro de cada una de ellas podemos suponer que la función tiene un cuadrado definido. Multipliquémoslo por dt y sumemos todos los productos. Dividiendo dicha suma por T tendremos el valor medio de su cuadrado

$$\overline{y^2} = \frac{1}{T}\int_0^T Y^2(t)\,dt \tag{9.1}$$

y la raíz cuadrada de esta cantidad es el valor eficaz de la función.

Consideremos el caso particular de que la función sea sinusoidal. Tendremos

$$y = Y_0 \operatorname{sen}\,(\omega t + \varphi) \quad \text{siendo} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{9.2}$$

luego

$$\overline{y^2} = \frac{1}{T}\int_0^T Y_0^2 \operatorname{sen}^2\,(\omega t + \varphi)\,dt =$$

$$= \frac{Y_0^2}{T}\int_0^T \frac{1 - \cos\,2\,(\omega t + \varphi)}{2}\,dt =$$

$$= \frac{Y_0^2}{T}\left[\frac{1}{2}\int_0^T dt - \frac{1}{2}\int_0^T \cos\,2\,(\omega t + \varphi)\,dt\right] = \frac{Y_0^2}{2} \tag{9.3}$$

pues $$\int_0^T \cos\,2\,(\omega t + \varphi)\,dt = \frac{\operatorname{sen}\,2\,(\omega T + \varphi) - \operatorname{sen}\,2\varphi}{2\omega} = 0$$

ya que $2\omega T = 4\pi$.

Extrayendo la raíz cuadrada en la ecuación 9.3 tendremos el valor eficaz de la función sinusoidal

$$Y_{ef} = \frac{Y_0}{\sqrt{2}} \tag{9.4}$$

de donde se deduce que el *valor eficaz de una función sinusoidal es igual a su valor máximo dividido por* $\sqrt{2}$.

9.2 Derivada e integral de una función sinusoidal del tiempo. Derivemos respecto a t la ecuación 9.2

$$\frac{dy}{dt} = Y_0\,\omega\,\cos\,(\omega t + \varphi) = Y_0\,\omega\,\operatorname{sen}\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \tag{9.5}$$

que al compararla con la ecuación 9.2 nos permite enunciar que *la derivada temporal de una función sinusoidal del tiempo es otra función sinusoidal de igual período, cuya amplitud es la de la función multiplicada por* ω *y cuya fase está adelantada en* $\pi/2$.

Evidentemente, como la integración es operación inversa de la derivación, la función 9.2 será la integral de la 9.5, y por tanto, *la integral de una función sinusoidal del tiempo es otra función sinusoidal de igual período, cuya amplitud es la de la función dividida por* ω *y cuya fase está retrasada en* $\pi/2$.

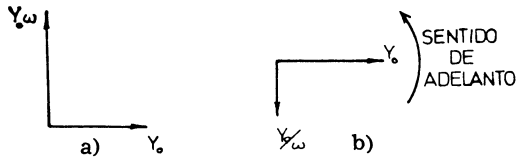


FIG. 9.1 Representación vectorial de Fresnel de una función sinusoidal de amplitud Y_0 (vector horizontal), y *a*) su derivada (vector vertical), b) su integral (vector vertical).

La representación vectorial de Fresnel de las funciones sinusoidales estudiada en § 10.7 del tomo I nos permite representar la función 9.2 por un vector de módulo Y_0 (fig. 9.1), su derivada por un vector de módulo $Y_0\,\omega$ (fig. 9.1 *a*) y su integral por un vector de módulo Y_0/ω (fig. 9.1 *b*), éstos perpendiculares al primero y ambos de sentidos opuestos, en virtud de las diferencias de fase anteriormente indicadas.

9.3 Corriente alterna. Llamamos corriente alterna (c. a.) a toda corriente eléctrica cuya intensidad pueda representarse mediante una función periódica del tiempo y cuyo sentido de circulación se invierta periódicamente. La función periódica mencionada, por el hecho de ser periódica, admite un desarrollo único (cfr. ec. 12.7, p. 205, tomo I) en serie de funciones sinusoidales cuyas frecuencias sean todas múltiplos de la más baja. De esta manera, toda c. a. podemos considerarla como superposición de corrientes sinusoidales más, eventualmente, una c. c. correspondiente al término constante A_0 del desarrollo, el cual es el valor medio de la intensidad de la corriente total. Por esta razón, limitaremos nuestro estudio de las c. a. al de corrientes sinusoidales.

9.4 Circuito RLC serie recorrido por una c. a. Consideremos un tramo de circuito constituido por una resistencia R, una inductancia

de coeficiente de autoinducción L y un condensador de capacidad C, conectados en serie (fig. 9.2) y recorridos por una c. a. de intensidad representada por

$$i = I_0 \text{ sen } \omega t \tag{9.6}$$

para lo cual basta tomar un origen de tiempo conveniente. En el instante t, la intensidad de la corriente tendrá el valor i dado por la ecuación 9.6, y para fijar ideas podemos suponer que en dicho instante la corriente circula en el sentido que lleva del punto A al E (si fuera el opuesto, i sería negativa). Dicha corriente origina en R una caída de tensión

$$V_A - V_B = R\,i \tag{9.7}$$

entre los puntos B y D existe una fem dada por $-L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$; luego la caída de tensión será esta cantidad cambiada de signo, es decir,

$$V_B - V_D = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{9.8}$$

Por último, entre D y E existe una ddp

$$V_D - V_E = \frac{q}{C} \tag{9.9}$$

Entre el instante t y el $t + \mathrm{d}t$, la corriente lleva al condensador una carga

$$\mathrm{d}q = i\,\mathrm{d}t \tag{9.10}$$

de donde resulta $$q = \int i\,\mathrm{d}t$$

que sustituida en la ecuación 9.9 da

$$V_D - V_E = \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t \tag{9.11}$$

Sumando las ecuaciones 9.7, 9.8 y 9.11 tenemos que en el instante genérico t

$$V_A - V_E = R\,i + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t \tag{9.12}$$

Los tres términos del segundo miembro son tres funciones sinusoi-

dales de igual período (cfr. § 9.2) y su suma también lo será, por lo que la ddp $V_A - V_E$ podrá escribirse en la forma

$$v = V_0 \text{ sen } (\omega t + \varphi) \tag{9.13}$$

Para hallar la relación existente entre v e i podemos hacer referencia a lo visto en §§ 10.9 y 10.10 del tomo I escribiendo la ecuación 9.12 en la forma

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = v \tag{9.14}$$

que corresponde a la ecuación 10.27, p. 172, tomo I, con las mismas equivalencias $L \to m$, $1/C \to k$, $q \to x$ hechas en § 8.10, correspondiendo v a F. El lector puede seguir toda la teoría vista para las vibraciones forzadas examinando el significado físico de cada ecuación al efectuar las equivalencias mencionadas. No obstante, y con el fin de familiarizar al lector con el trazado de los diagramas vectoriales que tan ilustrativos son en el análisis de circuitos de c. a., obtendremos los resultados correspondientes prescindiendo de dichas equivalencias y partiremos de la ecuación

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = v \tag{9.15}$$

que es la 9.12 sustituyendo $V_A - V_E$ por el valor dado por la 9.13.

Habida cuenta de que la magnitud eléctrica común a los tres elementos de circuito es la intensidad de corriente, tomaremos como eje

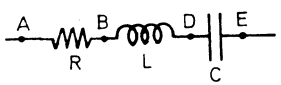


FIG. 9.2 Circuito *RLC* serie.

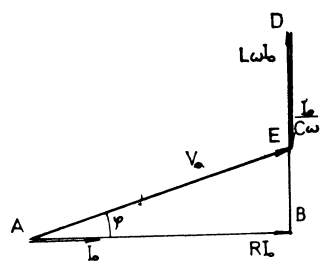


FIG. 9.3 Diagrama vectorial correspondiente al circuito de fig. 9.2.

de referencia el correspondiente al vector de módulo I_0 representativo de i. El primer término del primer miembro de la ecuación 9.15 es el producto de la constante R por la función i y nos dará otra fun-

ción en concordancia de fase con i, cuya amplitud será $R I_0$, por lo que vendrá representada por un vector $B - A$ de igual dirección y sentido que el representativo de i. El segundo término del primer miembro de la ecuación 9.15 corresponde a una función sinusoidal de módulo $L\omega I_0$ y adelantada en fase $\pi/2$ respecto a i (cfr. § 9.2) y estará representada por el vector $D - B$ (fig. 9.3). Por último, el tercer término también será una función sinusoidal de igual período en oposición con la anterior (cfr. § 9.2) y de módulo $I_0/C\omega$, que vendrá representada por el vector $E - D$. La representación de Fresnel nos permite sumar vectorialmente estos vectores para obtener el que representa, en amplitud y fase, a la función sinusoidal v, suma de aquellas tres. De la figura 9.3 tenemos

$$\overline{AB} = R I_0 \qquad \overline{BE} = I_0 L\omega - \frac{I_0}{C\omega}$$

y por el teorema de Pitágoras

$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 \quad \text{o sea} \quad V_0^2 = I_0^2 \left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right]$$

o sea

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}} \tag{9.16}$$

y también

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \tag{9.17}$$

Las ecuaciones 9.16 y 9.17 relacionan de manera completa la intensidad de la c. a. con la ddp entre los extremos del circuito *RLC* de la figura 9.2, pues conocidos los valores de los parámetros del circuito, la frecuencia y el valor máximo de la tensión o de la intensidad, puede obtenerse el valor máximo correspondiente a la otra cantidad (ec. 9.16), así como la diferencia de fase (ec. 9.17) existente entre ellas.

Dividiendo por $\sqrt{2}$ los dos miembros de la ecuación 9.16 tendríamos la relación entre los valores eficaces de tensión e intensidad. Si en la figura 9.3 hubiéramos tomado, en vez de los valores máximos, los eficaces como módulos de los vectores, obtendríamos una figura semejante, siendo $\sqrt{2}$ la razón de semejanza entre ambas. Por eso, muchas veces los diagramas vectoriales se trazan atendiendo a los

valores eficaces. Representando por I la intensidad eficaz y por V la tensión eficaz, la ecuación 9.16 nos da

$$I = \frac{V}{Z} \tag{9.18}$$

en donde

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \tag{9.19}$$

es la llamada *impedancia* del circuito (cfr. ec. 10.39, p. 174, tomo I) y se mide en ohm.

El numerador de la ecuación 9.17, que también se mide en ohm, recibe el nombre de *reactancia* del circuito y suele representarse por X. Puede ser positiva o negativa, según que la *reactancia inductiva*

$$X_L = L\omega \tag{9.20}$$

sea, respectivamente, mayor o menor que la *reactancia capacitiva*

$$X_C = \frac{1}{C\omega} \tag{9.21}$$

En el primer caso, $\varphi > 0$ y la intensidad resulta estar retrasada respecto a la tensión (fig. 9.3). Si $X_L < X_C$, $\varphi < 0$ y en la figura 9.3 el vector $E - A$ quedaría por debajo del representativo de i, significando ello que la tensión estaría retrasada respecto a la intensidad.

Podemos resumir lo anterior de la manera siguiente:

$$V = IZ \quad \text{donde} \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$X = X_L - X_C, \qquad X_C = \frac{1}{C\omega}, \qquad X_L = L\omega \tag{9.22}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R}$$

De la última de estas ecuaciones, y teniendo en cuenta que

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}$$

resulta

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{X}{Z} \qquad \cos\varphi = \frac{R}{Z} \tag{9.23}$$

expresiones que son de gran utilidad.

9.5 Circuito con resistencia y autoinducción. El circuito representado en la figura 9.4 podemos considerarlo como el caso límite del de la figura 9.2 cuando llegan a tocarse las armaduras del condensador, en cuyo caso los puntos D y E estarán al mismo potencial. Ahora bien, al tender a cero la separación de las armaduras tiende a infinito C (cfr. ec. 3.18, 3.19, 3.20) y por tanto tiende a cero X_C y $X = X_L$ resultando válidas las ecuaciones 9.22 teniendo en cuenta esto. Es de señalar que en tal caso $\varphi > 0$ pues $X = X_L > 0$. Luego *en un circuito en que sólo haya resistencia y autoinducción la intensidad está retrasada respecto a la tensión.*

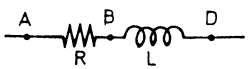


FIG. 9.4 Circuito *RL* serie.

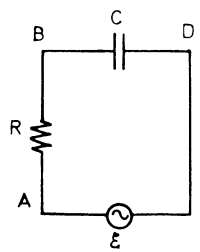


FIG. 9.5 Circuito *RC*.

Si hiciéramos tender a cero R, tendería a cero cos φ (cfr. ec. 9.23) y por tanto $\varphi \to \pi/2$, luego en el caso ideal de una inductancia sin resistencia, la intensidad está retrasada en fase $\pi/2$ respecto a la tensión y sería

$$V = I\,L\,\omega \tag{9.24}$$

9.6 Circuito con resistencia y capacidad. En la figura 9.5 hemos representado el circuito $R\,C$ y al generador $\mathcal{E}$ de c.a. que lo alimenta. Al igual que en el circuito de la figura 9.2, la corriente que manda el generador no hace más que cargar y descargar el condensador. Es decir, no circula a través de él sino solamente por el circuito exterior, si bien en la relación entre tensión e intensidad interviene el condensador como si fuera un elemento de circuito recorrido por una corriente y por ello se le asigna una reactancia X_C. En el caso actual, como $L = 0$, será $X = -X_C$ y de las ecuaciones 9.22 resulta

$$\text{tg}\ \varphi = -\frac{1}{C\,\omega\,R} \tag{9.25}$$

lo que nos indica que $\varphi < 0$ y por tanto que *en un circuito en que la reactancia sea capacitiva la tensión está retrasada en fase respecto a la intesidad.* Si el generador alimentara directamente al condensador, $R = 0$ y la ecuación 9.25 nos indica *que en una capacidad pura la intensidad está adelantada en fase $\pi/2$ respecto a la ddp entre las armaduras.* En tal caso, de las ecuaciones 9.22 resulta

$$I = V\,C\,\omega \tag{9.26}$$

9.7 Impedancias en serie. Los resultados de los §§ anteriores pueden aplicarse eficazmente al estudio de un tramo de circuito de c. a. constituido por varias impedancias puestas en serie (fig. 9.6). Así, tomando como referencia la intensidad de la c. a. que es común a

todos los elementos de circuito, partiremos de un punto A y dibujaremos el vector representativo de la ddp entre los extremos de R_1, la cual estará en concordancia de fase con la intensidad de la corriente y tendrá por valor eficaz $R_1 I$, con lo que tendremos el vector $B - A$.

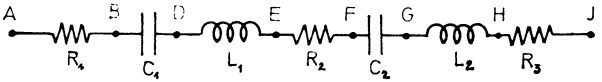


FIG. 9.6 Impedancias en serie.

La caída de tensión en C_1 está retrasada en fase $\pi/2$ respecto a la intensidad, y teniendo en cuenta la ecuación 9.26 podremos representarla por el vector $D - B$ (fig. 9.7), que sumado con el $B - A$ nos daría el $D - A$ (no dibujado en fig. 9.7), representativo de la ddp entre A y D. Análogamente, y en virtud de la ecuación 9.24, el vector $E - D$ de módulo $I L_1 \omega$ y adelantado $\pi/2$ respecto al de la intensidad, representará la ddp entre los puntos D y E, y así sucesiva-

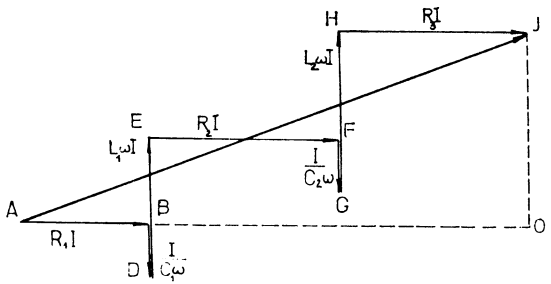


FIG. 9.7 Diagrama de tensiones correspondiente a la serie de impedancias de la figura 9,6.

mente iríamos construyendo el diagrama de la figura 9.7, en el cual la ddp entre dos puntos cualesquiera del circuito de la figura 9.6 viene representada por el vector que determinan dichos puntos en el diagrama de la figura 9.7.

Consideremos ahora un triángulo rectángulo AOJ que tenga por hipotenusa el vector $J - A$ y uno de cuyos catetos coincida en dirección con el vector representativo de i. El cateto $\overline{AO}$ tiene por longitud

$$\overline{AO} = I (R_1 + R_2 + R_3)$$

y el otro cateto

$$\overline{OJ} = I \left(L_1 \omega + L_2 \omega - \frac{1}{C_1 \omega} - \frac{1}{C_2 \omega} \right)$$

El vector $J - A$ coincide con la hipotenusa y representa la ddp existente entre los extremos A y J del tramo de circuito considerado. Lo mismo se tendría, pues, si dicho tramo estuviere constituido por una resistencia única

$$R = \Sigma R_i \tag{9.27}$$

una inductancia única de reactancia

$$X_L = \omega \Sigma L_i \tag{9.28}$$

y una capacidad única tal que

$$\frac{1}{C} = \Sigma \frac{1}{C_i} \tag{9.29}$$

pues en tal caso, el circuito se reduce al representado en la figura 9.2 coincidiendo $O - A$ con $B - A$ (fig. 9.3) y $J - O$ con $E - B$ (fig. 9.3). Las ecuaciones 9.27, 9.28 y 9.29 nos indican que para hallar la relación existente entre la intensidad de la c. a. que circula por una serie de impedancias y la ddp entre los extremos de dicha serie, podemos realizar los cálculos considerando una resistencia única equivalente a la combinación serie de resistencias (cfr. § 4.12), una inductancia única de coeficiente de autoinducción suma del de todas las inductancias y una capacidad única igual a la equivalente a la asociación en serie de las distintas capacidades (cfr. ec. 3.27). Se entiende que con ello puede obtenerse la relación existente, en magnitud y fase, entre la intensidad de la corriente y la ddp *entre los extremos* de la serie de impedancias.

9.8 Impedancias en paralelo. Consideremos varias impedancias calesquiera conectadas en paralelo entre los puntos A y B (fig. 9.8 *a*). Todas ellas están sometidas a la misma ddp, por lo que tomaremos como referencia el vector $B - A$ (fig. 9.8 *b*), representativo de la ddp común a todas las ramas, el cual será hipotenusa de los distintos triángulos de tensiones correspondientes a cada una de las ramas. Así, por ej., por la rama superior circulará una corriente de intensidad eficaz I_1 retrasada respecto a la tensión, por ser inductiva la reactancia de dicha rama. El ángulo φ_1 vendrá dado por

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{L\omega}{R_1}$$

y determinará sobre la circunferencia de diámetro $V = AB$ el punto D, con lo que tendremos definida la ddp entre A y D que vale $R_1 I_1$.

Dividiendo, pues, por R_1 tendremos determinado el vector representativo de la intensidad de la corriente que circula por la primera rama. Operando análogamente con la segunda, determinaremos tam-

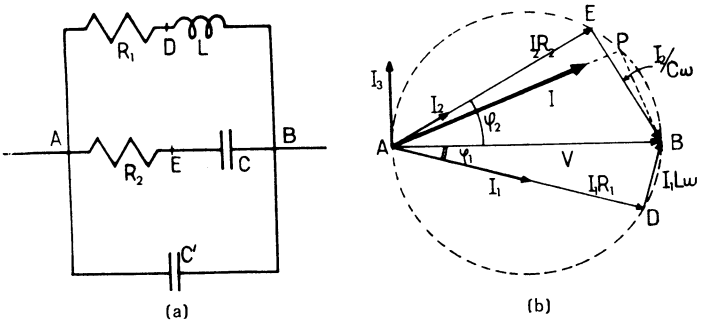


FIG. 9.8 *a*) Impedancias en paralelo. b) Diagrama vectorial de tensiones e intensidades en las impedancias anteriores.

bién el vector representativo de la intensidad de la c. a. correspondiente, de módulo I_2 y argumento

$$\varphi_2 = \text{arc tg } \frac{1}{R_2 C \omega}$$

en valor absoluto, tomado en el sentido de que la intensidad queda adelantada respecto a la tensión por ser capacitiva la reactancia (cfr. § 9.6). La tercera rama es una capacidad pura, por lo que la intensidad estará adelantada $\pi/2$ respecto a la tensión y su valor eficaz será (cfr. ec. 9.26)

$$I_3 = V C' \omega$$

Operando de esta forma se obtienen los vectores representativos de todas las corrientes derivadas y su suma vectorial representará a la intensidad de la corriente total que circula por la línea. Prolongándolo, determinará sobre la circunferencia un punto P, y la distancia AP (medida en volt) dividida por I (en ampère) nos da la resistencia equivalente R_{eq} de la impedancia equivalente al conjunto de impedancias en paralelo. El otro cateto PB dividido por I nos dará la reactancia equivalente X_{eq}, que puesta en serie con R_{eq} entre A y B haría que circulara por la línea la misma intensidad de corriente manteniéndose entre A y B la misma ddp que cuando están conectadas en paralelo las impedancias. En el ejemplo de la figura 9.8, X_{eq} es capacitiva por estar la intensidad total adelantada respecto a la ddp.

9.9 Resonancia. Cuando en un tramo de circuito en el que existan reactancias la intensidad y la tensión estén en concordancia de fase, se dice que en dicho tramo hay resonancia eléctrica. Consideremos primeramente el circuito serie de la figura 9.2. Si la intensidad y la ddp entre sus extremos A y E están en concordancia de fase, es decir, si $\varphi = 0$, la ecuación 9.17 nos dice que

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \tag{9.30}$$

es la condición de *resonancia serie*. Esta condición sólo se cumple para un valor de ω y por tanto para un valor de la frecuencia al que se da el nombre de *frecuencia de resonancia* y que por ser siempre $\omega = 2\pi f$ será

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{9.31}$$

que coincide con el valor de la frecuencia propia de oscilación del circuito (cfr. ec. 8.39), lo que justifica el nombre de resonancia dado al fenómeno, pues al sistema que sin resistencia tendría una frecuencia propia se le aplica una ddp de frecuencia coincidente con ella (cfr. § 10.10, p. 175, tomo I).

La condición de resonancia 9.30 hace iguales las tensiones entre los puntos B y D extremos de la inductancia y los puntos D y E de las armaduras del condensador, si bien tienen fases opuestas. En consecuencia, la ddp entre los extremos A y E es igual a la existente entre los puntos A y B extremos de la resistencia R. El diagrama vectorial será el representado en la figura 9.9 y en él vemos que si R es menor que la reactancia inductiva o capacitiva, las ddp que aparecen en los extremos de la inductancia y entre las armaduras del condensador serán mayores que la ddp aplicada entre A y E. Se dice entonces que en la inductancia y en el condensador aparecen *sobretensiones* que hay que tener en cuenta al calcular los aislamientos de las distintas partes del circuito. Este efecto hace que el circuito serie constituya un amplificador de tensión, por el hecho de que aplicando una tensión alterna dada, puede obtenerse otra mayor.

Ejemplo. El circuito de una antena puede considerarse asimilado al de la figura 9.2 en donde el condensador sea de capacidad variable a voluntad, $L = 1$ mH y $R = 100\ \Omega$. Calcular la capacidad que hará resonante el circuito para una frecuencia de 1 MHz y determinar cuántas veces mayor es la tensión en la inductancia que entre los extremos del circuito.

Despejando de la ecuación 9.30 el valor de C correspondiente a la resonancia, tenemos

$$C = \frac{1}{L\,\omega^2} = \frac{1}{10^{-3}(2\,\pi \cdot 10^6)^2} = 25 \cdot 10^{-12}\ \text{F} = 25\ \text{pF}$$

La reactancia inductiva es

$$X_L = L\,\omega = 10^{-3} \times 2\,\pi\,10^6 = 6283\ \Omega$$

y la tensión en ella es

$$V_L = 6283\,I\ \text{volt}$$

por otra parte, la tensión entre los extremos del circuito es igual a la tensión en la resistencia, o sea,

$$V = R\,I = 100\,I\ \text{volt}$$

y la amplificación obtenida será

$$\frac{V_L}{V} = 62{,}83$$

En las condiciones de resonancia, $X = 0$ y por tanto la impedancia es *mínima* e igual a R.

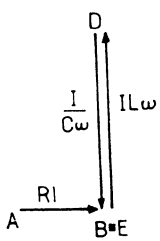


FIG. 9.9 Diagrama vectorial correspondiente al caso de resonancia serie.

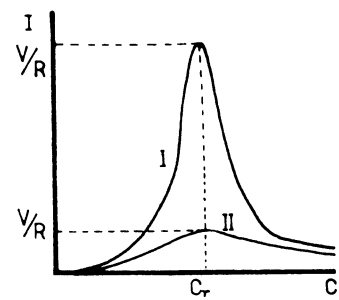


FIG. 9.10 Curvas que dan la intensidad eficaz en función de la capacidad. I, corresponde a una resistencia R pequeña. II, corresponde a una resistencia R grande. C_r es el valor de la capacidad que establece la condición de resonancia.

Dibujemos una gráfica llevando en ordenadas la intensidad eficaz de la c. a. que circula por el circuito representado en la figura 9.2 cuando se le aplica una ddp alterna dada, y en abscisas el valor de la capacidad C (igual podríamos poner cualquiera otra de las cantidades que intervienen en la ecuación 9.30). A cada valor de C corresdonde un valor de Z y la ecuación 9.18 nos permitirá conocer el valor correspondiente de I. Así pues, dados V, ω, R y L, la relación entre I y C será la representada en la figura 9.10, donde la curva I corres-

ponde a un valor pequeño de R y la II a un valor de R mayor. La impedancia es mínima e igual a R en la resonancia, por lo que entonces I será máxima e igual a V/R. De aquí que cuanto menor sea R tanto más rápidamente subirá la curva y la resonancia es tanto más *aguda*. La agudeza de la resonancia se mide por el factor Q de calidad del circuito, el cual se define por

$$Q = \frac{L\,\omega_r}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{9.32}$$

donde ω_r es la pulsación de resonancia que se obtiene de la ecuación 9.30. En el ejemplo anterior, $Q = 62{,}83$.

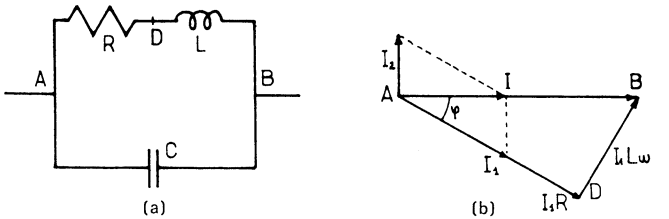


FIG. 9.11 Resonancia paralelo: *a*) circuito, *b*) diagrama vectorial correspondiente.

La definición de resonancia puede aplicarse también al circuito de la figura 9.11 *a* considerando concordancia de fase entre la intensidad de la corriente que llega por la línea y la ddp entre A y B. El diagrama vectorial correspondiente será el de la figura 9.11 *b*, y tenemos

$$I_1 = \frac{V}{Z} \quad \text{y} \quad \text{sen } \varphi = \frac{X_L}{Z} \quad \text{siendo } Z = \sqrt{R^2 + L^2\,\omega^2}$$

$$I_2 = V\,C\,\omega \quad \text{pero también} \quad I_2 = I_1 \text{ sen } \varphi$$

luego

$$V\,C\,\omega = \frac{V}{Z}\,\frac{X}{Z}$$

de donde resulta

$$\frac{L}{C} = R^2 + L^2\,\omega^2 \tag{9.33}$$

como condición para la *resonancia paralelo*, también llamada *antirresonancia*. Llamando ω_{ar} a la pulsación de antirresonancia, de las ecuaciones 9.32 y 9.33 deducimos

$$\omega^2_{ar}\,L\,C = 1 - \frac{1}{Q^2} \tag{9.34}$$

que nos enseña que en la resonancia paralelo las reactancias de ambas ramas no son exactamente iguales, como lo eran en el caso de la resonancia serie. De la ecuación 9.34 resulta

$$X_L = X_C \left(1 - \frac{1}{Q^2}\right)$$

se comprende que para circuitos de Q elevada, las condiciones de resonancia serie y paralelo diferirán muy poco. En el caso límite $R = 0$, $\varphi = \pi/2$ en la figura 9.11 *b*, I_1 e I_2 estarán en oposición de fase y tendrán igual valor, pues en tal caso $X_L = X_C$; luego $I = 0$ y el circuito resonante paralelo presentaría una impedancia infinita a la frecuencia de resonancia. Un tal circuito recibe el nombre de *circuito tapón*, pues no deja pasar las corrientes de frecuencia igual a la de resonancia y sí las de frecuencias diferentes.

Ejemplo. Una bobina de $L = 1$ mH tiene una $Q = 100$ para la c.a. de $\omega = 10^7$ s^{-1}. Calcular su resistencia, la capacidad del condensador que hay que conectarle en paralelo para que el circuito sea resonante a dicha pulsación y la impedancia que presenta a las corrientes que lleguen a él de pulsaciones 10^7, 10^6 y 10^8 s^{-1}.

De la ecuación 9.32 resulta

$$R = \frac{L\,\omega_r}{Q} = \frac{10^{-3} \cdot 10^7}{10^2} = 100\ \Omega$$

para la resistencia de la bobina. De la misma definición de Q resulta para la capacidad de resonancia

$$C = \frac{L}{Q^2 R^2} = \frac{10^{-3}}{10^4 \cdot 10^4} = 10^{-11}\ \text{F} = 10\ \text{pF}$$

Para el cálculo de la impedancia comenzaremos por determinar la intensidad de la corriente que circula por la bobina. Al aplicar una ddp eficaz V, será

$$I_1 = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

donde

$$X_L = L\,\omega_r = 10^{-3} \cdot 10^7 = 10^4\ \Omega$$

Pero (fig. 9.11 b)

$$I = I_1 \cos\varphi \qquad \text{y} \qquad \cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

luego

$$I = \frac{V\,R}{R^2 + X_L^2} \qquad \text{de donde} \qquad Z = \frac{V}{I} = \frac{R^2 + X_L^2}{R}$$

y sustituyendo valores numéricos queda

$$Z \simeq 10^6\ \Omega$$

Para la c.a. de $\omega = 10^6\ s^{-1}$ (cuya frecuencia difiere sólo en un 10 % de la de resonancia) trazaremos el diagrama vectorial correspondiente (fig. 9.12) tomando los ejes Ax y Ay que se indican. En este caso tenemos

$$X_L = L\,\omega = 10^3\ \Omega \qquad \sqrt{R^2 + X_L^2} = 1005\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{C\,\omega} = 10^5\ \Omega \qquad I_1 = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{V}{1005}$$

$$I_2 = \frac{V}{X_C} = V\,10^{-5}; \quad \text{sen}\ \varphi = \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{1000}{1005}; \quad \cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{100}{1005}$$

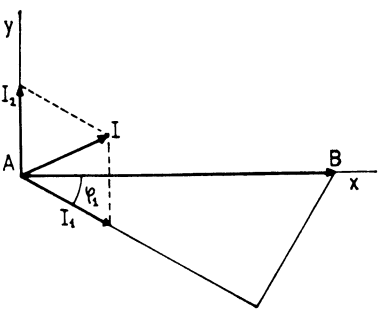


FIG. 9.12

Para hallar la intensidad eficaz de la c.a. total representada por el vector I en la figura 9.12, calcularemos sus componentes x e y que serán

$$I_x = I_1 \cos\varphi = V\ 0{,}99\cdot 10^{-4}\ \text{A}$$

$$I_y = I_2 - I_1\ \text{sen}\ \varphi = V\left[10^{-5} - \frac{1000}{(1005)^2}\right] = -V\ 9{,}8\cdot 10^{-4}\ \text{A}$$

y resulta

$$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} = V\ 9{,}8\cdot 10^{-4}\ \text{A}$$

luego

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{10^4}{9{,}8} \simeq 10^3\ \Omega$$

que es unas mil veces menor que en el caso de resonancia. Por otra parte, el signo negativo de I_y nos indica que el vector I debe quedar por debajo del eje x, es decir, la intensidad está retrasada respecto a la tensión y el circuito se comporta como una impedancia inductiva.

Para la c.a. de $\omega = 10^8\ s^{-1}$ operaremos análogamente y resulta

$$X_L = 10^5\ \Omega \qquad \sqrt{R^2 + X_L^2} \simeq 10^5\ \Omega \qquad X_C = 10^3\ \Omega$$

$$I_1 = V\,10^{-5} \qquad I_2 = V\,10^{-3} \qquad \text{sen}\ \varphi \simeq 1 \qquad \cos\varphi = 10^{-3}$$

$$I_x = V\,10^{-8} \qquad I_y \simeq V\,10^{-3} \qquad I \simeq V\cdot 10^{-3} \qquad Z \simeq 10^3\ \Omega$$

como en el caso anterior, si bien ahora $I_y > 0$ y el circuito se comporta como capacitivo.

9.10 Potencia de una c. a. Supongamos que por un tramo de un circuito circule una c. a. de intensidad $i = I_0 \operatorname{sen} \omega t$, existiendo entre los extremos de dicho tramo una ddp $v = V_0 \operatorname{sen} (\omega t + \varphi)$. Entre los instantes t y $t + dt$ circula una carga $i\,dt$ que al sufrir una caída de tensión v disipa una energía

$$dW = v\,i\,dt$$

La energía disipada, pues, durante un período T será

$$W = \int_0^T v\,i\,dt = V_0 I_0 \int_0^T \operatorname{sen}\ \omega t\ \operatorname{sen}\ (\omega t + \varphi)\,dt \qquad (9.35)$$

Ahora bien, la Trigonometría nos enseña que

$$\cos\ \alpha - \cos\ \beta = -2\ \operatorname{sen}\ \frac{\alpha + \beta}{2}\ \operatorname{sen}\ \frac{\alpha - \beta}{2}$$

y haciendo $\qquad \frac{\alpha + \beta}{2} = \omega t + \varphi \qquad \frac{\alpha - \beta}{2} = \omega t$

resulta $\qquad \alpha = 2\,\omega t + \varphi \qquad \beta = \varphi$

y la ecuación 9.35 puede escribirse en la forma

$$W = \frac{V_0 I_0}{2} \int_0^T [\cos \varphi - \cos\ (2\,\omega t + \varphi)]\,dt = \frac{V_0 I_0}{2}\,T \cos \varphi \qquad (9.36)$$

ya que $\int_0^T \cos\ (2\,\omega t + \varphi)\,dt = \dfrac{\operatorname{sen}\ (2\,\omega T + \varphi) - \operatorname{sen}\ \varphi}{2\,\omega} = 0$

pues $\qquad 2\,\omega T = 4\,\pi$

En consecuencia, la potencia media por período disipada en el tramo se obtendrá dividiendo por T la energía W dada por la ecuación 9.36, es decir,

$$\overline{P} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}\,\frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos \varphi = V\,I \cos \varphi \qquad (9.37)$$

La cantidad cos φ es el llamado *factor de potencia* del tramo considerado, y la ecuación 9.37 nos dice que la potencia media por período que disipa la c. a. es igual al producto de la tensión eficaz por la intensidad eficaz, multiplicado por el factor de potencia del circuito.

El vector representativo de la intensidad de corriente lo podemos

descomponer en dos (fig. 9.17), I' e I'', el primero de igual dirección que V y el otro perpendicular, lo cual equivale a considerar que

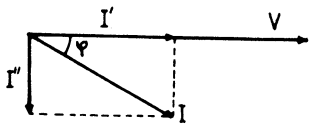


FIG. 9.13 Corrientes activa y reactiva.

la c. a. es la superposición de dos corrientes: una, I', en concordancia de fase con la ddp, y la otra, I'', en cuadratura de fase con ella ($\varphi = \pi/2$). Resulta así

$$I' = I \cos \varphi \qquad I'' = I \operatorname{sen} \varphi$$

La primera de dichas componentes recibe el nombre de *corriente activa* o wattada, pues transporta toda la potencia de la corriente total, ya que (ec. 9.37)

$$\overline{P} = V I'$$

La otra componente, I'', recibe el nombre de *componente reactiva* o dewattada. No transporta potencia y se debe a la presencia de reactancia, pues de no existir ésta la intensidad y la ddp estarían en fase.

Teniendo en cuenta la primera de las ecuaciones 9.22 y la segunda de las 9.23, la 9.37 puede ponerse en la forma

$$\overline{P} = R I^2 \tag{9.38}$$

que nos dice que la potencia se disipa únicamente en las resistencias. En efecto, en una reactancia pura, $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ y $\cos \varphi = 0$. Ello se debe a que durante un cuarto de período se entrega energía a la reactancia (fig. 9.14 *b*) y durante el cuarto de período siguiente, ésta la devuelve al generador.

Las compañías suministradoras de energía eléctrica en forma de c. a. exigen que, en todo dispositivo que consuma potencia, el factor de potencia de la instalación sea superior a un cierto valor mínimo. Ello se debe a que al suministrar la energía bajo una ddp eficaz V dada, para una potencia $\overline{P}$ determinada la intensidad eficaz I de la c. a. que circula por la línea será tanto menor cuanto mayor sea $\cos \varphi$ (cfr. ec. 9.37) y conviene que por la línea sea mínima I a fin de reducir las pérdidas por efecto Joule en los cables. Es por esta

razón que los tubos fluorescentes llevan en paralelo un condensador en la forma indicada en la figura 9.11 *a*, con lo que se consigue que, a pesar de circular por el tubo una c. a. de intensidad representada por el vector de módulo I_1 (fig. 9.11 *b*), por el condensador circule

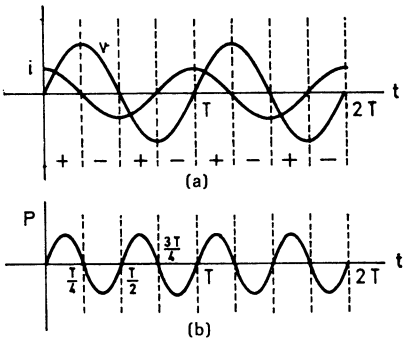


FIG. 9.14. *a*) Gráficas de i y v en función del tiempo estando en cuadratura de fase. En cada intervalo se indica el signo del producto vi. *b*) Potencia instantánea vi en función del tiempo. Su valor medio en un período T es nulo.

otra representada por I_2 y por la línea una c. a. menos intensa que I_1 representada por el vector I. En el caso de motores eléctricos también es necesaria una corrección análoga del factor de potencia, si bien por poder variar la potencia consumida por ellos no es posible fijar $\cos \varphi = 1$ y sólo se fija en tal caso el valor mínimo tolerable de $\cos \varphi$.

10

Medidas eléctricas y maquinaria

Los conocimientos adquiridos en los capítulos anteriores tienen una aplicación muy amplia de interés técnico y científico. En este capítulo vamos a dar una idea muy breve acerca de algunas aplicaciones a instrumentos de medida y a dispositivos industriales de generación de corrientes eléctricas y de motores destinados a transformar en energía mecánica la energía de las corrientes, tanto continuas como alternas. El tratamiento de estas cuestiones estará muy simplificado, sin pretender entrar en detalles que conciernan a un curso de Electricidad Industrial. Tan sólo se intentará dar una visión esquemática de los principios de funcionamiento.

10.1 Galvanómetro de cuadro móvil. Se llama galvanómetro a un instrumento que permita medir la intensidad de una corriente. En la figura 6.2 *b* ya presentamos el principio de funcionamiento del galvanómetro de bobinas fijas e imán móvil ideado por AMPÈRE. No obstante, el instrumento de precisión más en boga actualmente es el de imán fijo y cuadro móvil ideado por JACQUES ARSÈNE D'ARSONVAL (1851-1940). En él, la corriente cuya intensidad se quiere medir accede a una bobina plana de forma rectangular que rodea a un cilindro de hierro dulce, hallándose todo ello en el campo magnético creado por un imán permanente fijo. La bobina, llamada también *cuadro,* puede girar en torno del eje de simetría del sistema cuadro-cilindro, y la forma de las piezas polares, junto con la elevada permeabilidad magnética del cilindro, hacen que las líneas de fuerza del campo magnético del imán incidan casi normalmente al cilindro en la región por donde va a moverse el cuadro, siendo el módulo B del campo prácticamente el mismo en todos los puntos de dicha región. En la figura 10.1 *b* se presenta una sección transversal en la que se aprecian las piezas polares N y S del imán, el entrehierro, el cilindro y el cuadro. Como en todas las porciones de éste el campo está en su plano,

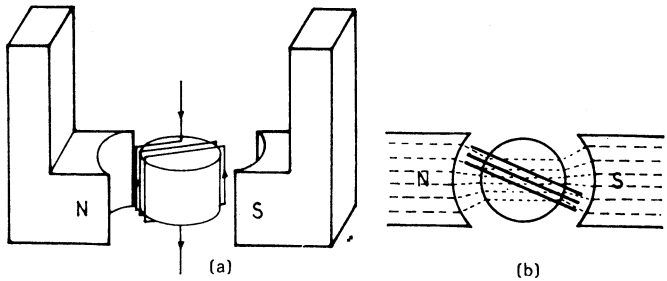


FIG. 10.1 Galvanómetro D'Arsonval: *a*) vista vertical, b) sección transversal.

el momento magnético **M** de la espira y el campo **B** serán siempre perpendiculares, y el momento del par de fuerzas que se ejercen sobre el cuadro valdrá (cfr. ec. 6.14)

$$P = M B = N S I B$$

siendo N el número de espiras del cuadro, S la superficie encerrada por cada una e I la intensidad de la corriente que se mide. El hilo de suspensión del cuadro, o un resorte espiral adecuado, puede proporcionar un par antagonista proporcional al ángulo girado, de momento

$$P' = C\,\theta$$

donde C es la constante de torsión, y el momento de este par es de sentido opuesto al del par electromagnético. El par resultante será nulo y, en consecuencia, habrá equilibrio cuando $P = P'$, o sea

$$I N S B = C\,\theta \qquad \text{es decir,} \qquad I = \frac{C}{N S B}\,\theta \qquad (10.1)$$

El coeficiente de θ recibe el nombre de *constante permanente* del galvanómetro, es igual a la intensidad de corriente que hace girar al galvanómetro un ángulo unidad y, en consecuencia, se medirá en ampère/radián. Su recíproco es la *sensibilidad* σ del galvanómetro, y como de la ecuación 10.1 resulta $\theta = \sigma I$, siendo

$$\sigma = \frac{N S B}{C} \qquad (10.2)$$

mide el ángulo girado por el galvanómetro al ser recorrido por una intensidad de corriente unidad. Se medirá en radián/ampère.

La desviación θ del galvanómetro puede medirse por el procedimiento de la palanca óptica que describimos al tratar de la balanza de Coulomb (fig. 7.4, p. 103, tomo I), o mediante una aguja solidaria al cuadro y que se mueve sobre un cuadrante. Los modernos galvanómetros D'Arsonval permiten la medida de intensidades de 10^{-10} A. Son del tipo de cuadro suspendido de un hilo al que corresponde una constante de torsión C muy pequeña. Cuando el cuadro se monta sobre rubíes y el par antagonista lo proporciona un resorte, C es mayor y la sensibilidad, por tanto, menor. En el mercado existen galvanómetros de este tipo para los cuales la desviación máxima corresponde a 1 μA.

Para poder utilizar el galvanómetro en la medida de corrientes más intensas que la máxima tolerable por él, puede conectársele en paralelo una resistencia a la que se da el nombre de *shunt*, por la que circula parte de la corriente total, circulando por el galvanómetro una fracción conocida de la intensidad total. Estudiemos el problema del shunt. Consideremos (fig. 10.2) un galvanómetro de resisten-

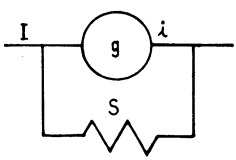


FIG. 10.2 Galvanómetro con shunt.

cia g con un shunt de resistencia s y calculemos ésta para que por el galvanómetro circule una corriente de intensidad n veces menor que la de la corriente que circula por la línea I. Es decir,

$$I = n\,i \tag{10.3}$$

La intensidad de la corriente que circula por el shunt será, en virtud de la primera ley de Kirchhoff, $I - i$, y como shunt y galvanómetro están en paralelo, tendremos (cfr. ec. 4.39)

$$s\,(I - i) = g\,i$$

y sustituyendo en ésta la ecuación 10.3 resulta

$$s\,(n - 1) = g$$

o sea

$$s = \frac{g}{n - 1} \tag{10.4}$$

Luego para que por el galvanómetro circule la n-sima parte de la intensidad total, habrá que conectarle en paralelo una resistencia $n-1$ veces menor que la del galvanómetro.

10.2 Amperímetros y voltímetros. El amperímetro es un instrumento que, como el galvanómetro, está destinado a medir intensidades de corriente. Ahora bien, las intensidades a medir serán del orden del ampère, lo que obligará a construirlo con hilo conductor más grueso y menor número de espiras, pues si por el cuadro de un galvanómetro circulara una corriente intensa, el efecto Joule lo destruiría. El mayor grosor del hilo y el menor número de espiras dan al amperímetro menor resistencia que al galvanómetro, lo cual también es conveniente, pues al circular una corriente más intensa, la caída de tensión en el cuadro podría ser excesiva. A todo ello hay que añadir un mayor valor de C proporcionado por un resorte más duro, y la sensibilidad será mucho menor, cosa necesaria, como puede comprenderse, para obtener desviaciones no excesivamente grandes. Por tanto, un tipo de amperímetro de c. c. está constituido por un dispositivo análogo al galvanómetro D'Arsonval con menor número de espiras de hilo más grueso, montado sobre pivotes y dotado de un resorte capaz de oponer un fuerte par antagonista.

Otro tipo lo constituyen los *amperímetros térmicos,* así llamados por medir la intensidad de la corriente a través del efecto Joule que originan. Un tipo (fig. 10.3 *a*) basa su funcionamiento en la acción de un campo magnético sobre la corriente que circula por un par termo-

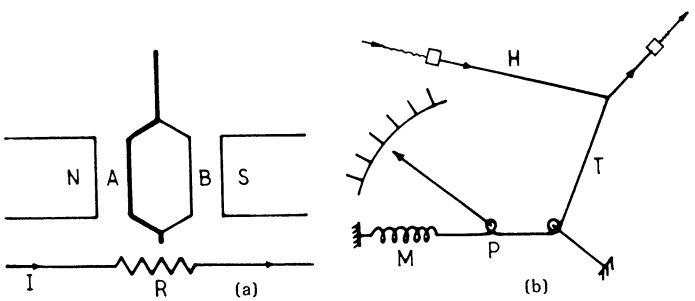


FIG. 10.3 Amperímetros térmicos: *a*) de par termoeléctrico, *b*) de dilatación.

eléctrico A/B, una de cuyas soldaduras se calienta a causa del calor desprendido por efecto Joule en una resistencia R recorrida por la corriente. Otro tipo (fig. 10.3 *b*) está constituido por un hilo H de aleación Pt-Ag por el que circula la corriente a medir. Otro hilo ten-

sor T lo mantiene tenso gracias a la acción del muelle M. Al calentarse H por efecto Joule, se dilata, y al mantenerlo tenso T, hace girar la polea P, que lleva solidaria una aguja que señala la intensidad sobre una escala. Estos amperímetros térmicos sirven tanto para c. c. como para c. a., pues el efecto Joule no depende del sentido de la corriente y es proporcional al cuadrado de la intensidad eficaz en el caso de c. a. (cfr. ec. 9.38). Los amperímetros electromagnéticos (fig. 10.4) están constituidos por dos solenoides en serie en cuyo interior existe una barra de hierro dulce que puede girar en torno de su

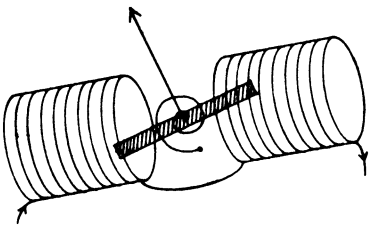


FIG. 10.4 Amperímetro electromagnético.

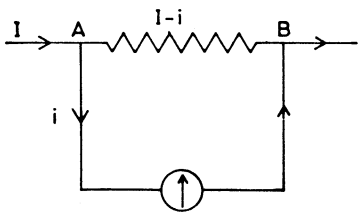


FIG. 10.5 Conexión de un voltímetro.

centro. Al pasar la corriente se imana y tiende a orientarse según el eje de los solenoides, a lo que se opone el par ejercido por el resorte espiral. Sirven tanto para c. c. como para c. a., pues al invertirse el sentido de la corriente se invierte también la polaridad magnética de la barra de hierro dulce, con lo que se mantiene el sentido del par de fuerzas. Son de poca precisión y hay que calibrarlos por comparación con otros amperímetros.

Todos los tipos de amperímetro admiten la conexión de un shunt, pero el conjunto amperímetro-shunt constituye el instrumento de medida y debe ser recorrido por la corriente a medir, es decir, *el amperímetro se conecta en serie* con el circuito estudiado. En él se producirá una caída de tensión $r\,I$ que deberá ser pequeña frente a la ddp que se aplique al circuito si no queremos que su inserción altere la intensidad de la corriente. Por ello, *los amperímetros tienen resistencia pequeña.*

Supongamos ahora que entre dos puntos A y B de un circuito entre los que hay una resistencia R conectamos, en paralelo con ésta, un galvanómetro de resistencia g (fig. 10.5). Por el galvanómetro circulará una corriente de intensidad i y su desviación será proporcional a ella y por tanto al producto $g\,i = V_A - V_B$. Por tanto, serviría para medir la ddp entre los puntos a que se conecta. Ahora bien,

$$V_A - V_B = R\,(I - i) = R\,I - R\,i$$

Pero si no se conectara, la ddp entre A y B sería $R\,I$ si se mantiene I constante, pues toda la corriente pasaría por R. Luego la conexión del galvanómetro ha alterado la ddp entre A y B en la cantidad $R\,i$. Para que ésta sea mínima, bastará que sea lo mayor posible la resistencia del circuito del galvanómetro. Es decir, si logramos que R sea despreciable frente a la resistencia del galvanómetro, i será despreciable frente a I y el producto $R\,i$ lo será frente a $R\,I$, con lo que la lectura del instrumento será prácticamente igual a la ddp que habría si no estuviera conectado. Poniendo en serie con el galvanómetro una resistencia elevada r y despreciando g frente a ella,

$$V_A - V_B = r\,i$$

será la ddp medida. A r se le llama *resistencia multiplicadora,* por ser la cantidad que, multiplicada por la intensidad de la corriente que recorre el instrumento, da la ddp buscada. El instrumento así dispuesto recibe el nombre de *voltímetro,* y vemos que *hay que conectarlo en paralelo* con la porción de circuito entre cuyos extremos queremos conocer la ddp. Según lo anterior, *el voltímetro debe tener una gran resistencia,* mucho mayor que aquella a la cual se derive (conecte en paralelo).

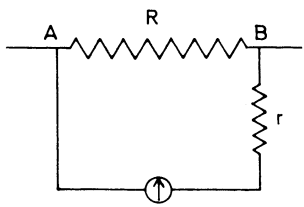


FIG. 10.6 Galvanómetro conectado como voltímetro. r es la resistencia multiplicadora.

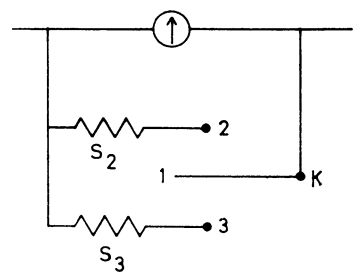


FIG. 10.7 Miliamperímetro de tres escalas.

Un voltímetro puede disponer de varias resistencias multiplicadoras, y como la desviación máxima está caracterizada por la intensidad máxima que pueda soportar, al utilizar una u otra resistencia multiplicadora dispondrá de una u otra ddp máxima mensurable, es decir, de varias escalas.

Ejemplo. Un instrumento de medida tiene 100 Ω de resistencia y sufre la desviación máxima cuando lo atraviesa una corriente de 1 mA. ¿Cómo hay que transformarlo para dotarlo de dos escalas de 10 mA y 100 mA de indicación

máxima? Al ponerle en serie una resistencia multiplicadora de 100 000 Ω, ¿qué tensiones podrán medirse?

Para dotarlo de las escalas pedidas habrá que conectarle sendos shunts que para la escala de 10 mA será (cfr. ec. 10.4)

$$s_2 = \frac{100}{9}\ \Omega$$

y para la escala de 100 mA será

$$s_3 = \frac{100}{99}\ \Omega$$

En la figura 10.7 se ha representado un esquema del instrumento en el cual al colocar el conmutador K en la posición 1 (sin shunt), el instrumento funciona en la escala de 1 mA máximo. En la posición 2 en la de 10 mA y en la 3 en la de 100 mA.

La resistencia del conjunto vale 100 Ω en la posición 1, mientras que en las 2 y 3 es del orden de 10 y 1 Ω (compruébese). Por tanto, al conectar en serie la resistencia multiplicadora de 100 000 Ω, pueden despreciarse. Ahora bien, sin shunt, la intensidad que circulando por el conjunto desvía el instrumento a fondo de escala es 1 mA y, por tanto, la ddp máxima que podrá medirse será

$$V_1 = R\,I_1 = 10^5 \cdot 10^{-3} = 100\ \text{V}$$

con el conmutador en la posición 2, la ddp que produce máxima desviación es

$$V_2 = R\,I_2 = 10^5 \cdot 10^{-2} = 1000\ \text{V}$$

y en la posición 3

$$V_3 = R\,I_3 = 10^5 \cdot 10^{-1} = 10\,000\ \text{V}$$

10.3 Potenciómetro. Para medir la fem de un generador, podrá ocurrírsenos conectar entre sus terminales un voltímetro de gran resistencia, con lo que la intensidad de la corriente que circule será muy pequeña y la ddp señalada por el voltímetro no diferirá gran cosa de la fem del generador si la resistencia interna de éste no es muy elevada (cfr. ec. 4.26). Pero si queremos conocer la fem con mucha precisión habrá que poder medir la ddp entre los terminales del generador cuando por él no circule corriente. Esto se logra con un dispositivo llamado *potenciómetro* en el que puede compararse la fem problema con la fem conocida de una pila patrón. El dispositivo puede presentar diversos perfeccionamientos pero, en esencia, se basa en el esquema de la figura 10.8. Las dos resistencias R_1 y R_2 son variables y conocidas, manteniéndose constante su suma $R = R_1 + R_2$. Podría lograrse ello con una resistencia bobinada con un cursor y tres terminales (fig. 10.9). Entre los terminales M y N siempre hay la misma resistencia R igual a la suma de la R_1 existente entre el terminal M y el cursor C, más la R_2 existente entre dicho cursor y

el terminal N. Sobre la guía del cursor podría grabarse una escala de resistencias que nos diera R_1 para cada posición de C.

B es una batería cuya fem no es necesario conocer pero que representaremos también por B, y $\mathcal{E}$ es el generador cuya fem queremos medir y que también representaremos por $\mathcal{E}$. En serie con él

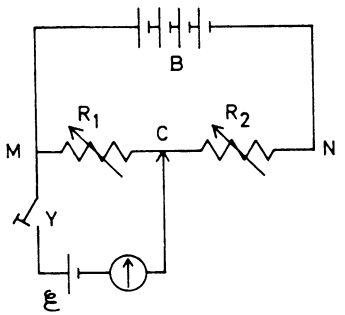


FIG. 10.8 Esquema de potenciómetro.

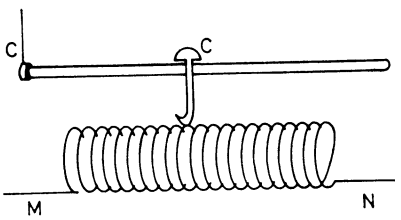


FIG. 10.9 Una de las maneras de lograr que $R_1 + R_2$ se mantenga constante. R_1 sería la resistencia existente entre M y el cursor C. R_2 sería la existente entre C y N.

tenemos un galvanómetro muy sensible con el cero en el centro de la escala que permitirá determinar si la corriente circula en uno u otro sentido. El interruptor Y se instala para que el generador sólo esté conectado en el instante de la medida. Cerrado Y, se varían R_1 y R_2 hasta conseguir que no pase corriente por el galvanómetro, lo cual será posible porque los generadores B y $\mathcal{E}$ están conectados *en oposición*, es decir, al punto M están unidos polos de igual signo. Cuando el galvanómetro no señale paso de corriente, la ddp entre M y C coincidirá con la fem $\mathcal{E}$, es decir,

$$\mathcal{E} = R_1 I \quad \text{donde} \quad I = \frac{B}{R_1 + R_2 + r} = \frac{B}{R + r}$$

siendo r la resistencia interna de B. Sustituyamos ahora $\mathcal{E}$ por una pila patrón de fem $\mathcal{E}'$ conocida, operemos igual que antes y la anulación de corriente se logrará para un nuevo valor R_1' de la resistencia entre M y C. Será, pues,

$$\mathcal{E}' = R_1' I \quad \text{donde} \quad I = \frac{B}{R_1' + R_2' + r} = \frac{B}{R + r}$$

como I tiene el mismo valor que antes, dividiendo $\mathcal{E}$ por $\mathcal{E}'$ resulta

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'} = \frac{R_1}{R_1'}$$

ecuación en la que sólo se desconoce $\mathcal{E}$ que se obtiene como cuarta proporcional.

El interruptor Y es particularmente necesario cuando se trabaja con la pila patrón, pues ésta no debe suministrar carga apreciable a causa de sus características particulares y el cierre del interruptor sólo dura el tiempo necesario para ver si el galvanómetro se desvía o no. Cuando no se desvíe ya no circula corriente por la pila y puede dejarse cerrado Y.

10.4 Electrodinamómetro y wattímetro. Imaginemos que el campo magnético creado por el imán en el galvanómetro D'Arsonval lo cree un par de bobinas fijas en serie BB recorridas por una corriente de intensidad I' (fig. 10.10) y que por el cuadro móvil circule otra corriente de intensidad I. El campo creado por las bobinas fijas será proporcional a I' (cfr. ec. 6.39) y el momento del par que se ejerce sobre el cuadro móvil es proporcional a dicho campo y a la intensidad I de la corriente que lo recorre (cfr. ec. 6.22 y 6.23), luego es proporcional al producto $I\,I'$. Montando dicho cuadro móvil sobre pivotes adecuados y dotándole de un resorte en espiral que oponga un par antagonista, tal como se ha explicado en § 10.1, la aguja solidaria al

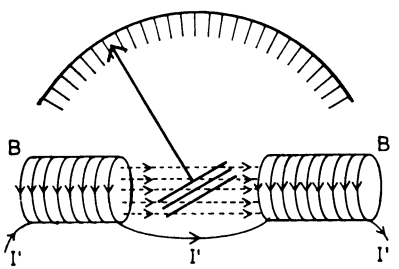


FIG. 10.10 Esquema de electrodinamómetro.

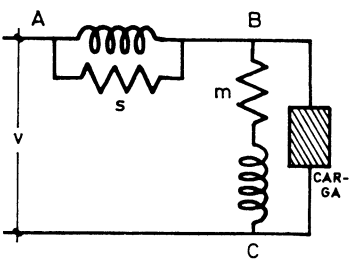


FIG. 10.11 Conexión de un electrodinamómetro como wattímetro.

cuadro móvil sufrirá una desviación proporcional a $I\,I'$. Conectando el cuadro móvil en serie con las bobinas fijas, $I = I'$ y la desviación sería proporcional a I^2. Como la corriente se invierte simultáneamente en las bobinas fija y móvil, se invierten simultáneamente la

corriente y el campo a que está sometido el cuadro móvil, por lo que no cambia el sentido del par de fuerzas. Este instrumento, llamado *electrodinamómetro,* podría servir también para medir intensidades eficaces de c.a.

El dispositivo de la figura 10.10 puede servir para medir la potencia consumida por un receptor o carga. Para ello se conecta en serie con la bobina móvil una gran resistencia multiplicadora m y el conjunto se conecta entre los dos hilos de la línea constituyendo el llamado *circuito de tensión* (BC en fig. 10.11). La bobina fija shuntada con una baja resistencia s se conecta en serie con la línea constituyendo el *circuito de intensidad* (AB en fig. 10.11). Como el circuito de tensión presenta una resistencia mucho mayor que la carga, por él se derivará una corriente de intensidad I despreciable frente a la de la que circula por ésta y podremos considerar que la intensidad de la corriente que circula por el circuito AB es igual a la de la corriente de carga y proporcional a la intensidad I' de la corriente que circula por la bobina fija. En cambio, por la bobina móvil circula una corriente de intensidad

$$I = \frac{v}{m}$$

proporcional a la ddp aplicada a la carga, luego la desviación del instrumento por ser proporcional a $I\,I'$ será también proporcional a $v\,I'$ que es la potencia consumida por la carga. Esto vale tanto para c.c. como para c.a., pues la posición media de equilibrio de la aguja será proporcional al valor medio de la potencia, el cual viene dado por la ecuación 9.37.

10.5 Generadores electromagnéticos de c.a. y c.c. Consideremos una espira conductora que pueda girar alrededor de un eje perpendicular a un campo magnético **B** con velocidad angular ω. Si medi-

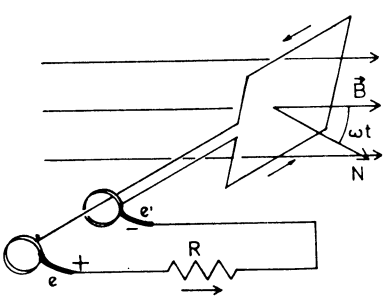


FIG. 10.12 Alternador elemental.

mos el tiempo a partir del instante en que la normal **N** a la espira coincida en dirección y sentido con **B**, en el instante t el ángulo que forman **N** y **B** será ωt y el flujo magnético a través de la espira será

$$\Phi = B S \cos \omega t \tag{10.5}$$

y vemos que es variable con el tiempo a causa de la rotación de la espira. En consecuencia, en ésta se inducirá una fem

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = B S \omega \text{ sen } \omega t = \mathcal{E}_0 \text{ sen } \omega t \tag{10.6}$$

periódica de período

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Si los extremos de la espira se llevan a dos anillos que giren con ella y sobre ellos frotan dos escobillas e y e' que cierran el circuito a través de una resistencia, por ejemplo, por ésta circulará una c.a. de intensidad

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B S \omega}{R} \text{ sen } \omega t = I_0 \text{ sen } \omega t$$

El sistema descrito constituye un *alternador* o generador de c.a. En la práctica, en vez de una espira se emplea una bobina de N espiras devanada sobre un tambor de hierro dulce. Éste hace que el valor de B sea mayor que en ausencia del núcleo, lo que, junto con la existencia de N espiras, eleva muchísimo el flujo máximo $\Phi_0 = N B S$ y en consecuencia la fem máxima $\mathcal{E}_0 = N B S \omega$. La fem inducida (ecuación 10.6) vemos que es sinusoidal y se anula cada vez que el flujo es máximo o mínimo. Es decir, cuando el plano de las espiras es normal a **B**.

Si en estos instantes en que $\mathcal{E} = 0$ se invirtieran las conexiones del circuito exterior, la fem a él aplicada sería unidireccional y estaría representada por la gráfica inferior de la figura 10.13 *b*. Es decir, por R circularía la corriente siempre en el mismo sentido. Ello se logra con un dispositivo llamado *conmutador* (C en fig. 10.13 *a*) que puede consistir en dos semianillos que están siempre en contacto cada uno con un terminal del circuito exterior. En el instante en que la fem es nula, cada terminal del circuito exterior hace contacto con los dos semianillos y como éstos giran con la bobina, un instante después cada terminal hace contacto solamente con un semianillo, que es

aquel con el cual no estaba en contacto antes de la anulación de $\mathcal{E}$. Se han invertido, pues, las conexiones al circuito exterior.

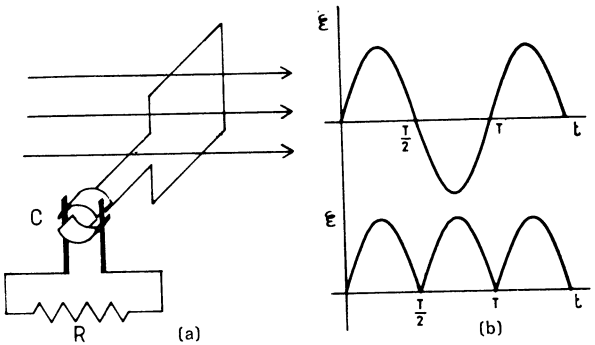


FIG. 10.13 *a*) Generador elemental de c. c. b) La sinusoide representa la fem inducida en la espira y la gráfica inferior la aplicada al circuito exterior.

Si en vez de una bobina tuviéramos dos, colocadas con sus ejes perpendiculares y conectadas en serie, las fem inducidas en la segunda bobina serían las mismas que se indujeron en la primera un cuarto de período antes. La suma de ambas sería la fem resultante entre las escobillas y vemos que es una fem algo fluctuante (fig. 10.14, curva gruesa). Si en vez de dos bobinas perpendiculares se tuvieran n formando cada dos contiguas un ángulo de π/n tendríamos como fem

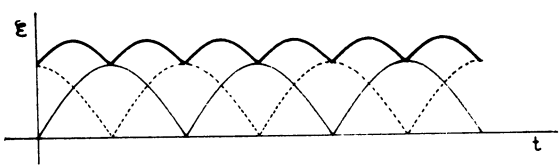


FIG. 10.14 Las curvas de trazo continuo fino y de puntos corresponden, respectivamente a dos bobinas ortogonales. La curva de trazo grueso es la fem total *inducida* al conectarlas en serie.

resultante una representada por una curva menos fluctuante, tanto menos fluctuante cuanto mayor sea n, pudiéndose así lograr una fem prácticamente constante. A este generador se le llama *dinamo.*

El campo magnético de los generadores suele estar creado por un electroimán, es decir, un circuito magnético sobre el que están devanadas las bobinas de *excitación.* Dicho circuito recibe el nombre de *inductor.* Las bobinas en las que se induce la fem constituyen el *inducido* del generador. Por último, en los generadores de c.c. el con-

mutador suele estar constituido por un tambor en el que van engastadas unas barras de cobre llamadas *delgas* sobre las que frotan las escobillas y que están conectadas a las uniones entre bobinas consecutivas (fig. 10.15). El conjunto de las delgas y las escobillas recibe el nombre de *colector*. Cuando el inductor está constituido por un imán permanente en vez de por un electroimán, el generador recibe el nombre de *magneto*.

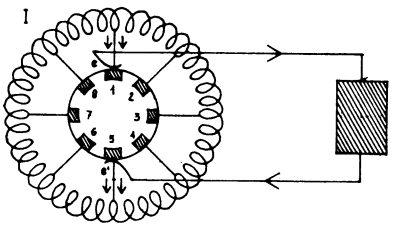


FIG. 10.15 Esquema de conexiones del colector. 1, 2, 3, ..., 8 son las delgas y e y e' las escobillas que unen el generador con el circuito exterior. I representa el inducido.

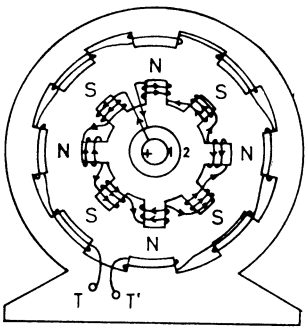


FIG. 10.16 Alternador de inducido fijo.

La variación de flujo que induce una fem alterna en las bobinas puede producirse también manteniendo éstas fijas y moviendo respecto a ellas el inductor. Así, en la posición representada en la figura 10.16 el flujo que los polos del inductor móvil manda a través de las bobinas es máximo y en este instante la fem es nula. Al ir girando el inductor, los polos se alejan de las bobinas con lo que disminuye el flujo y la fem inducida se hace positiva, pues

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

y al cabo de un octavo de vuelta (en el ejemplo de fig. 10.16), donde había un polo N hay uno S, y viceversa; es decir, el flujo ha cambiado de signo, y al cabo de otro octavo de vuelta, la situación es igual a la inicial. Esto significa que en cada vuelta la fem sufre cuatro alternancias. Luego si el *rotor* (inductor en este caso) girase a 750 revoluciones por minuto, la fem sufriría $750 \times 4 = 3000$ alternancias, o sea que la frecuencia de la c. a. sería de $3000/60 = 50$ Hz, que es la frecuencia utilizada en Europa.

La corriente de excitación que crea los polos del electroimán giratorio ha de ser una c. c. que llega a los anillos 1 y 2 a través de unas

escobillas que frotan sobre ellos y que procede de un generador de c. c. que suele ser una dinamo montada sobre el eje del alternador y que recibe el nombre de *excitatriz.*

10.6 Excitación de las dinamos. El electroimán que crea el campo magnético inductor puede estar alimentado por la corriente procedente de otro generador en cuyo caso se dice que la dinamo es de *excitación separada* o independiente. Pero dicha corriente puede estar generada por la propia máquina y ello da lugar a los tres tipos de excitación esquematizados en la figura 10.17. En ella el círculo mayor representa el inducido y el menor el colector, representando el devanado dibujado el inductor por el que circula la corriente de excitación. En

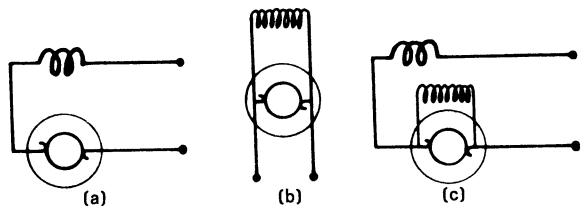


FIG. 10.17 Excitación: *a*) serie, b) paralelo, *c*) compuesta.

la dinamo de *excitación serie* (fig. 10.17 *a*) toda la corriente del inducido atraviesa las bobinas de excitación, por lo que éstas deberán ser de poca resistencia, o sea de pocas espiras de hilo grueso. La fuerza magnetomotriz (§ 7.9) tiene un valor considerable por ser intensa la corriente. En cambio, en la dinamo de *excitación paralelo* (fig. 10.17 b) la corriente excitadora conviene que sea poco intensa, pues se resta de la corriente total inducida y para ello las bobinas de excitación deberán tener gran resistencia. Ello se logra con un gran número de espiras de hilo fino y la fuerza magnetomotriz tendrá un valor considerable gracias a ser grande el número de espiras.

Al variar la intensidad de la corriente suministrada al exterior varía mucho el flujo en la dinamo serie, lo cual afecta a la fem generada, por circular toda la corriente por la excitación. En cambio, en la dinamo paralelo no ocurre así por ser independiente el flujo de la corriente suministrada al exterior y su funcionamiento es más estable. No obstante, cuando aumenta mucho la intensidad de la corriente cae la ddp entre los terminales de la máquina. Para compensar este efecto se puede devanar sobre el circuito magnético un segundo arrollamiento en serie con el inducido que origina un flujo magnético del mismo sentido que el anterior y así tenemos la llamada *excitación compuesta* (fig. 10.17 c).

10.7 Fuerza electromotriz de una dinamo. Para hallar la expresión de la fem de una dinamo comenzaremos por considerar la dinamo elemental de una sola espira (fig. 10.13 *a*). Al girar un cuarto de vuelta a partir de la posición de flujo máximo Φ_0, pasa a flujo nulo.

Luego $\Delta\Phi = -\Phi_0$ en el tiempo $\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{1}{4f}$. Por tanto, la fem media inducida en la espira será

$$\overline{\mathcal{E}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 4 f \Phi_0 \tag{10.7}$$

en donde Φ_0 es el llamado *flujo útil por polo*. Los dos conductores de la espira paralelos al eje de rotación reciben el nombre de *activos* por ser en ellos donde se induce la fem. En los otros dos, la fem inducida es nula, pues en los elementos de una mitad las fem inducidas son opuestas a las que se inducen en los elementos simétricos de la otra mitad (cfr. ec. 8.1) por llevar velocidades opuestas en la rotación de la espira (fig. 10.18).

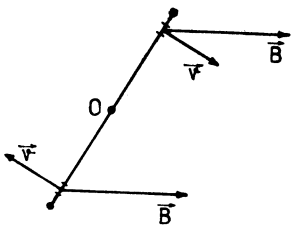


FIG. 10.18 El eje de rotación de la espira pasa por O y es normal al papel.

Si hay N espiras distribuidas uniformemente en torno del eje de rotación, la mitad de ellas estarán conectadas en serie a un lado del plano de simetría definido por la posición 1-5 (fig. 10.15) de las escobillas, y la otra mitad estarán conectadas en serie al otro lado. Cada espira constituye un generador elemental, y el conjunto del inducido junto con las escobillas e y e' puede representarse en la forma indicada en la figura 10.19 *a*, en la que habrá $N/2$ en cada mitad. Las distintas espiras tendrán distintas fem en razón de su posición, pero como su valor medio es el dado por la ecuación 10.7, la suma de las fem de las espiras en serie en una mitad del inducido será

$$\mathcal{E} = \frac{N}{2}\overline{\mathcal{E}} = 2 N f \Phi_0 \tag{10.8}$$

y cada serie de espiras a uno y otro lado de la recta definida por e y e' equivaldrá a un generador de fem igual a la (10.8), y el circuito de la figura 10.19 *a* puede sustituirse por el de la 10.19 *b*, que consta de dos generadores iguales en paralelo, lo cual equivale a un

generador único de fem igual a $\mathcal{E}$ (cfr. § 4.8). Como a cada espira corresponden dos conductores activos, el número de conductores activos será $n = 2N$, y sustituyéndolo en la ecuación 10.8 resulta

$$\mathcal{E} = n f \Phi_0 \tag{10.9}$$

o sea que *la fem de una dinamo es igual al producto del número de sus conductores activos por la frecuencia de giro y por el flujo útil por polo.*

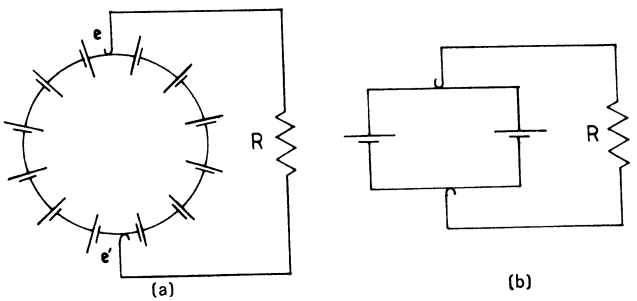


FIG. 10.19 a) Representación de las espiras inducidas como generadores. b) Cada serie de generadores sustituida por uno de fem igual a la suma de las de ellos.

10.8 Motores de c. c. Si al conductor móvil de la figura 8.4 *le mandáramos* una corriente del mismo sentido que la que se induce en él al desplazarlo bajo la acción de la fuerza **F**, el campo magnético ejercería sobre el conductor una fuerza de sentido opuesto al de **F**. Por eso, supuesto un sentido dado del campo magnético inductor, si mandamos a una dinamo una corriente, sus conductores activos estarán sometidos a fuerzas que los moverán en sentido opuesto al que tendríamos que hacerla girar para que generaran una corriente de tal sentido.

Evidentemente, la inversión de sentido del campo inductor supone también inversión del sentido de giro del motor. Dejamos como ejercicio demostrar que un motor serie tiene un sentido de giro opuesto al que tendría funcionando como dinamo que generase una corriente del sentido de la que lo recorre, al revés de lo que sucede con el motor shunt o de excitación paralelo.

Cuando un motor de c. c. gira, en sus conductores activos se induce una fem que, por la ley de Lenz, se opone a la causa que la produce, y como ésta es, en último término la ddp V aplicada al motor, se opone a ésta. Es la *fuerza contraelectromotriz del motor,* que también

vendrá dada por la ecuación 10.9. La intensidad de la corriente que circula por el motor será (ec. 4.29)

$$I = \frac{V - n f \Phi_0}{r'}$$

donde r' es la resistencia interna del motor. En esta ecuación vemos que cuando el motor arranca ($f = 0$) la corriente que por él circula es muy intensa y luego se va debilitando a medida que el motor aumenta su velocidad de rotación. Por eso suele instalarse en serie con el inducido un *reostato de arranque,* que es una resistencia variable que impide que I se haga demasiado grande y queme a aquél. Al ir aumentando f, se va reduciendo dicha resistencia hasta anularla una vez alcanzada la velocidad de régimen.

La potencia mecánica desarrollada por el motor será (cfr. § 4.9)

$$P = \mathcal{E}' I = n f \Phi_0 I \tag{10.10}$$

El motor aplica al eje un par de fuerzas de momento M que en cada vuelta efectúa un trabajo (cfr. ec. 8.29, p. 125, tomo I)

$$W = M \cdot 2\pi$$

y como da f vueltas por segundo, la potencia desarrollada por el par motor M será

$$P = M \cdot 2\pi f \tag{10.11}$$

Igualando las ecuaciones 10.10 y 10.11 se tiene

$$M = \frac{n}{2\pi} \Phi_0 I \tag{10.12}$$

Vemos, pues, que el momento del par motor es proporcional al flujo útil por polo y a la intensidad de la corriente. En el motor serie, como el flujo es proporcional a I y en el instante inicial es muy grande, el *par de arranque* también lo es, lo que los hace especialmente útiles para tracción eléctrica. En el motor shunt o de excitación paralelo, el flujo es prácticamente constante. Por ello, cuando el régimen de trabajo pueda sufrir grandes variaciones se empleará preferentemente el motor serie.

10.9 Transformador. El transformador consiste en un núcleo de hierro dulce laminado (para reducir las corrientes de Foucault), so-

bre el cual se han devanado dos bobinas que quedan así acopladas magnéticamente. Una de ellas, llamada *primario* del transformador, tiene N_1 espiras y a ella se entrega potencia en forma de c. a. La otra es el *secundario,* tiene N_2 espiras y de ella se extrae potencia eléctrica. En los transformadores prácticos, la pérdida de potencia es del orden del 1 %, lo que justifica el poderlos tratar como ideales sin pérdida. Así pues, consideraremos que los devanados son de resisten-

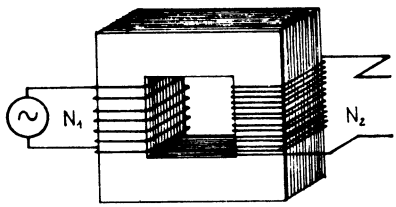


FIG. 10.20 Transformador.

cia despreciable, lo que elimina las llamadas *pérdidas en el cobre,* que la laminación elimina las corrientes de Foucault y que no hay histeresis, con lo que se anularían las llamadas *pérdidas en el hierro.*

En estas condiciones, consideremos aplicada al primario una fem alterna

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 \text{ sen } \omega t \tag{10.13}$$

que hará circular por él una corriente de intensidad i_1 y se inducirá una fem

$$-N_1 \frac{d\Phi}{dt}$$

siendo Φ el flujo a través de cada espira. La ley de Ohm nos da, pues,

$$\mathcal{E}_1 - N_1 \frac{d\Phi}{dt} = R_1 i_1$$

pero como suponemos despreciable R_1, resulta

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0}{N_1} \text{ sen } \omega t$$

de donde

$$\Phi = -\frac{\mathcal{E}_0}{N_1 \omega} \cos \omega t \tag{10.14}$$

Comparando las ecuaciones 10.13 y 10.14 vemos que el flujo por espira está en cuadratura de fase con la fem aplicada. El núcleo ferromagnético, gracias a su gran permeabilidad magnética, canaliza las líneas de fuerza por él y hace que cada espira del secundario esté atravesada por el flujo Φ, por lo que el flujo total a través del secundario será $N_2 \Phi$ y la fem inducida en el secundario será

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}_0 \text{ sen } \omega t \qquad (10.15)$$

El signo — del segundo miembro tiene poca importancia, pues sólo nos señala oposición de fase entre las fem de dos circuitos independientes. En todo caso, invirtiendo el sentido de devanado del secundario habría concordancia de fase. Lo más interesante de la ecuación 10.15 es que nos permite escribir

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1} = n \qquad (10.16)$$

es decir, que la fem inducida en el secundario es igual a la aplicada al primario multiplicada por la *razón de transformación n*. Esta propiedad es la que da al transformador su gran utilidad, pues nos permite obtener tensiones alternas mayores que la que da un generador de c. a. (transformador elevador) si $n > 1$, o menores si $n < 1$ (transformador reductor).

En el caso examinado, no hay corriente en el secundario y la intensidad de la corriente del primario la obtendremos del teorema del circuito magnético (ec. 7.8) siendo $\mathcal{F} = N_1 i_1$. Es decir,

$$i_1 = \frac{\mathcal{R} \Phi}{N_1}$$

y como Φ está en cuadratura de fase con $\mathcal{E}$, también lo estará i_1; es decir, es una corriente reactiva y el transformador se comporta como una reactancia pura de coeficiente de autoinducción

$$L = \frac{N_1 \Phi}{i_1} = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}}$$

muy grande por ser pequeña la reluctancia. Por tanto, la corriente que circula por el primario cuando el transformador funciona en vacío será muy débil.

Si cerráramos el secundario y por él circulara una c.a. de inten-

sidad i'', por el primario circulará otra de intensidad i' y la ecuación 7.8 da

$$N_1 i' + N_2 i'' = \mathcal{R}\,\Phi$$

de donde

$$i' = \frac{\mathcal{R}\,\Phi}{N_1} - \frac{N_2}{N_1} i'' = i_1 - n\,i'' \qquad (10.17)$$

es decir, que a la corriente que circulaba por el primario cuando el transformador funcionaba en vacío se le superpone otra en oposición de fase con la corriente del secundario y de intensidad eficaz igual a la de ésta multiplicada por la razón de transformación.

Como i_1 ya hemos dicho que es muy débil, cuando el transformador funcione a plena carga será despreciable frente a $n\,i''$ y podremos escribir aproximadamente

$$i' = -n\,i'' \quad \text{o sea} \quad \frac{I'}{I''} = \frac{N_2}{N_1} \qquad (10.18)$$

donde I' e I'' son las intensidades eficaces de las corrientes de primario y secundario, respectivamente. Llamando V_1 y V_2 a los valores eficaces de las tensiones aplicadas a primario y secundario, respectivamente, las ecuaciones 10.16 y 10.18 pueden reunirse dando

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{I_1}{I_2}$$

De aquí resulta que al elevar la tensión se reduce proporcionalmente la intensidad de la c.a., efecto que se aprovecha para la transmisión a distancia de la energía eléctrica. El alternador da una potencia en forma de c.a. de intensidad eficaz I y tensión eficaz V. Si mediante un transformador se multiplica V por n, I queda dividida por n y las pérdidas por efecto Joule en la línea quedan divididas por n^2 ya que son proporcionales a I^2 (cfr. ec. 9.38). Llegada la energía eléctrica a su destino, un nuevo transformador reductor rebajará la tensión a un valor que no sea peligroso para el usuario.

Ejemplo. El cable empleado en una línea de transmisión tiene una resistencia de 0,15 Ω por kilómetro de longitud. Un alternador suministra una potencia de 1000 kW bajo una tensión de 1000 V. ¿En qué longitud de línea se habría disipado toda la potencia en calor? ¿Qué pérdida habría en dicha longitud si se intercalara entre generador y línea un transformador elevador de razón de transformación 200?

La intensidad eficaz de la corriente suministrada por el alternador, supuesto el caso más favorable de $\cos \varphi = 1$, es

$$I = \frac{P}{V} = \frac{10^6}{10^3} = 1000 \text{ A}$$

Como hay dos cables en la línea, a una distancia de x km corresponderá una resistencia $0{,}30\,x\ \Omega$ y si en esta distancia se ha de disipar toda la potencia (10^6 W) deberá ser

$$[P = R\,I^2] \qquad 10^6 = 0{,}30\,x \cdot 10^6$$

es decir

$$x = 3{,}3 \text{ km}$$

luego a 3,3 km ya no llegaría potencia alguna.

En cambio, si se intercala el transformador, la tensión en la línea será de 200 kV y la intensidad de la corriente sólo de 5 A, con lo que la pérdida de potencia a 3,3 km sería

$$0{,}30 \times 3{,}3 \times 5^2 = 25 \text{ W}$$

que es, tal como habíamos indicado, $P/n^2 = 10^6/200^2$.

10.10 Corrientes trifásicas. Consideremos tres bobinas iguales, cuyos ejes concurran en un punto formando, cada uno con los otros dos, ángulos de 120° (fig. 10.21) y centrado en dicho punto de concurso imaginemos un imán o un

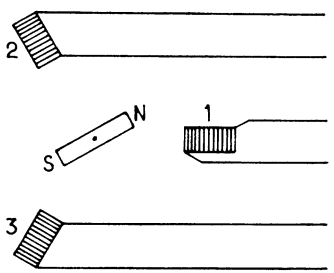


FIG. 10.21 Inducción de corrientes trifásicas.

rotor como el de la figura 10.16, que gira alrededor de un eje normal al plano del dibujo. En su rotación, inducirá en la bobina 1 una fem alterna $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0$ sen ωt y lo mismo hará en la bobina 2 con un retraso de un tercio de período y en la 3 con un retraso doble (lo que equivale a considerarlo como adelanto de un tercio de período respecto a $\mathcal{E}_1$). Luego podemos escribir

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 \text{ sen } \omega t$$

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 \text{ sen } \left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_0 \text{ sen } \left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

y estas tres fem de igual valor eficaz y frecuencia, defasadas cada una respecto a las otras dos en un tercio de período (o en $2\pi/3$ radianes) se dice que constituyen un sistema de *fuerzas electromotrices trifásicas*. Cerrando las bobinas sobre impedancias exactamente iguales, se originará un sistema de *corrientes trifásicas*

$$i_1 = I_0 \text{ sen } (\omega t + \varphi)$$

$$i_2 = I_0 \text{ sen } \left(\omega t + \varphi - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$i_3 = I_0 \text{ sen } \left(\omega t + \varphi - \frac{4\pi}{3}\right)$$

La circulación de estas tres corrientes comporta, en principio, seis hilos conductores. No obstante, el retorno de las corrientes a las bobinas puede realizarse con un conductor único (*OO* en fig. 10.22) si unimos las tres bobinas a un mismo punto, así como las impedancias. Con ello se reduciría a cuatro el

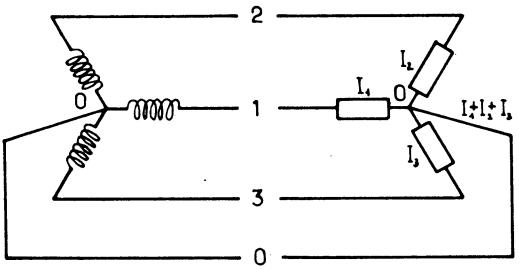


FIG. 10.22 Conexión en estrella del generador y de las cargas.

número de hilos conductores necesarios y por el *conductor de retorno OO* circularía una corriente de intensidad $i_1 + i_2 + i_3$ suma, en cada instante, de las intensidades de las tres corrientes. Este montaje recibe el nombre de *conexión en estrella* del generador y de las cargas. El conductor de retorno puede ser la tierra y así se hace en la distribución urbana de la energía eléctrica. El generador trifásico, conectado en estrella, puede estar constituido por los secundarios de tres transformadores cuyos primarios estén alimentados por un

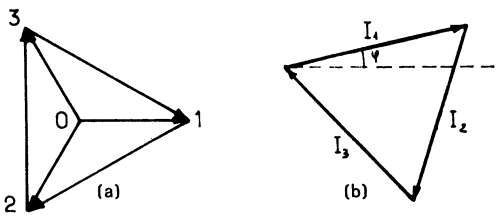


FIG. 10.23 *a*) Diagrama vectorial de las tensiones trifásicas aplicadas a las impedancias de la estrella de figura 10.22, y b) ídem de las intensidades de las corrientes que circulan por ellas.

alternador trifásico. El centro de la estrella de secundarios se conecta a tierra y a los hilos activos que llegan a la utilización se les da el nombre de *fases*. Los usuarios se agrupan en tres grupos conectados en estrella cuyo centro se lleva a tierra mediante un hilo llamado *neutro*. En la figura 10.23 *a*, los vec-

tores 1-0, 2-0 y 3-0 representan las ddp entre cada fase y el neutro y los vectores 1-3, 2-1 y 3-2 representan las ddp entre fase y fase. Constituyen un triángulo equilátero, por lo que resulta

$$V_{21} = \sqrt{3}\, V_{01}$$

es decir, que la ddp entre fase y fase es igual a la existente entre fase y neutro multiplicada por $\sqrt{3}$. Así, si los usuarios de uno de los grupos citados están conectados entre una fase y el neutro entre los que existe una ddp de 127 V, la conexión entre fase y fase daría una ddp de 220 V. Si esta tensión fuera la ddp entre fase y neutro, entre fase y fase habría 380 V. Por eso, en algunas instalaciones se dispone de dos tensiones relacionadas entre sí por el factor $\sqrt{3}$. En dicha instalación existen dos fases y el neutro.

Si las tres cargas son iguales, como ocurre en un motor trifásico, las tres corrientes tendrán intensidades representadas por los vectores de la figura 10.23 b que cierran un triángulo equilátero, por lo que su suma es nula y puede suprimirse el hilo de retorno. Pero si fueran iguales las cargas, podría adaptarse la conexión *en triángulo* (fig. 10.24 *a*). Cada una de ellas queda en-

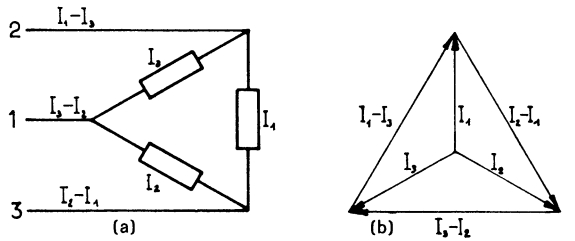


FIG. 10.24 *a*) Conexión en triángulo de las cargas. *b*) Diagrama vectorial de las intensidades de las corrientes que circulan por las cargas.

tonces sometida a la ddp entre fase y fase y por ellas circulan corrientes de intensidades eficaces I_1, I_2 e I_3 que constituyen un sistema trifásico y las intensidades que circulan por los hilos de la línea serán $i_1 - i_3$, $i_2 - i_1$ e $i_3 - i_2$, cuyos valores eficaces serán (cfr. fig. 10.24 b) $\sqrt{3}\, I_1$. Se comprende que si fueran las tres bobinas generadoras (o secundarios de transformadores) las que se conectaran en triángulo, las corrientes que circularan por ellas tendrían una intensidad eficaz $\sqrt{3}$ veces menor que la de las corrientes que circularan por los hilos de la línea.

Llamando V a la ddp eficaz entre fase y fase, la ddp entre fase y neutro V_{01} en la conexión en estrella valdrá

$$V_{01} = \frac{V}{\sqrt{3}}$$

y en la impedancia 1 se consumirá una potencia

$$V_{01}\, I \cos \varphi = \frac{V}{\sqrt{3}}\, I \cos \varphi$$

representando por I la intensidad eficaz de la corriente que circula por los hilos de la línea. Como las otras dos impedancias de la estrella consumen igual po-

tencia que la 1, la potencia total consumida en la estrella será el triple, o sea,

$$P = \sqrt{3}\, V\, I\, \cos\varphi \qquad (10.19)$$

Si la conexión fuera en triángulo, llamando I_1 a la intensidad que circula por cada impedancia, la potencia que ésta consuma sería

$$V\, I_1\, \cos\varphi = V \frac{I}{\sqrt{3}} \cos\varphi$$

y la potencia consumida por el triángulo sería el triple, o sea, que vendría dada también por la ecuación 10.19.

10.11 Campo magnético giratorio. Consideremos de nuevo tres bobinas iguales recorridas por un sistema de corrientes trifásicas

$$i_1 = I_0\, \text{sen}\ \omega t \qquad i_2 = I_0\, \text{sen}\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \qquad i_3 = I_0\, \text{sen}\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

y cuyos ejes concurran en un punto O formando entre sí ángulos de 120° (fig. 10.25). En el punto O, dichas corrientes crearán campos magnéticos $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ y $\mathbf{B}_3$ dirigidos según los ejes y cuyos módulos serán proporcionales a i_1, i_2 e i_3 respectivamente (cfr. § 6.14), es decir,

$$B_1 = B_0\, \text{sen}\ \omega t \qquad B_2 = B_0\, \text{sen}\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \qquad B_3 = B_0\, \text{sen}\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

Busquemos las componentes x e y del campo resultante en el instante t.

$$B_x = -B_1 + B_2 \cos\frac{\pi}{3} + B_3 \cos\frac{\pi}{3} =$$

$$= B_0\left[-\text{sen}\ \omega t + \frac{1}{2}\,\text{sen}\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\,\text{sen}\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= B_0\left[-\text{sen}\ \omega t + \frac{1}{2}\,2\cos\frac{\pi}{3}\,\text{sen}\ (\omega t - \pi)\right] = -\frac{3}{2}B_0\,\text{sen}\ \omega t$$

$$B_y = -B_2 \cos\frac{\pi}{6} + B_3 \cos\frac{\pi}{6} =$$

$$= B_0\frac{\sqrt{3}}{2}\left[-\text{sen}\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \text{sen}\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= B_0\frac{\sqrt{3}}{2}\,2\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\ (\omega t - \pi) = \frac{3}{2}B_0\cos\omega t$$

De donde resulta

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \tfrac{3}{2}B_0 \qquad \text{tg}\ \varphi = -\text{tg}\ \omega t$$

O sea, que el campo resultante es de módulo constante $\frac{3}{2}B_0$ y forma con el eje x un ángulo $\varphi = -\omega t$, o sea, que gira con celeridad angular ω igual a la pulsación de la corriente. El sistema de corrientes trifásicas genera así un *campo magnético giratorio* de módulo constante.

10.12 Motor de inducción. Consideremos en el punto O un campo magnético giratorio en el plano Oxy (fig. 10.27) y una bobina que gire con celeridad angular ω' alrededor del eje Oz. Si medimos el tiempo a partir de un instante

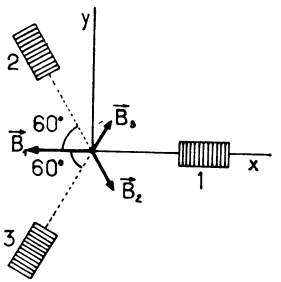


FIG. 10.25 Generación de un campo magnético giratorio.

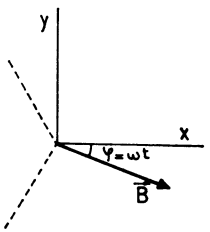


FIG. 10.26 Campo giratorio resultante.

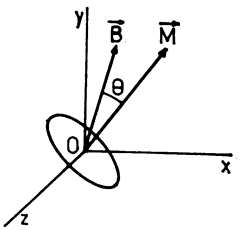


FIG. 10.27 Principio del motor de inducción.

en que coincidan la dirección del eje de la bobina con la del campo, y éste gira con celeridad angular ω, en el instante t dichas direcciones formarán un ángulo $\theta = (\omega - \omega')\,t$ y el flujo a través de la bobina será

$$\Phi = B\,N\,S\,\cos\,\theta = \Phi_0\,\cos\,(\omega - \omega')\,t$$

y la fem inducida valdrá

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \Phi_0\,(\omega - \omega')\,\operatorname{sen}\,(\omega - \omega')\,t$$

que originará una c.a. de intensidad

$$i = \frac{\Phi_0\,(\omega - \omega')}{Z}\,\operatorname{sen}\,[(\omega - \omega')\,t - \varphi]$$

donde (cfr. ec. 9.23)

$$\cos\,\varphi = \frac{R}{Z} \qquad (10.20)$$

siendo R la resistencia de la bobina y Z su impedancia.

El momento magnético **M** de la bobina tendrá por módulo

$$M = N\,S\,i = \frac{N\,S\,\Phi_0}{Z}\,(\omega - \omega')\,\operatorname{sen}\,[(\omega - \omega')\,t - \varphi]$$

y el momento del par de fuerzas que se ejerce sobre la espira (ec. 6.23) tendrá por módulo

$$P = M\,B\,\operatorname{sen}\,\theta = \frac{\Phi_0^{\,2}\,(\omega - \omega')}{Z}\,\operatorname{sen}\,[(\omega - \omega')\,t - \varphi]\,\operatorname{sen}\,(\omega - \omega')\,t \qquad (10.21)$$

y teniendo en cuenta que

$$\cos\,B - \cos\,A = 2\,\operatorname{sen}\,\frac{A+B}{2}\,\operatorname{sen}\,\frac{A-B}{2}$$

la ecuación 10.21 puede escribirse en la forma

$$P = \frac{\Phi_0^2 (\omega - \omega')}{2Z} \{\cos \varphi - \cos [2(\omega - \omega')t - \varphi]\}$$

que da como valor medio

$$\overline{P} = \frac{\Phi_0^2 (\omega - \omega')}{2Z} \cos \varphi \qquad (10.22)$$

pues el valor medio de $\cos [2(\omega - \omega')t - \varphi]$ para un período $T = \frac{2\pi}{\omega - \omega'}$ es nulo. Sustituyendo la ecuación 10.21 en la 10.22 queda

$$\overline{P} = \frac{\Phi_0^2 R (\omega - \omega')}{2Z^2} = \frac{\Phi_0^2 R}{2} \frac{\omega - \omega'}{R^2 + L^2 (\omega - \omega')^2} \qquad (10.23)$$

Llevando en abscisas valores de ω' y en ordenadas valores de $\overline{P}$ se obtiene una gráfica como la indicada en la figura 10.28. En ella vemos que mientras la bobina gira más lentamente que el campo, el valor medio del par es positivo y por tanto acelerará a la bobina. Si ésta se monta sobre un eje solidario a ella, podrá mover máquinas que opongan un par resistente y se irá acelerando hasta que éste equilibre al par motor, en cuyo momento el par resultante será nulo y nula la aceleración angular (cfr. ec. 8.23, pág. 121, tomo I), por lo que el sistema seguirá girando con la celeridad de rotación correspondiente al valor del par. La bobina es, entonces, el inducido de un *motor de inducción* polifásico. Veamos cómo funciona.

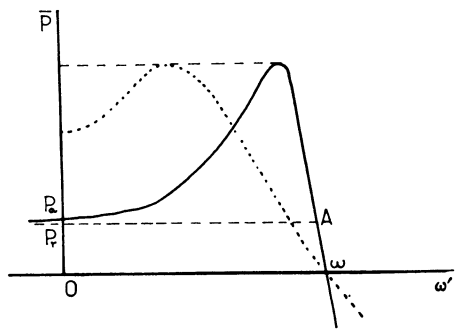


FIG. 10.28 Variación del par medio con la celeridad de rotación. La curva de trazos corresponde a una resistencia del inducido mayor que en el caso de la curva de trazo continuo.

Estando el motor parado, supongamos que tiene aplicado un par resistente P_r (fig. 10.28) inferior al par de arranque P_a. Al conectar el motor, se hallará sometido su inducido a un par $P_a - P_r$ positivo y se acelerará. Al ir aumentando su celeridad, vemos que aumenta el par motor y con ello la aceleración, con lo que sigue aumentando ω'. El par motor pasa por un máximo, luego disminuye y cuando la celeridad de rotación sea la correspondiente al punto A (que es algo inferior a ω) se igualan los pares motor y resistente y se estabiliza la celeridad de rotación en este valor. Si ahora aumentáramos el par

resistente, disminuiría ω' y aumentaría el par motor (fig. 10.28) y si el par resistente fuera inferior al máximo de la figura, la rotación se estabilizaría de nuevo al valor de ω' correspondiente al par motor equilibrante. Si el par resistente fuera superior a dicho máximo, el motor no podría vencerlo y no habría rotación.

Para poder arrancar con un par resistente mayor que P_a habría que intercalar en serie con la bobina un reostato de arranque, con lo que el par de arranque se hace mayor (curva de trazos en fig. 10.28). Una vez alcanzado el equilibrio, se va reduciendo su resistencia, pues en ella se produce una disipación de energía por efecto Joule. El motor de inducción se caracteriza por poder arrancar con carga reducida y por corresponder a cada valor del par una celeridad de rotación inferior a la del campo giratorio y que disminuye al aumentar la carga.

El motor de inducción también puede lograrse con c.a. monofásica. En tal caso, el inducido puede ser como el de los motores polifásicos, pero el inductor está constituido por un par de bobinas que crean un campo magnético alterno de dirección constante. Éste puede considerarse constituido por dos campos

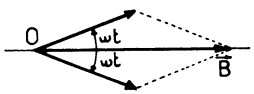


FIG. 10.29 Descomposición de un campo alterno en dos giratorios.

giratorios de módulo $B_0/2$ que giren en sentidos opuestos con celeridad angular ω igual a la pulsación de la c.a., ya que en un instante genérico t el campo resultante de aquellos dos estará dirigido según la bisectriz del ángulo que forman y su módulo será (fig. 10.29)

$$B = 2\,\frac{B_0}{2}\cos\,\omega t = B_0\cos\,\omega t$$

Supuesto, pues, descompuesto este campo alterno en los dos giratorios, el inducido se halla sometido a las acciones de ambos, que se equilibran. Pero si hacemos girar el inducido, la celeridad relativa respecto a uno de los campos giratorios disminuye, mientras que aumenta respecto al otro. Ello lleva consigo el que la frecuencia de las corrientes inducidas por el campo que gira en el mismo sentido que el rotor sea menor que la frecuencia de las inducidas por el otro campo. Los momentos medios de los pares que ejercen uno y otro campo serán, pues, diferentes y en la figura 10.28 podemos ver que es mayor el correspondiente al campo que gira en el mismo sentido que el rotor (ω y ω' de igual signo) que el correspondiente al otro. Ello hará aumentar ω' y, por tanto, para este segundo par el punto figurativo se alejará hacia la izquierda en el sentido de las ω' negativas (pues se considera ω positiva) y como la rama correspondiente a las ω' negativas va disminuyendo a medida que aumenta el valor absoluto de ω', el par correspondiente se hace cada vez menor, prevaleciendo el otro. En esta discusión, dado que lo que influye es el movimiento *relativo* del campo respecto al rotor, para la utilización de la figura 10.28 se ha considerado siempre como referencia positiva la celeridad de rotación del campo (sea uno u otro), con lo que la celeridad del rotor sería positiva en un caso y negativa en el otro.

11

Electrónica

La conducción eléctrica ha sido objeto de estudio en el capítulo 5 y en él se vio cómo la corriente eléctrica está constituida por el movimiento de portadores, el cual presentaba características distintas según se produjera en un sólido, en un líquido o en un gas. Dicho movimiento puede tener lugar también en el vacío y el aprovechamiento de ciertas propiedades unidireccionales de las corrientes de portadores en las llamadas válvulas de vacío o en los dispositivos semiconductores o gaseosos constituye el objeto de la Electrónica, rama de la Física de considerable extensión y aún mayor aplicación, de la cual sólo podremos apuntar aquí las ideas más elementales.

11.1 Emisión termoiónica. El físico americano THOMAS ALVA EDISON (1847-1931), inventor de la lámpara de incandescencia, descubrió en 1883 que si en el interior de la ampolla se introducía una placa y entre ella y el filamento se aplicaba una ddp que la llevara

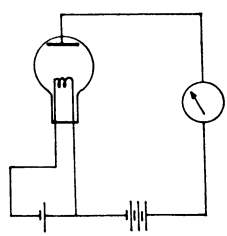


FIG. 11.1 Efecto Edison.

a un potencial más elevado que el de éste, por el circuito exterior circulaba una corriente, según ponía de manifiesto un galvanómetro intercalado (fig. 11.1). El fenómeno sólo podía interpretarse admitiendo que a través del vacío existente entre filamento y placa circu-

laba una corriente cuando aquél estaba a temperatura elevada, y el fenómeno recibió el nombre de *efecto Edison.*

Nuestros conocimientos actuales nos permiten dar una interpretación satisfactoria al efecto Edison. En § 5.7 vimos que cada metal tiene una energía de extracción característica del mismo, la cual es la mínima cantidad de energía que hay que entregar a los electrones de conducción del metal para que puedan escapar de éste. Esta energía puede suministrarse en forma de calor. Es decir, al elevar la temperatura del metal aumenta la energía de los electrones y algunos pueden alcanzar la suficiente para salvar la barrera de potencial existente en la superficie del metal. Una vez fuera del filamento, la placa atrae a los electrones gracias al campo existente cuando es positiva respecto al filamento y aquéllos se moverán por el vacío llegando a la placa y cerrando así el circuito.

La distribución de la energía entre los electrones obedece a una ley estadística enunciada por FERMI, DIRAC y SOMMERFELD, que no vamos a estudiar, pero de la cual se deduce que la densidad de corriente de emisión termoiónica J_t viene dada por

$$J_t = A\,T^2\,e^{-\frac{e\Phi}{kT}} \tag{11.1}$$

donde la cantidad $e\,\Phi = W$ del exponente es la energía de extracción del cuerpo emisor de electrones. Suele expresarse como producto de la carga del electrón por el *potencial de extracción* Φ que mide la altura de la barrera de potencial. T es la temperatura absoluta del cuerpo, k es la constante de Boltzmann (ec. 18.12, pág. 351, tomo I) y A una constante que para la mayoría de metales puros vale 60,2 $A \cdot cm^{-2}\,grado^{-2}$. La ecuación 11.1 se conoce con el nombre de *ley de Richardson-Dushman.*

11.2 Diodos. Consideremos el sistema constituido por dos electrodos encerrados en una ampolla en cuyo interior se ha practicado el vacío, uno de los cuales, el *cátodo,* se mantenga a temperatura elevada por cualquier procedimiento, y se halle rodeado por el otro electrodo llamado *ánodo.* El nombre dado a estos electrodos ya indica que este último debe, en las condiciones de funcionamiento normal, estar a un potencial superior al del primero. El sistema descrito se conoce con el nombre de *diodo de vacío* y su primera aplicación se remonta a 1905 cuando SIR JOHN AMBROSE FLEMING (1849-1945) lo utilizó como detector de ondas hertzianas. Los modernos diodos de vacío pueden tener cátodo de *caldeo directo,* constituido por un filamento que se calienta al paso de una corriente calefactora como en

la figura 11.1, o de *caldeo indirecto* en el cual el cátodo es una funda metálica o de óxidos que cubre el filamento sin tocarlo y que se calienta gracias al calor desprendido por éste al ser recorrido por una corriente calefactora.

Los electrones emitidos gastan toda la energía de extracción para escapar del cátodo y la mayoría de ellos quedan, una vez fuera de él, con energías cinéticas despreciables, formando una nube de electrones en torno al cátodo y creando un campo eléctrico que obstaculiza la salida de nuevos electrones. Muchos de los electrones de la carga espacial así formada volverán al cátodo y podrá alcanzarse un estado de equilibrio en el cual salen del cátodo tantos electrones

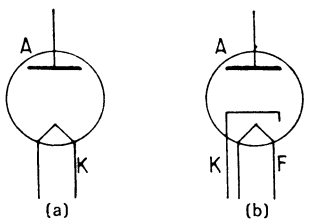


FIG. 11.2 Símbolos para representar un diodo con cátodo *K*: *a*) de caldeo directo; b) de caldeo indirecto; *A*, ánodo; *F*, filamento.

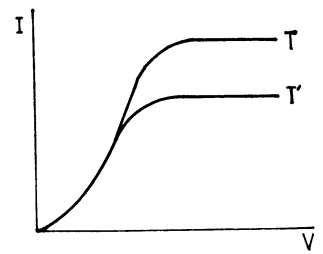


FIG. 11.3 Características de un diodo de vacío para dos temperaturas del cátodo diferentes ($T > T'$).

como vuelven a él, de manera semejante a como se establece el equilibrio entre un líquido y su vapor saturante (cfr. § 16.6, pág. 294, tomo I).

Si se aplica ahora una ddp entre cátodo y ánodo que haga éste positivo respecto a aquél, el campo creado arrastrará algunos electrones de la carga espacial hacia el ánodo. Dicha carga disminuirá y por consiguiente se reducirá el campo creado por ella y que se oponía a la salida de electrones del cátodo. Es decir, la energía que deban tener para escapar podrá ser menor que antes y, por tanto, aumentará el número de los que pasen por unidad de tiempo a formar parte de la carga espacial, alcanzándose el equilibrio cuando el número de los que pasen a ella en unidad de tiempo sea igual al número de electrones que pasan, por unidad de tiempo, de la carga espacial al ánodo. Aumentando la ddp aumentará este número, obteniéndose una corriente más intensa en el llamado *circuito de placa* y podremos seguir incrementando la ddp, con lo que seguirá incrementándose la intensidad de la corriente hasta que para una ddp

suficientemente elevada el campo es tan intenso que barre instantáneamente la carga espacial y llegan al ánodo todos los electrones que emite el cátodo cumpliendo la ley de Richardson-Dushman. Si seguimos aumentando la ddp, los electrones llegarán con mayor velocidad (cfr. ec. 2.22), pero no podrán llegar por unidad de tiempo más electrones que los que ha emitido el cátodo y, por tanto, la intensidad de la corriente no aumenta. Se ha alcanzado la *corriente de saturación,* para la cual la densidad de corriente está expresada por la ecuación 11.1. En la figura 11.3 se han representado los resultados experimentales descritos anteriormente y puede verse que la saturación depende, claro está, de la temperatura del cátodo. En cambio, para tensiones de placa (potenciales anódicos) no muy grandes, los resultados son prácticamente coincidentes por ser la carga espacial quien rige la conducción por el diodo.

Otro tipo son los *diodos de gas,* cuyas características se estudiaron ya en § 5.15, y sobre los cuales no vamos a insistir. En cambio, vamos a dar una idea acerca de los diodos semiconductores de gran aplicación en la actualidad.

Imaginemos que se está formando por cristalización una barrita de semiconductor con impurezas aceptadoras, es decir, un semiconductor tipo *p*. En un momento dado, echemos impurezas donantes en cantidad suficiente para que el semiconductor que se siga formando sea tipo *n*. El aspecto microscópico de la barrita lo podemos representar en la forma indicada en la figura 11.4 *a* y en ella se observa una región llamada *unión p-n,* a la izquierda de la cual las impurezas aceptadoras tienen su carga compensada por los huecos, mientras que a su derecha las impurezas donantes tienen compensada su carga por los electrones libres. Entre estas dos regiones está la unión en la cual no hay portadores porque el campo creado entre los átomos de impurezas de uno y otro lado ha arrastrado los huecos hacia el semiconductor tipo *p* y los electrones libres hacia el semiconductor tipo *n,* dejando una zona de anchura *a* en la que existe un campo eléctrico dirigido del semiconductor tipo *n* al semiconductor tipo *p*. Es la unión *p-n*.

Apliquemos ahora una ddp exterior que eleve el potencial del terminal correspondiente al tipo *n*. Dicha ddp creará un campo que arrastrará los huecos hacia la izquierda y los electrones hacia la derecha, aumentando la anchura *a* de la unión *p-n* (fig. 11.4 *b*). A consecuencia de esto, aumenta la circulación del campo en la unión, es decir, la altura de la barrera de potencial en la unión *p-n*. Veamos qué efecto tendrá esto sobre los portadores de electricidad. Cuando no había ddp exterior aplicada, en el estado de equilibrio pasaban

del material tipo p al tipo n portadores minoritarios, es decir, electrones, arrastrados por el campo en la unión. Esta corriente venía compensada por los electrones del material tipo n que se difundían a través de la unión hacia el material tipo p gracias a tener una energía suficientemente grande para poder superar la barrera de potencial V_0. Estos electrones representan una pequeña fracción del número total de portadores mayoritarios del semiconductor tipo n

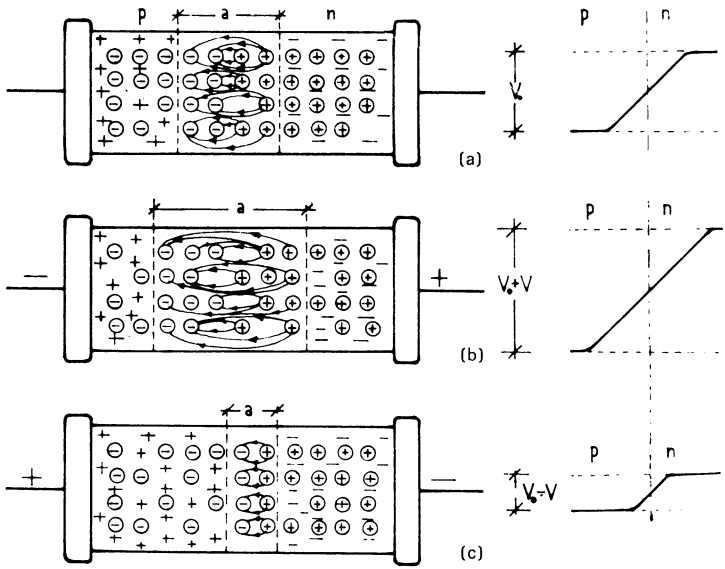


FIG. 11.4 *a*) Unión p-n no polarizada y barrera de potencial en ella. *b*) Unión p-n con polarización inversa y barrera de potencial en ella. *c*) Unión p-n con polarización directa y barrera de potencial en ella.

e igualan en número a los minoritarios del otro semiconductor que cruzan la unión favorecidos por el campo. Lo mismo podríamos decir de los huecos minoritarios en el tipo n que compensan su flujo con los mayoritarios en el tipo p que poseen energía suficiente para vencer las fuerzas del campo en la unión y atravesarla.

Al aplicar la ddp exterior que eleve el potencial del terminal del semiconductor tipo n (fig. 11.4 *b*), la altura de la barrera aumenta en V y ello no afectará al paso de portadores minoritarios inicialmente, pues «descienden» la barrera. En cambio, por haber aumentado la altura de ésta, los portadores inicialmente mayoritarios que tengan energía suficiente para salvar la barrera (fig. 11.5) serán menos nu-

merosos que antes y se rompe el equilibrio, dando como resultado una corriente de portadores minoritarios inicialmente, es decir, de electrones que van de p a n y huecos que circulan en sentido contrario, la cual es muy débil por ser pequeño el número de portadores minoritarios. En este caso se dice que el diodo tiene *polarización inversa*. Si invirtiéramos la polaridad (fig. 11.4 *c*), los portadores mayoritarios son impelidos hacia la unión y la anchura a de ésta dismi-

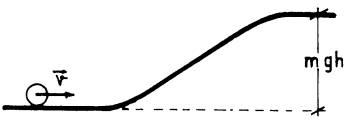


FIG. 11.5 Símil mecánico para los portadores que vencen la barrera de potencial. Si la energía cinética de la bola no es inferior a *mgh*, podrá salvar la barrera de potencial.

nuye, con lo que disminuye la circulación del campo a su través, es decir, la altura de la barrera de potencial. Ello sigue sin afectar a los portadores inicialmente minoritarios, pero en cambio permite que sean muchos los portadores mayoritarios que puedan remontar la barrera de potencial, lo que da lugar a una corriente bastante intensa, pues el número de portadores mayoritarios es grande. Decimos que el diodo tiene *polarización directa*. En resumen, una tensión V de polarización directa da origen a una corriente directa apreciablemente intensa. La misma tensión V de polarización inversa da lugar a una corriente inversa muy débil. El efecto es análogo al que se presenta en los diodos de vacío, los cuales conducen cuando la polarización hace positiva la placa frente al cátodo y no conducen si la polarización es de sentido opuesto.

Para un valor determinado de la tensión de polarización inversa, los electrones acelerados por el campo en la unión adquieren energía suficiente para ionizar por choque a los átomos, y los electrones arrancados de éstos son a su vez acelerados y pueden también ionizar por choque, produciéndose una descarga disruptiva parecida a la estudiada en § 5.15 por lo que se refiere a la característica tensión-intensidad (fig. 5.23), pues la tensión en la unión se mantiene prácticamente invariable para un amplio dominio de intensidades. Los diodos que funcionan de esta manera reciben el nombre de *diodos de Zener* y pueden emplearse para regular la tensión de manera similar a como se describió para las válvulas VR gaseosas (fig. 5.24).

11.3 Rectificación. La rectificación de una c. a., es decir, la transformación de una c. a. en corriente que circule en un solo sentido,

se logra mediante circuitos *rectificadores*, en los que juegan un papel principal los diodos.

En la figura 11.6 *a* hemos esquematizado el rectificador monofásico de media onda, habiendo omitido, por razón de sencillez, el circuito calefactor del filamento, el cual no existiría si el diodo fuera semiconductor en vez de diodo de vacío como se ha representado. El generador de c. a., que puede ser el secundario de un transformador, hace que durante los hemiciclos impares de la tensión (fig. 11.6 *b*)

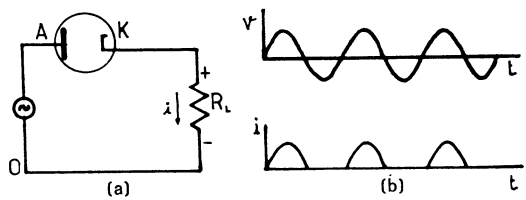


FIG. 11.6 *a*) Rectificador monofásico de media onda. *b*) Ondas de tensión aplicada y de intensidad de corriente en la carga R_L.

el ánodo *A* tenga el potencial más elevado de todo el circuito, por lo que el diodo conducirá y la resistencia de carga R_L será recorrida por una corriente en el sentido de *K* a *O*, quedando el extremo *K* positivo respecto a *O*. Durante los hemiciclos pares, *A* es el punto de potencial más bajo de todo el circuito y el diodo no conduce. En consecuencia, por la resistencia de carga R_L siempre circula la corriente en el mismo sentido y la gráfica de su intensidad en función del tiempo, puede verse en la figura 11.6 *b* que es una función pulsátil.

El rectificador de onda completa (fig. 11.7 *a*) consta de dos diodos iguales, 1 y 2, cuyos ánodos están conectados a los extremos del secundario de un transformador que tiene una toma central *O*. Entre

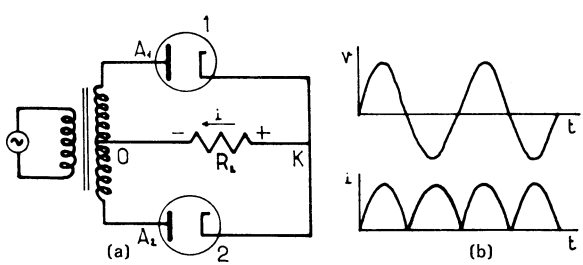


FIG. 11.7 *a*) Rectificador de onda completa. *b*) Ondas de tensión aplicada y de intensidad de la corriente rectificada.

este punto y el punto K común a los dos cátodos se conecta la resistencia de carga R_L. Durante los hemiciclos impares de la onda de tensión, A_1 es el punto del circuito que está a potencial más elevado y A_2 el que está a menor potencial. En consecuencia, el diodo 1 conducirá y el 2 no, circulando por R_L la corriente en el sentido de K a O. En los hemiciclos pares, A_1 tendrá el potencial más bajo de todo el circuito y A_2 el más alto, por lo que conducirá el diodo 2 y no el 1, circulando la corriente por R_L en el mismo sentido que antes. Por tanto, siempre estará K a un potencial positivo respecto a O y la corriente que circule por la carga tendrá una intensidad representada por la función pulsátil de la figura 11.7 *b*. A diferencia del rectificador descrito en primer lugar, en éste se aprovechan los dos hemiciclos de la onda de tensión.

Otro rectificador de onda completa que no utiliza transformador con toma central es el *rectificador de puente* (fig. 11.8 *a*). Los símbolos utilizados corresponden a diodos semiconductores y el vértice de cada triángulo indica el sentido de conducción de cada diodo. Este puente se emplea mucho en los instrumentos de medida de c.a., en los cuales R_L sería el cuadro móvil de un galvanómetro D'Arsonval.

Cuando entre M y N se aplica una ddp sinusoidal, durante los hemiciclos impares, por ejemplo, M es el punto de mayor potencial

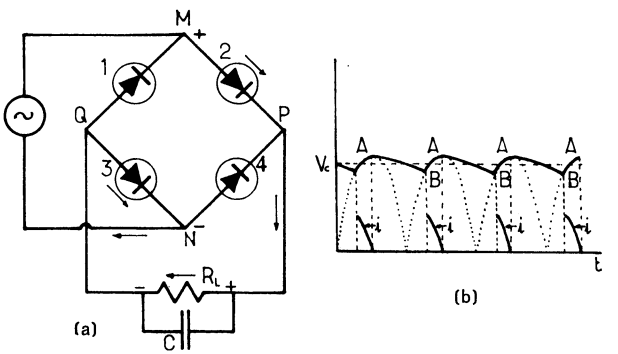


FIG. 11.8 *a*) Rectificador de puente con un filtro de condensador. *b*) Tensión entre los extremos de la carga. V_e es su valor medio.

del circuito y N el de menor. La corriente saldrá del generador de c.a. por M, atravesará el diodo 2, no podrá circular por el 4, que tiene polarización inversa, por lo que atravesará R_L, luego el diodo 3 (no el 1 polarizado inversamente) y por N va al otro terminal del generador. Este trayecto se ha indicado con flechas en la figura 11.8 *a*. En los hemiciclos pares, M es el punto de potencial más bajo y N

el de potencial más alto. En consecuencia, los diodos 2 y 3 están polarizados inversamente y el camino de la corriente es $N4R_L1M$, circulando la corriente en el mismo sentido que antes. Es, pues, un rectificador de onda completa. Si no estuviera conectado el condensador C, la tensión entre P y Q seguiría las variaciones de la intensidad y V_{PQ} estaría representado por los hemiciclos punteados de la figura 11.8 *b*.

El efecto del condensador es el siguiente: Al aumentar la ddp entre P y Q crecerá la ddp entre sus armaduras hasta alcanzar el valor máximo o de *cresta*. A partir de entonces, el condensador se descarga a través de R_L con una constante de tiempo $R_L C$ (cfr. § 4.15) que si es suficientemente grande hará que el proceso de descarga

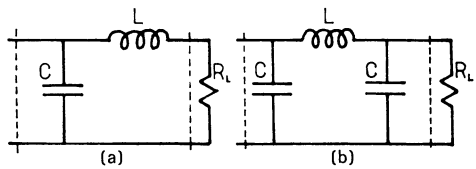


FIG. 11.9 *a*) Filtro en *L*. *b*) Filtro en π.

sea lento (*AB* en fig. 11.8 *b*) y cuando haya disminuido poco la ddp, vuelve a cargarse el condensador mediante la corriente que suministran los diodos del puente que conduzcan (*i* en fig. 11.8 *b*). De esta manera, el condensador mantiene entre P y Q una ddp que varía de acuerdo con la función representada por la línea de trazo grueso *ABABABA*... cuyo valor medio V_c se aparta poco de los valores instantáneos de la tensión. El condensador se dice que es un *filtro* porque no altera la componente continua de la onda de tensión que se tendría entre P y Q de no haber condensador, ya que por éste no circula la c.c. y en cambio reduce las amplitudes de las componentes alternas tanto más cuanto más elevada sea su frecuencia, pues X_c es inversamente proporcional a ésta y la ddp eficaz correspondiente es el producto de X_c por la intensidad eficaz de la corriente. Se entiende que las componentes mencionadas son los términos del desarrollo de Fourier (ec. 12.7, pág. 205, tomo I) de la onda de la tensión rectificada.

La acción de filtro se favorece añadiendo una inductancia L en serie con la resistencia de carga (fig. 11.9 *a*). De esta manera se aumenta la impedancia a las componentes alternas en la rama de la carga, por lo que dichas componentes pasarán preponderantemente por el condensador. En cambio, la inductancia no ofrece resistencia

al paso de la c.c. De esta manera se reduce mucho el rizado de la curva *ABABAB* (fig. 11.8 *b*) que se tendría en ausencia de inductancia. La red representada en la figura 11.9 *a* recibe el nombre de *filtro en L*. Si detrás del filtro en *L* conectamos otro condensador en paralelo con la carga, el rizado se reduce aún más, pudiéndose obtener una ddp en R_L prácticamente constante. Este *filtro en* π es el que se emplea para obtener la tensión constante de alimentación de las placas en los circuitos de radio y TV, colocándolo a continuación del rectificador.

11.4 Triodos. Puede decirse que con el siglo XX nace la Electrónica. Hemos dicho que en 1905 FLEMING emplea el diodo de vacío para detectar las señales de telegrafía sin hilos, pues el diodo sólo conduce cuando la placa se hace positiva respecto al cátodo. Poco después, en 1907, LEE DE FOREST construye el *audión,* que no era sino una válvula de Fleming en la que ha intercalado entre cátodo y ánodo un tercer electrodo en forma de malla de alambre fino, llamado *reja,* con lo que al variar la ddp entre cátodo y reja se facilita u obstaculiza el paso de los electrones hacia el ánodo de la carga espacial que rodea al cátodo. La válvula tiene, pues, tres electrodos y por ello recibe el nombre de *triodo.* Los triodos modernos pueden tener también un cátodo de caldeo directo o indirecto, rodeado de una placa (ánodo) y entre ambos existe la reja en forma de hélice, de espiras no demasiado apretadas con el fin de no interrumpir la circulación de los electrones de cátodo a placa. Si la reja es negativa respecto al cátodo, los electrones de la carga espacial que llegan a la reja en su camino hacia la placa son repelidos por aquélla y pasan a su través sin tocarla o vuelven atrás. El potencial negativo de reja hace que la corriente placa-cátodo sea más débil que la que tendría la válvula funcionando como diodo en las mismas condiciones. Si se hace la reja positiva respecto al cátodo, algunos de los electrones que llegan a ella serán captados por la misma y saldrán por el terminal correspondiente, constituyendo una *corriente de reja* que se resta de la corriente placa-cátodo. Dicha corriente de reja consumirá algo de potencia en el circuito de reja. Por ello, salvo en casos especiales, los triodos se hacen funcionar con reja siempre negativa, con lo cual pueden manejarse grandes potencias en el circuito de placa con un dispendio muy pequeño de potencia en el circuito de reja. En la figura 11.10 *b* pueden verse las características que se obtienen al variar la tensión de placa manteniendo invariable la tensión de reja. Como la intensidad de la corriente de placa depende de ambas tensiones, para cada valor de la tensión de reja V_c obtenemos una

curva que relaciona la intensidad de placa con la tensión de placa y que se denomina *característica estática de placa.* En la figura 11.10 *b* se han representado las características correspondientes a polarizaciones de reja de tensiones 0, —2 V, —4 V, —6 V y —8 V. Los datos

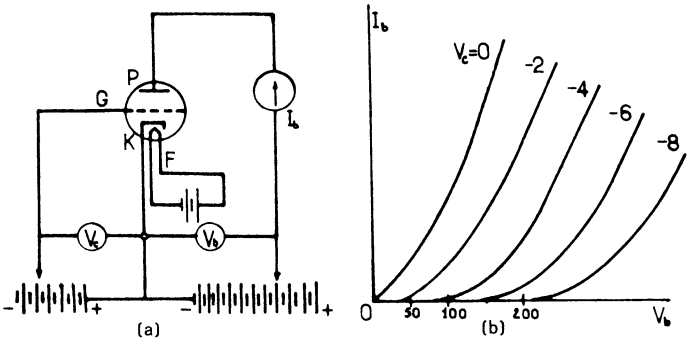


FIG. 11.10 *a*) Montaje para trazar las características estáticas de un triodo. *P* es el terminal de la placa, *G* el de la reja y *K* el del cátodo. Un voltímetro mide la ddp V_c entre cátodo y reja, otro mide la ddp V_b entre cátodo y placa y un miliamperímetro mide la intensidad I_b de la corriente que circula por el circuito de placa. *b*) Características estáticas de placa obtenidas con el anterior montaje.

obtenidos de estas características de placa nos permiten dibujar las llamadas *características de transferencia* del triodo (fig. 11.11) manteniendo fijo el potencial de placa y llevando en abscisas valores de la tensión de reja y en ordenadas la intensidad de placa correspon-

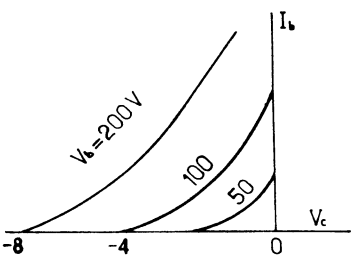


FIG. 11.11 Características de transferencia de un triodo.

diente. El nombre de «transferencia» se debe a que relaciona los valores de la tensión en el circuito de reja con los de la intensidad de la corriente que origina en el circuito de placa.

De todo lo anterior resulta que la intensidad I_b de la corriente de placa, fijada la temperatura del cátodo, es función de las dos varia-

bles V_c y V_b. Si se fija V_b, una variación ΔV_c de V_c, suficientemente pequeña para poder considerar que el segmento que determina sobre la característica de transferencia correspondiente sea rectilíneo, originará una variación de la intensidad de placa $g_m \Delta V_c$, donde g_m es la pendiente de la característica de transferencia en el punto correspondiente a V_c y se denomina *transconductancia* del triodo. Si se fijara V_c y se variara V_b en una cantidad ΔV_b suficientemente pequeña para poder considerar rectilíneo el segmento así definido sobre la característica estática de placa, la variación de la intensidad de placa originada sería $(1/r_p)\Delta V_b$, donde $1/r_p$ es la pendiente de dicha característica en el punto correspondiente a V_b y recibe el nombre de *conductancia de placa* del triodo. Su recíproco se denomina *resistencia de placa.*

La linealidad impuesta por la pequeñez de la variación nos permite considerar que el incremento que sufra I_b al variar simultáneamente V_c y V_b sea la suma de los incrementos antes citados, es decir,

$$\Delta I_b = g_m \Delta V_c + \frac{1}{r_p} \Delta V_b \tag{11.2}$$

Aumentando la tensión de placa y disminuyendo la de reja adecuadamente, conseguiríamos mantener invariable I_b y haciendo $\Delta I_b = 0$ en la ecuación 11.2 tendríamos

$$g_m r_p = -\left(\frac{\Delta V_b}{\Delta V_c}\right)_{I_b = \text{const.}} \tag{11.3}$$

Este segundo miembro, cociente entre la variación de la tensión de placa y la de tensión de reja que hay que aplicar para que no varíe la intensidad de placa, recibe el nombre de *factor de amplificación* del triodo y se representa por μ. La ecuación 11.3 puede, pues, escribirse en la forma

$$\mu = g_m r_p \tag{11.4}$$

Las tres cantidades μ, r_p y g_m reciben el nombre de *coeficientes del triodo,* varían poco de unos puntos a otros en la región de utilización de un triodo y pueden calcularse aproximadamente con auxilio de las características de placa de la manera siguiente: Si es Q el punto de trabajo del triodo, es decir, el punto representativo de las condiciones de funcionamiento, tracemos el segmento QN (fig. 11.12 *a*) paralelo al eje de abscisas y el NM paralelo al de ordenadas, de longitudes tales que el tramo QM de la característica de placa pueda

considerarse rectilíneo. Como la conductancia de placa es su pendiente, tendremos

$$\frac{1}{r_p} = \frac{NM}{QN} \qquad \text{o sea} \qquad r_p = \frac{QN}{NM}$$

Midiendo el segmento QN en las unidades del eje de abscisas (V) y el NM en las del eje de ordenadas (A), se obtendrá la resistencia de placa en ohm. El eje de ordenadas puede estar calibrado en mA o μA. Si no se transforman en ampère, se tendría la resistencia en kΩ o MΩ, respectivamente.

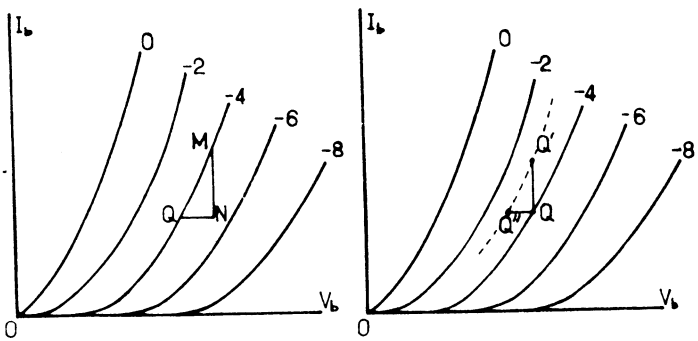


FIG. 11.12 *a*) Determinación gráfica de r_p. b) Determinación gráfica de g_m y de μ.

Para obtener g_m hagamos en la ecuación 11.2 $\Delta V_b = 0$ y $\Delta V_c = 1$ V. Lo primero nos obliga a mantenernos en una recta paralela al eje de ordenadas y lo segundo a limitarle entre el punto Q y el Q' (fig. 11.12 *b*) que se halla sobre la característica de placa correspondiente a la tensión de reja $V_c + 1$ volt. El segmento QQ' medido en las unidades del eje de ordenadas será el ΔI_b correspondiente y mide g_m. Análogamente, QQ'' mide μ, pues por ser horizontal corresponde a $I_b = \text{const.}$, por estar Q'' en la característica correspondiente a $V_c + 1$ es $\Delta V_c = 1$ y el segmento QQ'' mide ΔV_b que será igua a $-\mu$.

11.5 Transistores. Aun cuando existen tipos diferentes en su construcción, los transistores consisten todos en dos uniones *p-n* puestas una a continuación de otra y en oposición (fig. 11.13), con lo que puede tenerse un transistor *npn* o un transistor *pnp*. La región común a las dos uniones (*p* en fig. 11.13 *a* y *n* en fig. 11.13 *b* recibe el nombre de *base*, y las otras dos se llaman *emisor* una y co

lector la otra. La base debe ser lo suficientemente delgada para que un portador minoritario la pueda atravesar con una probabilidad muy pequeña de recombinarse con un portador mayoritario.

La unión emisor-base se polariza en sentido directo, mientras que a la unión base-colector se aplica polarización inversa (fig. 11.14). Para fijar ideas, imaginemos que el transistor es *npn*. El emisor inyecta electrones libres en la base gracias a la polarización directa, los cua-

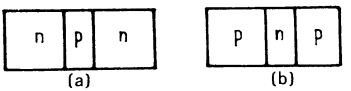


FIG. 11.13 *a*) Transistor *npn*. *b*) Transistor *pnp*.

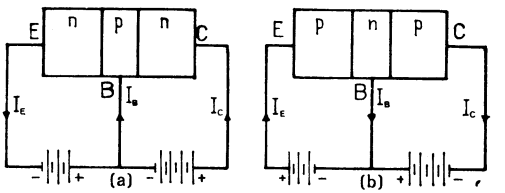


FIG. 11.14 Polarizaciones en un transistor: *a*) *npn*, *b*) *pnp*.

les la atravesarán recombinándose muy pocos a causa de su delgadez y llegan a la unión base-colector, donde el campo existente los arrastrará hacia el colector, pues la polarización inversa obstaculiza el paso de los portadores mayoritarios de la base (huecos) pero facilita el de los minoritarios (electrones). Consecuencia de ello es que casi todos los electrones inyectados por el emisor en la base llegan al colector. Además de los electrones inyectados llegarán los que existen en la base como portadores minoritarios y que «descienden» la barrera de potencial (cfr. § 11.2), y como éstos llegan al colector aun cuando no se inyecten portadores desde el emisor ($I_E = 0$), la intensidad de la corriente que constituyen se representa por I_{co}.

Se conviene en considerar positivas las intensidades de corrientes que fluyan hacia el transistor; luego en el *npn* (fig. 11.14 *a*) la intensidad de emisor será $I_E < 0$, mientras las intensidades I_B de base e I_c de colector serán positivas.

Manteniendo constante la tensión entre base y colector, hemos visto que una parte de la corriente de emisor I_E alcanza al colector. Su intensidad es αI_E, donde α recibe el nombre de *factor de ganancia de intensidad*, que en los transistores de unión suele tener valores comprendidos entre 0,95 y 0,998. Además de esta corriente, llega al colector también la de intensidad I_{co}, y teniendo en cuenta el convenio de signos adoptados tendremos, para un transistor *npn*,

$$I_c = -\alpha I_E + I_{co} \qquad (11.5)$$

Por otra parte, en virtud de la primera ley de Kirchhoff,

$$I_E + I_B + I_c = 0$$

y sustituyendo la ecuación 11.5

$$I_B = -(1-\alpha) I_E - I_{co} \tag{11.6}$$

Para dar una idea del orden de magnitud de estas intensidades, consideremos un transistor *npn* de $\alpha = 0{,}97$ en el que la tensión de polarización emisor-base sea tal que $I_E = -10$ mA, siendo, por otra parte, $I_{co} = 0{,}01$ mA. En tal caso, la aplicación de las ecuaciones 11.5 y 11.6 da $I_c = 9{,}71$ mA e $I_B = 0{,}29$ mA. Variando la intensidad de la corriente inyectada I_E, variaría I_B, y haciendo $I_E = -\frac{1}{3}$ mA se anularía I_B. En la figura 11.15 pueden verse los símbolos que se utilizan para representar los transistores en los esquemas de circuitos. En la recta que va al terminal de emisor se coloca una punta de flecha que indica el sentido de la corriente emisor-base. Como en los *npn* son electrones los que pasan de emisor a base, la corriente tiene sentido opuesto al de su movimiento (fig. 11.15 *a*).

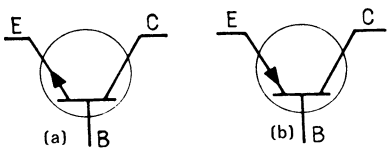


FIG. 11.15 Símbolos representativos de un transistor: *a*) *npn*, *b*) *pnp*.

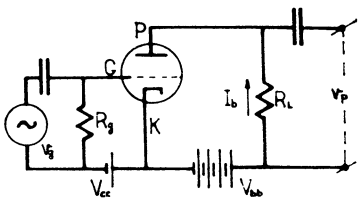


FIG. 11.16 Amplificador de triodo.

11.6 Amplificación. La principal aplicación de los triodos y de los transistores se encuentra en la amplificación de señales eléctricas. Por ejemplo, una tensión variable según cierta ley temporal entre 1 mV y 5 mV se convierte en otra tensión variable semejantemente entre 1 V y 5 V. El dispositivo que logra tal fin es un *amplificador de tensión*. Por lo general, la señal amplificada sirve para accionar otro dispositivo que reproduzca la señal inicial habiéndole comunicado una potencia que no tenía, y este dispositivo recibe el nombre de *amplificador de potencia*. Así, la señal que da un micrófono es muy débil, pero amplificada convenientemente se logra reproducirla en un altavoz con potencia mucho mayor. Lo mismo puede decirse de la señal captada por una antena y que se amplifica hasta llegar al altavoz y al tubo de imagen de un televisor. No vamos a

estudiar aquí las diferencias existentes entre amplificadores de tensión y de potencia, ni los diversos tipos de ellos, sino que nos limitaremos a dar una idea de las características fundamentales de su funcionamiento.

En la figura 11.16 hemos representado el circuito más simple de amplificador de triodo. No se ha dibujado el circuito calefactor del cátodo con el fin de no complicar el esquema. El generador V_{bb} de c. c. proporciona a la placa P la alta tensión continua necesaria para su funcionamiento (por ej., 250 V) y el generador V_{cc} proporciona la polarización negativa de la reja G a través de la resistencia de reja R_g, que proporciona un camino a los electrones captados por la reja. Sin R_g, éstos se acumularían en la reja, que podría alcanzar tensiones muy elevadas. De esta manera se logra mantener la reja a una tensión determinada en ausencia de señal. Los condensadores instalados no tienen más misión que bloquear la c. c. que de otra manera podría circular por el generador de señal a la entrada o aparecer a la salida.

La polarización de reja puede lograrse por diversos métodos, en cuyo estudio no vamos a entrar, y supondremos que se ha logrado mediante una pila que es recorrida por una corriente despreciable, por lo que la ddp entre K y G será, prácticamente, igual a la fem de la pila. Este valor nos permite seleccionar, entre la familia de características estáticas, la curva que corresponde al funcionamiento del triodo (-4 V en fig. 11.17). Por otra parte, entre K y P habrá una ddp

$$V_b = V_{bb} - R_L I_b \tag{11.7}$$

donde V_{bb} es la tensión entre los terminales del generador de c. c. que alimenta la placa P, I_b la intensidad de la corriente que circula por el circuito de placa y R_L la *resistencia de carga* o resistencia del circuito de utilización. Como V_{bb} y R_L son dos constantes, la ecuación 11.7 determina en el diagrama (V_b, I_b) una recta AB llamada *recta de carga,* que corta al eje de abscisas en el punto $V_b = V_{bb}$ y cuyo coeficiente angular es $(-1/R_L)$. Quiere esto decir que la tensión e intensidad de placa han de ser forzosamente las coordenadas de un punto de esta recta. Pero como al mismo tiempo lo han de ser de la característica estática antes citada, la única posibilidad es que sean las coordenadas del punto de intersección Q de dicha característica con la recta de carga. A este punto se le llama *punto de trabajo* o punto de reposo del amplificador.

Cuando, a través del condensador de entrada se aplica a la reja una tensión alterna, ésta cabalga sobre la tensión continua V_{cc}, haciendo que la tensión de reja oscile alrededor de ésta. Ello hace que

se pase de la característica estática antes citada a otras características situadas a uno y otro lado de ella, y el punto de intersección representativo del estado instantáneo del amplificador oscilará entre los puntos M y N de la recta de carga, con la consiguiente variación de la tensión de placa entre los valores correspondientes a los puntos S y T.

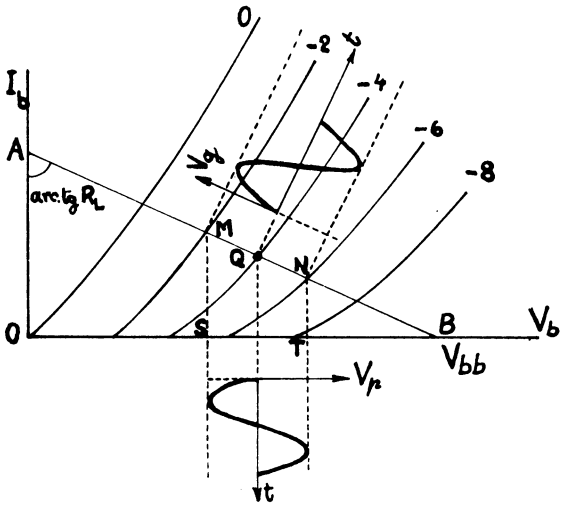


FIG. 11.17 Análisis del amplificador de triodo. AB es la recta de carga.

Para hallar una expresión analítica de la amplificación para señales pequeñas, llamemos v_p a la diferencia ΔV_b entre el valor instantáneo de la tensión de placa y el valor correspondiente al punto Q (fig. 11.17). Llamemos i_p a la diferencia ΔI_b entre el valor instantáneo de la intensidad de placa y el de la correspondiente a Q, y teniendo en cuenta la ecuación 11.7 queda

$$v_p = \Delta V_b = -R_L \Delta I_b = -R_L i_p \tag{11.8}$$

sustituyendo esta expresión en la ecuación 11.2, llamando v_g a la diferencia ΔV_c entre la tensión instantánea de reja y la correspondiente a Q, resulta

$$i_p = g_m v_g + \frac{1}{r_p} v_p$$

que sustituida en la ecuación 11.8 da

$$\left(1 + \frac{R_L}{r_p}\right) v_p = -R_L g_m v_g$$

de donde tenemos para la *amplificación*

$$a = \frac{v_p}{v_g} = -\frac{R_L g_m}{1 + \frac{R_L}{r_p}} = -\mu \frac{R_L}{r_p + R_L}$$

en donde el signo menos sólo significa que las tensiones de salida y de entrada están defasadas 180°. Como se ve, la amplificación será siempre inferior a μ, que representa un valor límite.

Los amplificadores de transistor pueden corresponder a uno de los tres tipos de circuito representados en la figura 11.18. Los dos

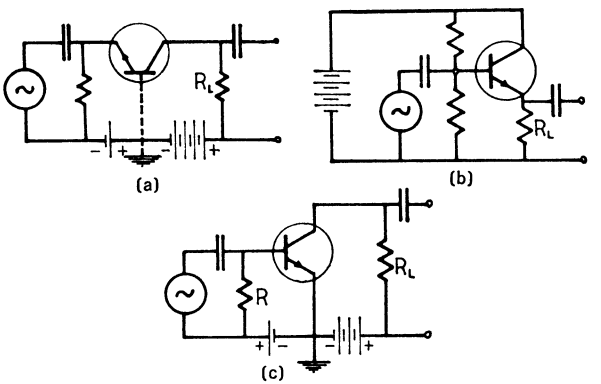


FIG. 11.18 Amplificadores de transistor con *a*) base común, b) colector común, y c) emisor común.

primeros sólo se emplean en aplicaciones especiales y no vamos a estudiarlos. Del representado en la figura 11.18 c, conocido como amplificador de transistor con *emisor común* o con emisor a tierra, diremos que es similar al amplificador de triodo haciendo la correspondencia del emisor con el cátodo, la base con la reja y el colector con la placa. No obstante, existe una diferencia esencial y es que así como en el amplificador de triodo es la tensión de reja la que gobierna su funcionamiento, en el amplificador de transistor es la *intensidad de la corriente de base* quien desempeña tal misión.

Busquemos la relación existente entre I_c e I_B. De la ecuación 11.5 se deduce inmediatamente

$$I_E = \frac{I_{co} - I_c}{\alpha}$$

que sustituida en la expresión de la primera ley de Kirchhoff $I_E + I_B + I_c = 0$ conduce a

$$I_c = \frac{\alpha}{1-\alpha} I_B + \frac{I_{co}}{1-\alpha} \tag{11.9}$$

El coeficiente $\alpha/(1-\alpha)$ se conoce con el nombre de *factor de amplificación de intensidad* de la conexión con emisor común. Al igual que α, aumenta cuando aumenta la ddp entre colector y emisor V_{CE}, por lo que la ecuación 11.9 no establece una relación lineal entre I_c e I_B. Tenemos en juego cuatro variables I_B, I_c, V_{BE} y V_{CE} en vez de

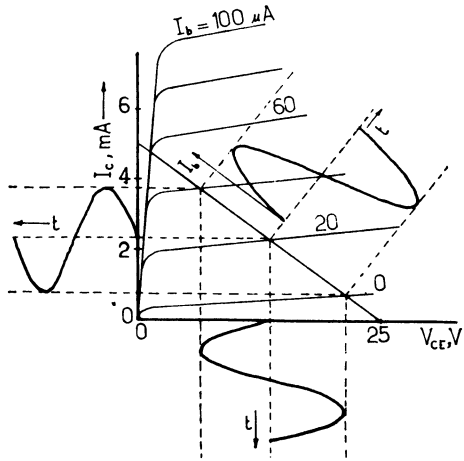


FIG. 11.19 Características de colector de un amplificador de transistor, recta de carga correspondiente a $R_L = 5$ kΩ y análisis gráfico de amplificación.

tres, como en el caso de los triodos. Por ello, podremos tener ahora más familias de curvas estáticas en las que intervengan dos de las variables como coordenadas y una tercera como parámetro. No vamos a entrar en detalles acerca de ellas y haremos referencia solamente a las características de colector en las que se toman en abscisas tensiones colector-emisor, en ordenadas intensidades de colector y como parámetro la intensidad de base. Son las que corresponden a las características de placa de un triodo, haciendo corresponder a la tensión de reja la intensidad de base, que es quien rige ahora el funcionamiento del amplificador. Su forma es diferente de la de las características de placa de los triodos (en realidad se parecen a las de otras válvulas de vacío llamadas pentodos), pero el análisis gráfico

de la amplificación (fig. 11.19) se efectúa de manera análoga a como se efectuaba en el caso del amplificador de triodo.

11.7 Oscilador. Llamamos *oscilador* a todo circuito electrónico capaz de generar oscilaciones eléctricas. Sólo vamos a ocuparnos de oscilaciones sinusoidales y no vamos a poder ver más que un tipo de oscilador basado en el fenómeno de la *realimentación positiva.* Para ello, imaginemos (fig. 11.20) un amplificador de amplificación a que al aplicarle una ddp v_1 da una ddp de salida

$$v_s = a\, v_1 \tag{11.10}$$

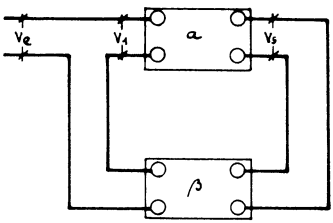


FIG. 11.20 Amplificador realimentado.

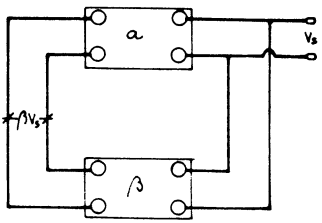


FIG. 11.21 Oscilador de realimentación.

Mediante un cierto circuito de realimentación (β en fig. 11.20) tomemos una fracción β de la ddp de salida y llevémosla a la entrada, en serie con una ddp de entrada v_e. La tensión aplicada al amplificador será, pues,

$$v_1 = v_e + \beta\, v_s \tag{11.11}$$

y sustituyendo en ésta la ecuación 11.10 resulta

$$v_1\,(1 - a\,\beta) = v_e \tag{11.12}$$

Con lo que la verdadera amplificación del amplificador realimentado será

$$a' = \frac{v_s}{v_e} = \frac{a}{1 - a\,\beta} \tag{11.13}$$

obtenida dividiendo las ecuaciones 11.10 y 11.12. El valor del producto $a\,\beta$ depende de la frecuencia de oscilación, pues dependerá de como esté constituido el circuito de realimentación, y si para una frecuencia es $a\,\beta = 1$ la amplificación a' será infinita y una señal de esta frecuencia, por débil que sea, podrá alcanzar a la salida valores muy grandes. Por tal razón, no será necesaria la tensión de

entrada v_e (fig. 11.20), pues el transitorio que se produce al conectar el circuito y la agitación térmica de los electrones proporcionan tensiones muy débiles de todas las frecuencias a la entrada del amplificador. La que tenga la frecuencia que haga $a\beta = 1$ aumentará continuamente de amplitud, con lo que aumentarán las pérdidas de potencia en las distintas partes del circuito hasta alcanzarse un estado de equilibrio en el cual se disipa en el oscilador una potencia igual a la que se realimenta y entonces deja de crecer la amplitud de las oscilaciones.

Para dar una idea de cómo puede lograrse lo anterior, examinemos el funcionamiento del oscilador esquematizado en la figura 11.22.

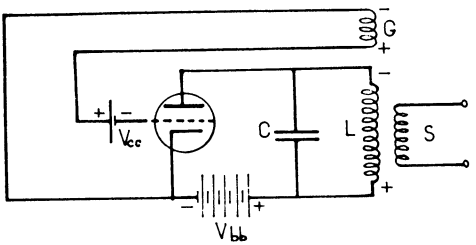


FIG. 11.22 Oscilador sintonizado en placa.

Los devanados L y G están acoplados magnéticamente con un coeficiente de inducción mutua M y los sentidos de los arrollamientos son tales que las dos tensiones estén en concordancia de fase. Es decir, durante un hemiciclo, las polaridades en G y L son las indicadas en la figura y durante el hemiciclo siguiente serán las opuestas en ambos devanados, invirtiéndose la polaridad simultáneamente en ellos.

Las oscilaciones se inician al conectar la fuente de alimentación simbolizada por la batería V_{bb}. Los electrones circulan inmediatamente del cátodo a la placa y cargan el condensador C con polaridad negativa en la armadura superior. Con ello aumenta el potencial de reja, pues ésta está conectada al extremo positivo de G, lo que facilita la circulación de los electrones y el condensador se carga rápidamente. La ddp entre sus armaduras se resta de V_{bb}, con lo que la placa ve muy reducido su potencial y la corriente de placa llega casi a anularse. Entonces, los electrones del condensador empiezan a circular por L, constituyendo una corriente de intensidad i, que será oscilante (cfr. § 8.10) y sería amortiguada a causa de las pérdidas de energía del circuito LC. Ahora bien, en cada período, el triodo manda al condensador una carga igual a la necesaria para restituirle la

energía perdida y las oscilaciones serán de amplitud constante. En el secundario de salida S se obtendrá, pues, una ddp alterna.

Siendo i la intensidad de la corriente que circula por L, en este devanado se inducirá una fem (cfr. ec. 8.19)

$$v_L = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

siendo L el coeficiente de autoinducción de dicho devanado; y en el G se inducirá una fem (cfr. ec. 8.16)

$$v_G = -M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

El coeficiente de realimentación será, pues,

$$\beta = \frac{v_G}{v_L} = \frac{M}{L}$$

En la figura 11.23 puede verse el homólogo transistorizado del anterior. El acoplamiento magnético entre L y B proporciona la reali-

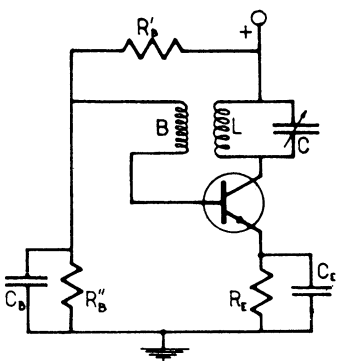


FIG. 11.23 Oscilador Armstrong.

mentación. Las resistencias R_B' y R_B'' constituyen un divisor de tensión que proporcione la polarización adecuada a la base. Los condensadores C_B y C_E presentan reactancias despreciables a las c.a. de frecuencia igual a la de oscilación, para las cuales será como si no existieran R_B'' y R_E.

12

Ondas electromagnéticas

A lo largo de los once capítulos precedentes hemos adquirido los conceptos fundamentales de la Electricidad siguiendo un orden casi coincidente con la cronología de los respectivos descubrimientos. Las leyes enunciadas por COULOMB, AMPÈRE y FARADAY, no obstante, pueden constituir un sistema de leyes fundamentales que JAMES CLERK MAXWELL (1831-1879) formuló en cuatro ecuaciones que constituyen el punto de partida de su teoría electromagnética. Ésta constituye, junto con las leyes de Newton de la Mecánica y los principios de la Termodinámica, las piedras angulares de este fantástico edificio que es la Física clásica. La teoría de Maxwell permitió poner de manifiesto que el establecimiento de una corriente no crea simultáneamente un campo en todos los puntos del espacio, sino que aparece antes en los puntos próximos a la corriente que en los más alejados. Es decir, que el campo se propaga con celeridad finita. Asimismo, dio mayor generalidad a las leyes antes citadas y que sólo hemos estudiado para el caso de que las cargas creadoras de los campos estuvieran en reposo o constituyendo corrientes estacionarias, formulándolas para el caso de campos variables. Con ello queda claro que la propagación ondulatoria de un *campo electromagnético* (pues se propagan juntos **E** y **B**) se debe a la *aceleración* de las cargas eléctricas. La celeridad de propagación de las ondas electromagnéticas, calculada según su teoría, coincidía dentro de los errores experimentales con la celeridad de la luz, lo que le indujo a pensar que ésta se propaga por ondas electromagnéticas. En efecto, los fenómenos de propagación de las ondas electromagnéticas cumplen, según comprobó experimentalmente HEINRICH RUDOLF HERTZ (1857-1894), las mismas leyes que las ondas luminosas, lo que dio apoyo a la *teoría electromagnética de la luz* enunciada por MAXWELL.

El nivel elemental que se pretende dar a este libro nos impide presentar las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial y deducir

de ellas muchas consecuencias interesantes. Por ello, sólo las presentaremos en forma integral y nos veremos obligados a recurrir a comprobaciones en vez de a deducciones. Así y todo, procuraremos dar una idea lo más clara posible de la teoría de Maxwell que inicie al lector en estas cuestiones y le prepare para su ulterior estudio, en el que precisará de un bagaje matemático superior al que suele tenerse en los primeros cursos universitarios.

El capítulo terminará con un breve estudio de los rayos X descubiertos en 1895 por WILHELM KONRAD VON ROENTGEN (1845-1923) y del efecto fotoeléctrico estudiado en 1905 por ALBERT EINSTEIN (1879-1955). Los rayos X, originados al frenar la materia a electrones rápidos, constituyen una comprobación del hecho antes apuntado de que las cargas dotadas de aceleración emiten ondas electromagnéticas. El efecto fotoeléctrico es el fenómeno inverso, en el que la interacción entre las ondas y la materia da lugar a un fenómeno que precisa para su explicación de conceptos cuánticos que no encajan en el marco de la teoría de Maxwell. Lo mismo ocurre con la llamada *radiación característica* de los rayos X. Por tanto, los fenómenos de interacción entre la materia y la radiación señalan una limitación a la teoría electromagnética de la luz. Otro ejemplo de esta limitación lo tenemos en la radiación del cuerpo negro, que estudiaremos más adelante (§ 20.4).

12.1 Ecuaciones de Maxwell. La teoría de Maxwell del Electromagnetismo se basa en cuatro postulados, cuya validez admitimos porque las consecuencias que de ellos se derivan vienen corroboradas por la experiencia. Dichos postulados se formulan en forma de ecuaciones y el estudio realizado en los capítulos anteriores nos ha presentado ya la comprobación experimental de tres de ellos que pasamos a exponer.

El primero es el teorema de Gauss para el flujo eléctrico (ec. 3.8 y 3.12), que equivale a la ley de Coulomb, pues de ella se deduce sin introducir más que conceptos geométricos (cfr. § 3.8, p. 36, tomo I). Luego la primera ecuación de Maxwell será

$$\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \tag{12.1}$$

siendo el primer miembro el flujo saliente a través de una superficie cerrada cualquiera que contenga en su interior una carga eléctrica total Q.

En § 7.8 definíamos la intensidad de polo m como masa agente del

campo **B** y llegábamos a poder expresar el campo creado por una intensidad de polo puntual m en la forma

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^2}$$

de la cual se deduciría inmediatamente una expresión formalmente igual al teorema de Gauss. Pero como los polos magnéticos no pueden aislarse, sino que aparecen dos a dos opuestos, la intensidad de polo total existente en el interior de una superficie cerrada cualquiera será siempre nula y el análogo del teorema de Gauss para el Magnetismo da

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{12.2}$$

que es la segunda ecuación de Maxwell que interpreta el hecho de que las masas magnéticas carecen de realidad física y de la que puede deducirse que las líneas de fuerza del campo **B** se cierran sobre sí mismas, a diferencia de las del campo electrostático, que nacen en las cargas positivas (o en el infinito) y mueren en las negativas (o en el infinito).

La tercera ecuación de Maxwell es la ley de la inducción electromagnética (ec. 8.7), por lo que se le llama, a veces, *ecuación de Maxwell-Faraday*. Escribámosla de nuevo:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{12.3}$$

Según ella, si **B** es variable con el tiempo, el segundo miembro no será nulo y por tanto tampoco el primero, de donde deduce Maxwell que *en todo punto del espacio donde haya un campo magnético variable se induce un campo eléctrico*. Ya vimos (§ 8.5) que el betatrón basa su funcionamiento en este hecho.

La cuarta ecuación de Maxwell tiene que ver con la ley de Ampère (ec. 6.33), por lo que lleva el nombre de *ecuación de Maxwell-Ampère*. No obstante, los razonamientos que conducen a la ley de Ampère se basan todos en la hipótesis de que las corrientes que atraviesan la superficie limitada por el camino de circulación de **H** son permanentes, o sea, de intensidades constantes con el tiempo, por lo que la ley de Ampère carece de generalidad. Veamos un caso en que falla: Consideremos el condensador plano de la figura 12.1, que se está cargando con una corriente cuya intensidad es I en el instante t. El sistema lo supondremos con simetría axial en torno de la corriente de

carga. Consideremos un camino circular centrado en el eje, situado en un plano normal a éste y que pase por el punto A. La simetría del sistema nos permite considerar que en todos los puntos del camino $\mathbf{H}$ tenga el mismo módulo y la ley de Ampère nos da

$$H_A \cdot 2\pi r = I \quad \text{o sea} \quad H_A = \frac{I}{2\pi r}$$

Tomando otro camino igual al anterior que pase por un punto P situado entre las armaduras, como entre éstas no circula corriente, la ley de Ampère daría

$$H_P \cdot 2\pi r = 0 \quad \text{o sea} \quad H_P = 0$$

es decir, que entre las armaduras no habría campo magnético. Pero ello entraña una contradicción. En efecto: Consideremos sobre los

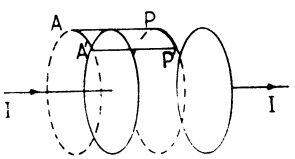


FIG. 12.1 Ilustración de la necesidad de reformar la ley de Ampère.

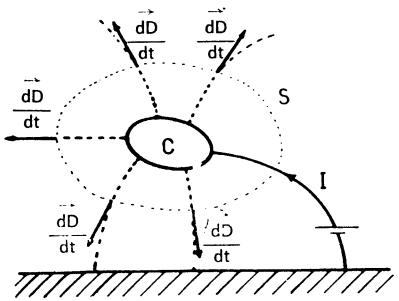


FIG. 12.2 La densidad de corriente de desplazamiento es $\frac{d\vec{D}}{dt}$

caminos mencionados dos puntos A' y P' próximos a A y P, respectivamente, y calculemos la circulación de $\mathbf{H}$ a lo largo del camino $AA'P'PA$, la cual deberá ser nula por no abrazar corriente alguna dicho camino. Luego

$$H_A \overline{AA'} - H_P \overline{PP'} = 0$$

pues en los tramos AP y $A'P'$, $\mathbf{H}$ será, en todo caso, perpendicular al camino. Por tanto,

$$H_P = H_A \frac{\overline{AA'}}{\overline{PP'}} \neq 0$$

Ello hizo pensar a Maxwell que entre las armaduras del condensador debería existir un campo magnético debido a la existencia del campo eléctrico variable que existe durante el proceso de carga del condensador y dicho campo magnético podía considerarse creado por una corriente que él llamó de *desplazamiento* para distinguirla de la corriente de conducción. Dicha corriente de desplazamiento cerraría el circuito sin transportar cargas a través del dieléctrico, lo cual correspondería a la idea de que las corrientes fueran cerradas. Así, por ejemplo, al cargar un conductor C (fig. 12.2), la carga dQ que le llega en un tiempo dt suficientemente corto para poder considerar que durante él no ha variado la intensidad I de la corriente es $dQ = I\,dt$. Ahora bien, considerando una superficie cerrada S que contenga en su interior a C, la carga de éste vendrá dada por la ecuación 12.1 que, derivada respecto al tiempo, da

$$\int \frac{d\mathbf{D}}{dt}\cdot d\mathbf{S} = \frac{dQ}{dt} = I$$

es decir, que si consideramos una densidad de corriente

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{D}}{dt} \tag{12.4}$$

distribuida por todo el espacio, el flujo saliente de $\mathbf{J}$ a través de S es igual a la intensidad de corriente que penetre en S. Luego, la misma intensidad que penetra, sale, lo que indica que las corrientes son cerradas. La ecuación 12.4 define en cada punto la densidad de la corriente de desplazamiento que MAXWELL supone contribuye al campo magnético, por lo que modifica la ley de Ampère escribiendo

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I + \int \frac{d\mathbf{D}}{dt}\cdot d\mathbf{S} \tag{12.5}$$

en donde I es la intensidad de la corriente de conducción abrazada por el camino de circulación de $\mathbf{H}$ y el flujo del segundo miembro es a través de una superficie cualquiera limitada por dicho camino. La ecuación 12.5 es la ecuación de Maxwell-Ampère y en el caso de campos estacionarios, como $d\mathbf{D}/dt = 0$, se reduce a la ley de Ampère (ec. 6.33). Obsérvese que aun cuando fuera $I = 0$ *la existencia de un campo eléctrico variable con el tiempo, hace que exista un campo magnético.*

12.2 Ondas electromagnéticas. Consideremos un conductor recorrido por una corriente de intensidad I. La ley de Laplace (ec. 6.25)

nos dice que el campo magnético que crea en los distintos puntos del espacio es proporcional a I. Si aumentamos esta intensidad hasta un nuevo valor I', el campo habrá aumentado en todos los puntos hasta alcanzar un valor igual al anterior multiplicado por I'/I. Ahora bien, durante la variación de intensidad, el campo magnético habrá ido aumentando en todos los puntos y su variación habrá inducido un campo eléctrico. Inicialmente, la energía acumulada en un elemento de volumen $d\tau$ era $(B^2/2\mu_0)\,d\tau$ (cfr. ec. 8.32) y al final será este valor multiplicado por $(I'/I)^2$. Entre los instantes inicial y final, existirá también campo eléctrico inducido y la energía existente (cfr. ec. 3.25) tendrá un valor

$$\left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\right) d\tau$$

creciente con el tiempo. Los elementos de volumen próximos a la corriente aumentarán su energía antes que los más alejados, por lo que el aumento de energía constituye una perturbación que se propaga en la forma indicada en el capítulo 11 del tomo I con una celeridad igual a la de la luz, según veremos en seguida. La energía que se propaga es la del campo electromagnético, que no precisa de medio material para hacerlo. Las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial permiten demostrar que el campo **E**, el **B** y la velocidad de propagación **v** son mutuamente ortogonales, por lo que las ondas electromagnéticas son transversales. No vamos a entrar en detalles acerca del particular y sólo vamos a calcular la celeridad de propagación para el caso de una onda plana en el vacío, lo cual bastará para las ondas electromagnéticas si admitimos que la celeridad de propagación sólo depende del medio y del tipo de onda, como ocurría en los movimientos ondulatorios mecánicos.

Consideremos una placa conductora de extensión infinita (fig. 12.3) recorrida en el sentido negativo del eje Oy por una corriente de j ampère por metro de anchura (dirección Oz). El campo magnético creado por esta corriente será uniforme a uno y otro lado del plano Oyz, estará dirigido según Oz y tendrá sentido opuesto en el semiespacio $x > 0$ que en el $x < 0$. Consideremos un rectángulo de altura a (paralela a Oz) y base $2b$ (paralela a Ox) y busquemos la circulación de **H** a lo largo de él. Como la corriente que abraza tiene por intensidad $j\,a$, la ley de Ampère nos da

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = j\,a \qquad (12.6)$$

Pero la circulación a lo largo de las bases es nula por ser **H** perpendicular a ellas en todos sus puntos y, por simetría, las circulaciones a lo largo de las dos alturas son iguales a $H\,a$, luego la ecuación 12.6 nos da

$$2\,H\,a = j\,a \quad \text{es decir} \quad H = \frac{j}{2} \tag{12.7}$$

Supongamos que por la placa no circulaba corriente y la establecemos de repente. Ello equivale a dar una aceleración según Oy a todos los electrones libres, con lo que se propagará una onda plana paralela a la placa y se irá estableciendo en los puntos del espacio un campo magnético $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ definido por la ecuación 12.7. Calculemos la circulación de **H** a lo largo del rectángulo antes citado, en un ins-

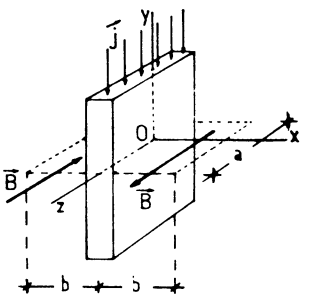


FIG. 12.3 Campo magnético debido a una corriente plana estacionaria.

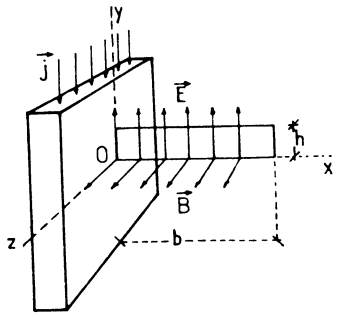


FIG. 12.4 Generación de una onda plana.

tante en que las ondas que se propagan a uno y otro lado de la placa hayan recorrido una distancia $x < b$. El campo en los puntos de las alturas es nulo y su circulación a lo largo del rectángulo es nula, pues en los puntos de las bases en que exista, es perpendicular al camino. El primer miembro de la ecuación 12.5 es, pues, cero. En el segundo miembro, $I = -j\,a$ y como la integral no es más que la variación por unidad de tiempo del flujo de la inducción eléctrica $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$, la calcularemos de la manera siguiente: En un tiempo dt, la onda que se propaga hacia la derecha recorre una distancia $v\,dt$ y lo mismo hace la que va hacia la izquierda. Por tanto, el área donde se establece la inducción eléctrica $\varepsilon_0 \mathbf{E}$ será $dS = 2\,a\,v\,dt$ y el incremento de flujo será $(\varepsilon_0 E)\ (2\,a\,v\,dt)$, con lo que la variación de flujo por unidad de tiempo será

$$\int \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 E\, 2\,a\,v$$

y la ecuación 12.5 nos da, entonces,

$$0 = -j\,a + \varepsilon_0\,E\,2\,a\,v$$

de donde

$$E = \frac{j}{2\,\varepsilon_0\,v} \tag{12.8}$$

siendo v la celeridad de propagación de la onda.

Consideremos ahora (fig. 12.4) el rectángulo de base b y altura h (paralela a Oy), una de cuyas alturas está contenida en la placa. Como el eje Oy es paralelo a **E**, la circulación de este vector a lo largo del rectángulo en el instante en que la onda ha recorrido la distancia $x < b$ valdrá simplemente $E\,h$, pues en las bases es nula por ser **E** perpendicular a ellas y en la otra altura $E = 0$ por no haber llegado aún la onda allí. El primer miembro de la ecuación 12.3 valdrá, pues, $E\,h$. Para calcular el segundo miembro, tengamos en cuenta que en un tiempo dt la onda se propaga hacia la derecha una distancia $v\,dt$ y el área del rectángulo en donde se establece el campo $\mathbf{B} = \mu_0\,\mathbf{H}$ será $dS = h\,v\,dt$, con lo que el incremento de flujo será $d\Phi = \mu_0\,H\,h\,v\,dt$ y la variación de flujo por unidad de tiempo será $\mu_0\,H\,h\,v$ y la ecuación 12.3 da

$$E\,h = -\mu_0\,H\,h\,v$$

y teniendo en cuenta las ecuaciones 12.7 y 12.8 queda

$$\frac{1}{2\,\varepsilon_0\,v} = \frac{\mu_0}{2}\,v \quad \text{o sea} \quad v^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\,\mu_0}$$

Quedando como celeridad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}} \tag{12.9}$$

y al sustituir ε_0 y μ_0 por sus valores respectivos resulta el valor de la celeridad de la luz

$$c = 2{,}997925 \times 10^8 \text{ m/s}$$

que se mide por métodos totalmente independientes de la teoría electromagnética (cfr. § 13.3). Se comprende que si las ondas se propagaran por un medio material no absorbente, la celeridad de propagación sería

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\,\mu}} \qquad (12.9\ bis)$$

donde ε y μ serían la permitividad y la permeabilidad del medio en cuestión.

Una carga eléctrica animada de movimiento periódico creará en cada punto del espacio un campo electromagnético que se repetirá periódicamente con el mismo período del movimiento de la carga. Ésta podría tener un movimiento armónico simple, como tendrían los electrones en una antena excitada por un oscilador y crearía un tren de ondas armónicas que en un punto suficientemente alejado crearía un campo eléctrico variable con el tiempo sinusoidalmente y dado por la ecuación

$$E_y = E_0\ \text{sen}\ \omega\left(t - \frac{x}{c}\right) \qquad (12.10)$$

tomando el eje Oy de igual dirección que el campo eléctrico. Según se ha dicho antes, éste es perpendicular a la dirección de propagación Ox y la onda eléctrica es transversal. También lo es la onda magnética, y por ser $\mathbf{B}$ perpendicular a $\mathbf{E}$ tendrá la dirección Oz. Como $\mathbf{B}$ y $\mathbf{E}$ se engendran uno a consecuencia de la variación del otro y las variaciones son sinusoidales de igual período, al iniciarla $\mathbf{E}$ la inicia también $\mathbf{B}$; luego ambos campos están en concordancia de fase y podremos escribir

$$B_z = B_0\ \text{sen}\ \omega\left(t - \frac{x}{c}\right) \qquad (12.11)$$

Dando un valor fijo a t en las ecuaciones 12.10 y 12.11 obtendríamos la distribución del campo electromagnético en dicho instante (fig. 12.5). Vemos que v tiene siempre la dirección y sentido de $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ o, lo que es igual en el vacío y en cualquier medio isótropo, de $\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$.

Consideremos un paralelepípedo rectángulo que tenga un par de caras de área dS normales a la dirección de propagación Ox y las aristas paralelas a esta dirección sean de longitud $c\,dt$. La energía electromagnética acumulada en el elemento de volumen sabemos que es (cfr. ec. 3.25 y 8.32)

$$\tfrac{1}{2}\,(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B})\,c\,dt\,dS$$

y como se propaga en la dirección Ox con celeridad c, toda ella habrá atravesado la cara de área dS en un tiempo dt. Luego la potencia que atraviesa la unidad de superficie será

$$\frac{dp}{dS} = \tfrac{1}{2}\,(\varepsilon_0 E_y^2 + \mu_0 H_z^2)\,c \qquad (12.12)$$

Puede demostrarse que la potencia que transporta el campo eléctrico es igual a la que transporta el campo magnético, es decir, que

$$\varepsilon_0 E_y^2 = \mu_0 H_z^2$$

de donde

$$H_z = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,E_y \qquad (12.13)$$

y tenemos una relación entre los campos.

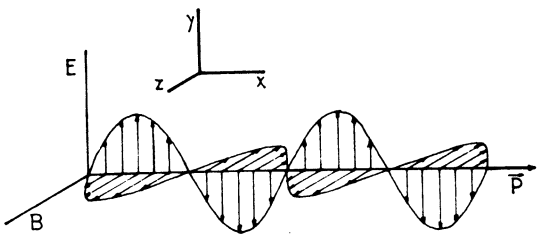


FIG. 12.5 Distribución instantánea del campo electromagnético a lo largo de la dirección de propagación.

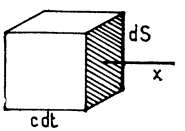


FIG. 12.6 En un tiempo dt toda la energía contenida inicialmente en el elemento de volumen habrá atravesado la cara sombreada.

Consideremos ahora el llamado *vector de Poynting*

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$$

cuyo módulo será, por ser perpendiculares **E** y **H**,

$$E_y H_z = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,E_y^2$$

Pero la ecuación 12.12, teniendo en cuenta las ecuaciones 12.13 y 12.9, da

$$\frac{dp}{dS} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,E_y^2 = E_y H_z$$

Luego el módulo del vector de Poynting mide la potencia que atraviesa la unidad de superficie colocada normalmente a la dirección

de propagación. Promediando este valor para un período tendríamos

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2 = \frac{1}{2}E_0 H_0$$

pues por ser E_y función sinusoidal, el valor medio de su cuadrado (ec. 9.3) es la mitad del cuadrado de su amplitud. Pero dicho valor medio es la intensidad de la onda (cfr. § 11.4, tomo I) y, por tanto, *la intensidad es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud del campo eléctrico* (o del magnético).

Por ejemplo, el Sol manda a la Tierra una potencia media por unidad de superficie $p' = 1300$ W/m^2. Luego

$$p' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2 \qquad \text{o sea} \qquad E_0^2 = 2p'\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

y sustituyendo valores numéricos queda

$$E_0^2 = 2 \times 1300 \times 60\,\pi \cong 49 \times 10^4 \quad \text{es decir} \quad E_0 \cong 700 \text{ V/m}$$

12.3 Experiencias de Hertz. La comprobación experimental de la teoría de Maxwell la efectuó HERTZ en 1887, generando ondas electromagnéticas mediante una descarga oscilante que producía una chispa entre dos bolas unidas al secundario de una bobina de inducción. Las bolas hacían las veces de armaduras del condensador del circuito oscilante, pero entre ellas se creaba un campo tan intenso que ionizaba el aire y saltaba la chispa en uno y otro sentido. Las ondas generadas se pusieron de manifiesto al ser captadas por una antena receptora, algo distante, consistente en un cable de forma circular que dejaba un pequeño espacio entre sus extremos, entre los que saltaba la chispa al ser alcanzada la antena por las ondas. No quedó duda de que, efectivamente, se habían generado ondas que se habían propagado según lo previsto por MAXWELL. Con chispas oscilantes de frecuencia 30 MHz obtuvo HERTZ ondas electromagnéticas de las que midió su longitud de onda en el aire resultando $\lambda = 9{,}6$ m y al aplicar la ecuación 11.7 (pág. 179, tomo I) obtuvo para v un valor concordante con c (ec. 12.9). Reprodujo con ondas electromagnéticas el fenómeno de la reflexión, utilizando como espejo una lámina metálica. Colocando el estallador en la línea focal de un cilindro parabólico, consiguió ondas planas que se propagaban en línea recta barriendo una zona de sección coincidente con la proyección de la boca del espejo parabólico (fig. 12.7), efecto de reflexión ya conocido por Óptica. Dichas ondas las recogía otro espejo análogo en cuya

línea focal se colocaba el espacio entre los extremos de la antena receptora, en el cual saltaba la chispa al llegar las ondas. También reprodujo con ondas electromagnéticas los fenómenos de la refracción, polarización, interferencias, difracción y ondas estacionarias. Este último lo lograba invirtiendo el sentido de propaganción de las ondas por reflexión en un plano metálico. Como en el metal debe ser $E = 0$ (por eso los metales son opacos), la onda eléctrica debería presentar un nodo en su superficie. En cambio, la onda magnética presenta un vientre. Explorando con la antena receptora, o *resonador de Hertz,* el espacio entre la emisora y el espejo plano, pudo ob-

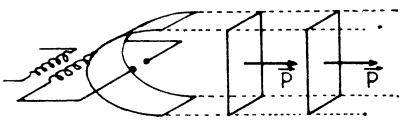


FIG. 12.7 Una de la experiencias de Hertz.

servar HERTZ la existencia de dichos nodos y vientres. Téngase en cuenta que cuando la superficie limitada por el aro se coloca normalmente a **B**, la chispa salta por la inducción electromagnética, lo que permite determinar la posición de los nodos de la onda magnética (no habrá chispa). En cambio, si se gira 90° el resonador, de manera que sus dos puntas determinen la dirección de **E**, la chispa salta a causa de éste.

12.4 Espectro electromagnético. Las experiencias de HERTZ no dejaron lugar a dudas acerca de que las ondas luminosas eran electromagnéticas, hecho que se vio reforzado en 1896 cuando el físico holandés PIETER ZEEMAN (1865-1943) descubrió que la luz de una llama de sodio alteraba su frecuencia cuando se colocaba en un campo magnético intenso. Su maestro HENDRIK ANTOON LORENTZ (1853-1928) demostró que la acción del campo magnético sobre las cargas eléctricas de los átomos de sodio originaban una variación de frecuencia de la luz emitida concordante con la que se observaba. La luz, pues, no es sino uno de los muchos tipos de radiación electromagnética que pueden obtenerse por muy diversos procedimientos y viene ca-

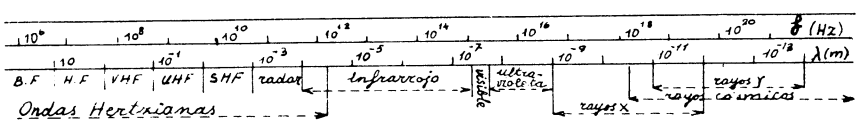


FIG. 12.8 Espectro electromagnético.

racterizada por tener longitudes de onda comprendidas entre los 4000 Å y los 7000 Å (4×10^{-7} m y 7×10^{-7} m) aproximadamente. Ocupa, pues, una región muy reducida del espectro electromagnético (fig. 12.8) constituido por las radiaciones electromagnéticas obtenidas hasta la fecha.

12.5 Efecto fotoeléctrico. En el curso de las experiencias mencionadas en § 12.3, observó HERTZ que al irradiar con luz ultravioleta las bolas del estallador, la chispa saltaba más fácilmente, es decir, con menor ddp, que cuando no se irradiaban o cuando se iluminaban con luz visible. En 1888, el físico alemán WILHELM HALLWACHS (1859-1922) observó que una placa de cinc unida a un electroscopio, si estaba cargada negativamente se descargaba al iluminarla con luz ultravioleta, pero no si su carga era positiva. De ello se dedujo que la luz ultravioleta extraía cargas negativas de los metales sobre los que incidía y al fenómeno se le dio el nombre de *efecto fotoeléctrico.* Poco después, en 1899, J. J. THOMSON demostraba que las cargas eléctricas emitidas eran electrones. En la actualidad, al fenómeno mencionado se le llama *efecto fotoemisor* para diferenciarlo de otros efectos que también son fotoeléctricos cuales son: el *efecto fotovoltaico* (generación de una ddp por la radiación) y el *efecto fotoconductor* (variación de la resistencia por acción de la radiación).

En principio, podríamos intentar explicar el efecto fotoemisor con auxilio de la teoría de Maxwell, pues, según ella, las ondas electromagnéticas transportan energía y bastaría que cedieran a un electrón de la banda de conducción del metal una energía superior a la de extracción (§ 5.7) para que el electrón pudiera escapar del metal. Sin embargo, aparece aquí un hecho que no puede ser explicado por la teoría de Maxwell: Si la frecuencia de la radiación es inferior a un cierto valor f_0 característico del metal, éste no emite fotoelectrones por muy grande que sea la intensidad de las ondas electromagnéticas; es decir, la energía electromagnética que incide sobre la superficie metálica puede ser tan grande como se quiera, pero si la frecuencia es $f < f_0$ no habrá emisión de electrones. Por el contrario, si $f > f_0$ se emiten electrones por muy débil que sea la radiación incidente, si bien el número de fotoelectrones emitidos por segundo es proporcional a la intensidad de las ondas electromagnéticas. Para comprobarlo, en una ampolla en la que se haya practicado el vacío se introducen un ánodo A (fig. 12.9) o placa colectora y un cátodo K fotosensible sobre el que incide una radiación de frecuencia $f > f_0$. Se cierra el circuito por el exterior con un galvanómetro G y una pila que haga A positivo respecto K. Los fotoelectro-

nes emitidos por K llegarán a la placa colectora arrastrados por el campo eléctrico y G señalará paso de corriente. Variando a voluntad la intensidad de las ondas, varía la intensidad de la corriente señalada por G y se observa proporcionalidad entre ambas.

Los fotoelectrones emitidos poseen energías cinéticas muy variadas. Haciendo A negativo respecto K (fig. 12.10), sólo llegarán a A aquellos que tengan una energía inicial superior a la barrera de energía potencial eV. Moviendo el cursor del potenciómetro P variamos la ddp V entre K y A hasta que G deja de señalar paso de

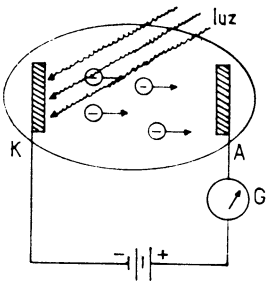


FIG. 12.9 Célula fotoeléctrica.

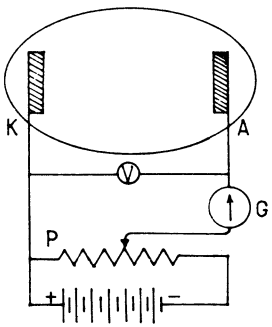


FIG. 12.10 Determinación del potencial de detención.

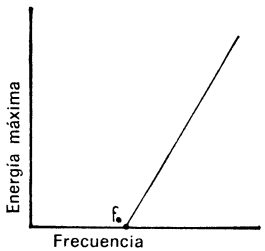


FIG. 12.11 Energía cinética máxima de los fotoelectrones en función de la frecuencia.

corriente. El valor de V señalado por el voltímetro es el llamado *potencial de detención* de los fotoelectrones que, multiplicado por la carga de electrón e, da la energía cinética máxima de los electrones emitidos. Variando la frecuencia de la radiación varía dicha energía máxima y experimentalmente se observa que existe entre ellas una relación lineal (fig. 12.11). En cambio, la teoría ondulatoria daría una relación función del cuadrado de la frecuencia (cfr. ec. 11.11, pág. 183, tomo I). Por otra parte, en la emisión de fotoelectrones no se observa ningún retraso respecto a la incidencia de la radiación, cosa que, según la teoría ondulatoria, debería suceder en el caso de radiación débil para dar lugar a acumular una energía suficiente para arrancar un electrón.

El valor de la frecuencia umbral f_0 es característico de cada metal y en la tabla 12.1 se han consignado los valores de las longitudes de onda correspondientes, poniendo de manifiesto que los metales alcalinos emiten fotoelectrones para radiaciones visibles. Por tanto, el

TABLA 12.1. UMBRALES DE FOTOEMISIÓN.

Metal	*Longitud de onda umbral, Å*
Wolframio	2300
Cinc	3020
Plata	3250
Potasio	4360
Sodio	5830
Cesio	6810

punto f_0 de la figura 12.11 varía de unos metales a otros. En cambio, la pendiente de la recta resulta ser siempre la misma e igual a

$$h = 6{,}6256 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s} \tag{12.14}$$

que es el valor de la *constante de Planck*. Por tanto, la ecuación de la recta de la figura 12.11 será

$$\text{Energía cinética máxima} = h(f - f_0) \tag{12.15}$$

Ahora bien, la energía cinética máxima la tendrán los electrones que tenían máxima energía en el interior del metal y si a éstos se les comunica una energía exactamente igual a la de extracción, en el exterior les quedará una energía cinética nula, lo que supone (ecuación 12.15) $f = f_0$.

La interpretación de todos estos hechos experimentales la dio EINSTEIN en 1905, aplicando a la radiación las ideas cuánticas de MAX PLANCK (1858-1947), que veremos más adelante (§ 20.6). Consideraba EINSTEIN que la energía lumínica no se distribuía uniformemente sobre la onda, sino que se hallaba concentrada en pequeñas regiones o paquetes de energía llamados *fotones*. Cada fotón contiene una cantidad de energía $h\,f$. Un frente de onda, pues, tendrá numerosos fotones distribuidos sobre él y el hecho de que las ondas esféricas disminuyan su intensidad al aumentar el radio (cfr. § 11.4, pág. 184, tomo I) puede interpretarse considerando que aumenta la distancia entre los fotones y, por tanto, la energía por unidad de superficie. Así pues, la interacción entre radiación y materia será la de fotón con electrón, de manera análoga a como ocurre al lanzar una piedra contra una piña: si la energía de la piedra es suficiente, romperá el tallo que une la piña al pino y la desprenderá. Si la energía del fotón es superior a la energía de extracción, podrá arrancar un electrón de máxima energía gastando dicha energía de extracción y el resto

de energía queda en forma de energía cinética del electrón emitido. De lo anteriormente visto se deduce que la energía de extracción es $W = h f_0$ y la ecuación 12.15 queda en la forma

$$h f = W + \tfrac{1}{2} m_e v^2_{\text{máx}} \qquad (12.15\ bis)$$

Como se ve, esta ecuación no depende para nada de la intensidad del movimiento ondulatorio, y el aumento de dicha intensidad dará lugar a una mayor emisión de fotoelectrones por ser mayor el número de fotones que inciden, existiendo proporcionalidad entre dicha intensidad y este número de fotoelectrones. En cambio, si $f < f_0$ no podrá arrancarse ningún electrón, pues $h f < W$ y la energía cinética no puede ser negativa.

La presencia de óxido sobre la superficie del metal puede reducir, en ciertos casos, la energía de extracción de la superficie oxidada y así, con óxido de cesio, se logran células fotoemisoras sensibles incluso al infrarrojo cercano, con longitud de onda umbral de 12 000 Å. Este fenómeno se aprovecha también en el efecto fotovoltaico a que se ha hecho referencia antes. Por ejemplo, extendiendo por calentamiento una película de Cu_2O sobre un disco de Cu, al iluminarlo desprende el óxido electrones que pasan al Cu, con lo que éste se cargará negativamente y el óxido positivamente, formando una *pila fotovoltaica*. El tipo más corriente de fotómetro para fotógrafo está constituido por una pila fotovoltaica que cierra su circuito a través de un microamperímetro.

Por último diremos que el efecto fotoconductor se hace especialmente patente en los semiconductores por no ser muy grande la diferencia de energía existente entre las bandas de valencia y de conducción (cfr. § 5.2). Así, al incidir sobre un semiconductor fotones de energía superior a la diferencia de energía mencionada, parte de ellos harán pasar electrones de la banda de valencia a la de conducción, es decir, producen pares electrón-hueco que incrementan el número de portadores y, por tanto, aumentan la conductividad (ec. 4.10 *bis*).

12.6 Rayos X. Cuando electrones de gran energía cinética (por ejemplo, procedentes de un betatrón) inciden sobre una superficie metálica, ésta los frena, es decir, comunica una aceleración a los electrones, lo que da origen a ondas electromagnéticas, de acuerdo con la teoría de Maxwell. El fenómeno viene a ser el inverso del efecto fotoeléctrico, pues ahora la incidencia de un electrón provoca la emisión de una onda electromagnética. La energía cinética de un electrón incidente puede transformarse íntegramente en energía de

un fotón, o puede transformarse en tal, sólo una parte de aquélla, apareciendo el resto de la energía en forma de calor en el metal bombardeado. La energía del electrón puede también emplearse en arrancar uno de los electrones más próximos al núcleo atómico. Cuando esto ocurre, alguno de los electrones de valencia puede pasar a ocupar la vacante producida, con lo que el átomo pierde una cantidad de energía determinada y lo hace en forma de fotón $h f$. Como la energía perdida es grande, también lo será f, correspondiendo al dominio de valores de los rayos X 0,01 Å — 100 Å (fig. 12.8). El conjunto de transiciones posibles de este tipo, dará lugar a un conjunto discreto de frecuencias característico del elemento bombardeado que constituye la *radiación característica* de éste.

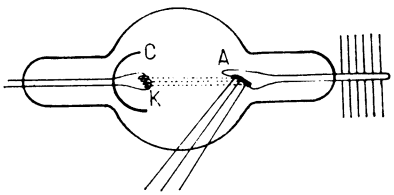


FIG. 12.12 Tubo Coolidge. *K*, cátodo caliente; *C*, cúpula para enfocar los electrones en la pastilla del ánodo *A*.

Aparte de con betatrones, pueden obtenerse rayos X con el *tubo Coolidge* (fig. 12.12), el cual consta de una ampolla de vidrio en cuyo interior se ha practicado el vacío. Un filamento recorrido por una corriente se calienta y emite electrones por emisión termoiónica. La cúpula *C* los concentra en una pastilla de material de punto de fusión elevado, engastada en el ánodo *A* (también llamado *anticátodo*), el cual es metálico y está provisto de sistema de refrigeración para extraer el calor que en él se desprende a causa del bombardeo electrónico. Entre *K* y *A* se aplica una ddp del orden de 100 kV o más, con lo que los electrones llegarán al ánodo con una energía cinética eV (cfr. ec. 2.22) si es V la ddp aplicada, ya que la energía cinética de los electrones en el instante de su emisión es despreciable frente a la que tienen al llegar al ánodo. Ésta se convierte en un fotón $h f$ por enfrenamiento y en calor, si prescindimos del fenómeno que da lugar a la radiación característica. Es decir,

$$e V = h f + \text{calor}$$

con lo que la frecuencia máxima del haz de rayos X que generan

los electrones incidentes será la que corresponda al caso en que no haya desprendimiento de calor, es decir,

$$e\,V = h\,f_{máx}$$

A esta frecuencia corresponde la longitud de onda mínima

$$\lambda_{min} = \frac{c}{f_{máx}} = \frac{c\,h}{e\,V} \tag{12.16}$$

expresión conocida por el nombre de *ley de Duane y Hunt*. Así pues, si mediante un espectroscopio de rayos X (§ 19.7) separáramos las componentes de longitudes de onda diferentes, se obtendría un *espectro continuo* a partir de la longitud de onda dada por la ecuación 12.16, dependiendo dicha longitud de onda sólo de la energía de los electrones incidentes $e\,V$. Téngase en cuenta que si los rayos X los obtuviéramos con un betatrón, todo lo anterior sería igualmente válido si consideráramos que $e\,V$ es la energía con que los electrones inciden en el blanco. Las longitudes de onda superiores a la dada por la ley de Duane y Hunt las proporcionan los electrones que en su choque con el blanco o anticátodo transforman parte de su energía en calor. Superpuesto a este espectro continuo se encuentra la radiación característica que depende de la naturaleza del blanco y que analizaremos más adelante (§ 19.7).

12.7 Efecto Compton. Una comprobación concluyente de la existencia de los fotones la dio en 1923 ARTHUR HOLLY COMPTON (1892-1962), quien, al mandar un haz de rayos X a través de la materia, observó que el haz emergente contenía, además de rayos X de igual frecuencia y dirección de propagación que los incidentes, otros rayos X de menor frecuencia y que se propagaban en otra dirección, fenómeno que no puede explicarse mediante la teoría clásica. En cambio, la teoría cuántica daba una explicación satisfactoria. Veámosla:

El fotón, considerado como partícula, se mueve con la celeridad de la luz c y tendrá asociada una masa m que, según la teoría de la Relatividad, cumple con $W = m\,c^2$, donde W es la energía del fotón. Pero según la teoría cuántica, ésta vale $h\,f$, de donde resulta

$$m\,c^2 = h\,f \quad \text{o sea} \quad m = \frac{h\,f}{c^2}$$

luego la cantidad de movimiento del fotón será

$$m\,c = \frac{h\,f}{c} \tag{12.17}$$

Si el fotón *choca* con un electrón libre existente en la materia y que estuviera inicialmente en reposo, tras el choque llevarán direcciones que formarán con la inicial ángulos θ y φ, respectivamente (fig. 12.13). Como en el choque de partículas se conserva la cantidad

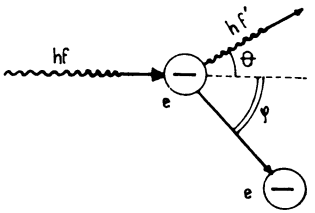


FIG. 12.13 Efecto Compton.

de movimiento, las componentes perpendiculares a la dirección inicial de las cantidades de movimiento del electrón y del fotón después del choque deberán ser opuestas, o sea

$$\frac{h f'}{c} \operatorname{sen} \theta = p \operatorname{sen} \varphi \tag{12.18}$$

siendo p el módulo de la cantidad de movimiento que adquiere el electrón. Además, la suma de las componentes según la dirección inicial deberá ser igual a la cantidad de movimiento del fotón incidente, es decir,

$$\frac{h f}{c} = \frac{h f'}{c} \cos \theta + p \cos \varphi \tag{12.19}$$

La conservación de la energía exige, a su vez, que

$$m_0 c^2 + h f = h f' + W \tag{12.20}$$

donde m_0 es la masa en reposo del electrón, que multiplicada por c^2 da su energía en reposo, y W la energía *total* del electrón en movimiento. Por otra parte, la teoría de la Relatividad da como relación entre la energía total W de una partícula y su cantidad de movimiento p,

$$W^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \tag{12.21}$$

y esta ecuación, aplicada al electrón, junto con las 12.18, 12.19 y 12.20, constituye un sistema de cuatro ecuaciones con las cinco incógnitas f', W, p, θ y φ, del que se deduce

$$\frac{1}{f'} - \frac{1}{f} = \frac{h}{m_0 c^2}(1 - \cos\theta)$$

o sea

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta) \qquad (12.22)$$

Las medidas de las longitudes de onda λ' de los rayos dispersados diversos ángulos θ concuerdan satisfactoriamente con 12.22, lo que pone de manifiesto que los fotones se comportan como partículas en su interacción con los electrones libres de la materia. Si el electrón estuviera fuertemente ligado, la m_0 de la ecuación 12.22 sería la del átomo al que estuviera ligado el electrón, la cual es miles de veces mayor que la del electrón, por lo que $\lambda' - \lambda$ sería inapreciable, correspondiendo a los rayos X no dispersos.

13

Optica

El objeto de la Óptica es el estudio de la luz, es decir, del agente físico que impresiona el sentido de la vista. En el mundo físico, la luz juega un importante papel además del que representa ser el medio de la percepción visual. La Ciencia le ha reservado un lugar especial entre los diversos fenómenos naturales. Su estudio nos enseña algo esencial acerca de la estructura del Universo y su celeridad en el vacío es una constante universal básica en la teoría de la Relatividad. La Óptica puede extenderse al estudio de otras radiaciones no visibles, puestas de manifiesto por métodos indirectos, que tienen las mismas propiedades esenciales que la luz visible.

13.1 Breve exposición histórica de las ideas acerca de la luz. Los fenómenos luminosos fueron conocidos antes que los eléctricos y magnéticos. Uno de los primeros hechos observados fue que un foco luminoso emitía «rayos de luz» en todas direcciones y que en un medio uniforme la propagación era rectilínea. Parece ser que los caldeos, hace unos 6000 años, ya utilizaban lentes rudimentarias como vidrios de aumento. Las leyes de la reflexión por un espejo plano se suponen ya conocidas en la Óptica de EUCLIDES (siglo III a. J.C.). HERÓN de Alejandría (siglo II a. J.C.) y TOLOMEO en el mismo siglo, estudian las leyes de la reflexión en espejos curvos y la de la refracción en el agua y en el vidrio, pero no llegan a ninguna ley que relacione los ángulos de incidencia y de refracción. Hasta el siglo XI no parece que surgieran nuevas ideas. En este siglo, el científico árabe ALHAZEN publicó un libro de Óptica que se consideró el de mayor autoridad en la materia hasta el siglo XVII. La ley de la refracción fue dada en 1621 por el holandés WILLEBROD SNELL (1591-1626) y en 1626 por RENÉ DESCARTES (1596-1650), independientemente. Estos descubrimientos llevaron a constituir la Óptica geométrica o estudio de la dirección de los rayos luminosos, considerados como realidades pri-

marias que debían distribuirse *instantáneamente* en el espacio. En 1657, PIERRE DE FERMAT (1601-1665) enunció su célebre principio de mínimo, según el cual la luz siempre sigue el camino que la lleve a su destino en el tiempo más corto y del cual se deducen las leyes de la reflexión y de la refracción.

La Óptica geométrica, a pesar de no tratar de la naturaleza de la luz, se ha mostrado muy fecunda en aplicaciones prácticas hasta el punto que, gracias a los trabajos de ABBE, PETZVAL, CZAPSKI y otros, en el siglo pasado, se ha podido constituir un cuerpo de doctrina al que se ha dado el nombre de *Optotécnica.*

Para poder estudiar el comportamiento físico de los cuerpos respecto a la luz apareció la Óptica física, que abarca mayor número de fenómenos y de la cual se deduce la Óptica geométrica como una consecuencia simple. Al analizar la noción de rayo luminoso, la Óptica física no ve más que un aspecto resultante de fenómenos elementales en los que entra la idea de movimiento. Se ponen de manifiesto, entonces, varias propiedades fundamentales de la luz y queda claro que la acción de los focos luminosos alcanza a los receptores al cabo de determinado tiempo, tanto mayor cuanto más distantes se hallen del foco. De aquí el concepto de «velocidad de la luz».

Mientras fue ignorado el principio de la conservación de la energía, se consideró todo agente físico (calor, luz, etc.) como una sustancia material capaz de moverse y conservarse en ciertas condiciones. Como la luz se propaga en línea recta en un medio uniforme, mientras no haya obstáculos, era lógico interpretar tal fenómeno como un desplazamiento de partículas materiales, y así ISAAC NEWTON (1642-1727) presentó su teoría de la *emisión,* según la cual la luz se compone de pequeños corpúsculos que se propagan en línea recta a través del espacio, los cuales son emitidos a gran velocidad por los cuerpos luminosos, siendo tal velocidad característica del medio. Con estas consideraciones y aplicando las leyes de la Mecánica interpretó las leyes de la reflexión y de la refracción, si bien en la refracción el índice de un medio resultaba directamente proporcional a la celeridad de la luz en este medio, en lugar de serlo inversamente como se dedujo posteriormente de hechos experimentales.

El descubrimiento, en 1665, de los primeros fenómenos de interferencias por ROBERT HOOKE (1635-1703) y los de difracción por FRANCESCO MARIA GRIMALDI (1618-1663), hicieron pensar a HOOKE que la luz consistía en rápidas vibraciones que se propagaban por el espacio. Esta teoría ondulatoria de la luz fue ampliada y estructurada por CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1695) (*Traité de la lumière,* publicado en Leyden en 1690). Enunció el principio, que luego ha recibido el

nombre de su autor, según el cual un punto de un medio alcanzado por una perturbación luminosa puede considerarse como el centro de una nueva perturbación que dará lugar a una onda esférica secundaria; estas ondas secundarias se combinan de tal manera que su envolvente determina el frente de ondas en cualquier instante. Su teoría está inspirada en la analogía entre sonido y luz. En el siglo XVII, el pensamiento científico en el campo de la Física se reducía, prácticamente, a los campos de la Mecánica y de la Óptica; es lógico que las teorías de NEWTON y de HUYGENS se basen en modelos mecánicos. A partir de su principio, HUYGENS deduce las leyes de la reflexión y de la refracción, pero sus ideas no tuvieron gran aceptación, incluso en el siglo siguiente en que el prestigio de LAPLACE, convencido de la teoría corpuscular, hizo que no se prestara demasiada atención a las ideas de HUYGENS. Más adelante, el estudio en 1802 de las interferencias por THOMAS YOUNG (1773-1829) y el descubrimiento en 1808 de la polarización luminosa por ETIENNE LOUIS MALUS (1775-1812) llevaron a AUGUSTIN JEAN FRESNEL (1788-1827) al convencimiento de que la luz era un fenómeno de naturaleza ondulatoria. Modificó el principio de HUYGENS basándose en el principio de las interferencias. Con su teoría interpreta los hechos conocidos y prevé nuevos hechos que luego son comprobados. Para poder explicar la propagación de la luz, que debe ser una onda transversal según los fenómenos de polarización, se postula la existencia de un medio material, el «éter», cuyas propiedades elásticas corresponderían a un medio muy rígido pero de densidad despreciable para no ofrecer resistencia al movimiento de los cuerpos (por ejemplo los planetas).

En este estado del pensamiento científico, MAXWELL desarrolló la teoría electromagnética de la luz. El hecho de que la velocidad de propagación, en el vacío, de las ondas electromagnéticas era la misma que la de la luz y que las ecuaciones de propagación eran formalmente análogas a las de FRESNEL, llevaron a MAXWELL a postular que las ondas luminosas eran ondas electromagnéticas y que el vector luminoso de FRESNEL (elongación de una partícula de «éter» a partir de su posición de equilibrio) podía identificarse con la intensidad del campo eléctrico o con la del magnético. La Óptica pasa a ser un capítulo del Electromagnetismo proporcionando así una mayor unidad a las teorías físicas. La confirmación de las teorías de MAXWELL surgieron gracias a los experimentos de HERTZ (§ 12.3).

La teoría electromagnética es satisfactoria para explicar todos los fenómenos relacionados con la propagación de la luz, pero es incapaz de explicar los fenómenos de emisión y absorción así como la inter-

acción materia-radiación (cfr. §§ 12.5 y 12.6). Por un lado, tenemos fenómenos claramente ondulatorios, interferencias, difracción, etc., en los cuales la luz se comporta como onda y por otro, el efecto fotoeléctrico y la difusión por electrones libres, que implica naturaleza corpuscular. Estos corpúsculos, llamados fotones, poseen energía y cantidad de movimiento que depende de la frecuencia de la luz y parecen tener existencia real como los electrones y otras partículas. En 1924, LOUIS VICTOR DE BROGLIE (n. 1892), en su tesis doctoral, introducía las bases de la Mecánica Ondulatoria, al introducir el dualismo onda-corpúsculo. Asociaba a todo movimiento de un corpúsculo, que obedeciera a las leyes de la Dinámica, una onda, estableciendo relaciones cuantitativas entre la longitud de onda y la cantidad de movimiento del corpúsculo. Esta teoría general contenía como caso particular la teoría de los fotones. Los fenómenos de difracción de electrones, logrados por DAVISSON y GERMER en 1927, aportaron a la Mecánica Ondulatoria la prueba experimental que le faltaba: los corpúsculos (electrones) poseían propiedades ondulatorias, en condiciones adecuadas.

A partir de estas ideas, DE BROGLIE explicaba los estados estacionarios de los electrones en los átomos, postulados por NIELS BOHR (1885-1962). Aunque el estudio completo de la estructura atómica se logró por las ideas de WERNER HEISENBERG (n. 1901) y ERWIN SCHRÖDINGER (1887-1961), creadores de la Mecánica Cuántica, al año siguiente. Posteriormente, PAUL ADRIEN MAURICE DIRAC (n. 1902) la perfeccionó.

Las últimas teorías de la interacción entre la materia y la radiación constituyen la Electrodinámica Cuántica, cuyos progresos se deben, en gran parte, a los trabajos de RICHARD P. FEYNMAN a partir de 1948. En esta teoría tenemos las reglas básicas para todos los fenómenos físicos ordinarios, excepto para la gravitación y los procesos nucleares.

13.2 Óptica geométrica. En Óptica existen gran número de fenómenos que intervienen en las aplicaciones prácticas más importantes y que pueden estudiarse, sin hacer ninguna hipótesis acerca de la naturaleza de la luz, partiendo de unos principios que permiten desarrollar dicho estudio de una manera puramente geométrica. Estos principios, admitidos por el hecho de que sus consecuencias vienen corroboradas por la experiencia, son los siguientes:

1.° Propagación rectilínea de la luz.
2.° Independencia de los rayos.
3.° Principio de Fermat.

En un medio homogéneo e isótropo, la luz se propaga en línea recta. Puede comprobarse con el siguiente experimento: Si disponemos de un manantial luminoso de reducidas proporciones (foco luminoso puntiforme), al interponer entre él y una pantalla un objeto opaco se obtiene una sombra determinada. Esta sombra coincide con la proyección del objeto sobre la pantalla, tomando como centro de proyección el punto donde está el foco luminoso. Los radios de proyección coinciden con los llamados *rayos luminosos* tangentes al contorno del objeto. Dichos rayos representan, pues, las direcciones de propagación de la luz, y para las necesidades de la Óptica geométrica los representaremos de manera gráfica por medio de líneas rectas. En definitiva, aquí el rayo no es más que una abstracción geométrica para representar una dirección en que se propaga la luz. Si en lugar de un objeto colocamos una pantalla con un orificio, tendremos un cono de luz o un haz de rayos que produce una mancha luminosa en la pantalla (la intersección del cono con la misma), lo cual comprueba de nuevo la propagación rectilínea. Si el orificio es muy pequeño, el haz es muy fino y puede considerarse como un rayo, aunque la realización práctica de éste es imposible, pues cuando el orificio es muy pequeño aparecen unos fenómenos (véase difracción en § 17.10) en donde no se cumple la propagación rectilínea. En este ejemplo se comprueba, además, la independencia de los rayos entre sí, ya que al eliminar ciertos rayos, los demás no están afectados por ellos; al acercar el objeto al foco luminoso, la sombra aumenta, debido a que eliminamos más rayos, pero no se afecta a la sombra anterior. Como veremos más adelante (interferencias, cap. 17), en algunas ocasiones unos rayos pueden actuar sobre otros.

El principio de Fermat puede expresarse diciendo que *el camino que sigue la luz entre dos puntos cualesquiera es tal, que el tiempo empleado en recorrerlo es máximo o mínimo respecto a los tiempos en que recorrería los caminos vecinos que unen dichos dos puntos.* A partir del principio de Fermat puede demostrarse el teorema de Malus, si bien este teorema es evidente en Óptica ondulatoria. Dicho teorema dice que *si un haz de rayos es normal a cierta superficie, después de cualquier número de reflexiones y refracciones se mantiene normal a otra superficie.*

13.3 Velocidad de la luz. La celeridad de la luz es tan elevada que se había considerado infinita hasta que GALILEO pretendió medirla determinando el tiempo empleado por ella en recorrer una distancia conocida. El resultado fue un fracaso, por lo cual GALILEO expresó que «si la propagación no es instantánea, es extraordinaria-

mente rápida». En 1675, el astrónomo danés OLE ROEMER (1644-1710) observó que los eclipses de los satélites de Júpiter sufrían un adelanto o retraso según que el citado planeta estuviera más cerca o más lejos de la Tierra. Considerando que la luz recorre mayor camino en el segundo caso que en el primero, encontró que la celeridad de la luz debía de ser de $2 \cdot 10^8$ m/s. La falta de precisión en algunos de los datos astronómicos es la causa de que este valor no coincida con el admitido en la actualidad.

En 1727, JAMES BRADLEY (1693-1762) usó otro método astronómico para determinar la celeridad de la luz. Habiendo descubierto la *aberración* de las estrellas fijas, es decir, el desplazamiento que parece que presentan en el sentido del movimiento de la Tierra, supuesto perpendicular a la línea de mira, encontró que la celeridad de la luz era $3 \cdot 10^8$ m/s.

La primera medida terrestre fue efectuada en 1849 por HIPPOLYTE LOUIS FIZEAU (1819-1896). Su método consistía en hacer pasar la luz por entre dos dientes de una rueda dentada, en la cual los dientes eran iguales a los huecos, reflejándose en un espejo y regresando a la rueda. Si la rueda gira, para que veamos luz, el tiempo transcurrido entre la ida y vuelta de la luz debe coincidir con el tiempo empleado por la rueda en girar un ángulo correspondiente a un diente o un múltiplo de dicho tiempo. Haciendo girar la rueda a celeridad creciente llegará un momento en que veremos luz. Conociendo el camino recorrido y el tiempo empleado por la rueda en girar un ángulo correspondiente a un diente, podemos determinar la celeridad de la luz. Sea n el número de dientes, N el número de vueltas por segundo, d la distancia de la rueda al espejo, y tendremos:

camino seguido por la luz $\quad s = 2\,d$

tiempo transcurrido $\quad t = \dfrac{1}{n\,N}$

celeridad de la luz $\quad c = \dfrac{2\,d}{t} = 2\,n\,N\,d$

El valor hallado por Fizeau fue $c = 3{,}13 \cdot 10^8$ m/s.

En 1862, JEAN BERNARD LÉON FOUCAULT (1819-1868), utilizando un método basado en un espejo giratorio, halló el valor $c = 2{,}98 \cdot 10^8$ m/s.

El método del espejo giratorio lo perfeccionó en 1880 ALBERT ABRAHAM MICHELSON (1852-1931). En esencia consiste en lo siguiente:

Un foco luminoso F manda un rayo sobre un espejo octogonal (fig. 13.1). Incide sobre la cara AB y, al reflejarse, sigue el camino ME.

En E (otro espejo) se refleja siguiendo el camino EN, vuelve a reflejarse en la cara CD y se observa con el anteojo O. Al girar el espejo octogonal, la luz se recibe en el anteojo si el tiempo invertido por la luz en el camino MEN es igual (o múltiplo) al tiempo empleado por el espejo octogonal en girar un octavo de vuelta. Sea N el número

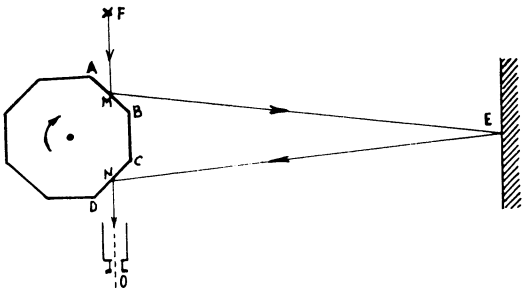


FIG. 13.1 Medida de la celeridad de la luz por el método de Michelson.

de revoluciones por segundo del espejo, $d = ME = EN$; el tiempo empleado por la luz en recorrer la distancia MEN es $2\,d/c$, y el tiempo que tarda el espejo en girar un cuarto de vuelta es $1/8\,N$; igualando los tiempos y despejando la celeridad de la luz c tenemos:

$$c = 16\,N\,d$$

El valor hallado (reducido al vacío) fue $c = 2{,}999 \cdot 10^8$ m/s.

Más adelante, los colaboradores de MICHELSON midieron la celeridad de propagación de la luz en un tubo de 1,5 km de longitud donde se había practicado el vacío y hallaron $c = 299\,796$ km/s.

Posteriormente se han utilizado distintos métodos para determinar la celeridad de la luz en el vacío con precisión cada vez mayor, de los cuales mencionamos los siguientes:

En 1941, ANDERSON, utilizando una célula Kerr, halló $c = 299\,776 \pm 14$ km/s.

En 1950, ESSEN, utilizando microondas, halló $c = 299\,792{,}5 \pm 3$ km/s.

En 1956, EDGE, con el método del geodímetro, halló $c = 299\,792{,}9 \pm 0{,}2$ km/s. El valor aceptado en la actualidad es $c = 299\,792{,}5$ km/s con un error inferior a $3 \cdot 10^{-4}$ %.

Hay que destacar que los valores de mayor precisión no son los de la celeridad de la luz visible sino los de las ondas electromagnéticas de longitud de onda muy corta, las cuales se propagan en el vacío con la misma celeridad que la luz. Ésta es una constante uni-

versal c que, según la teoría de la Relatividad, es la mayor celeridad posible en el mundo físico. Para usos prácticos puede tomarse $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. En los medios materiales, la luz se propaga con una celeridad inferior a la celeridad c en el vacío. A la relación entre la celeridad c en el vacío y la celeridad v en determinado medio se le llama índice de refracción absoluto de dicho medio y se escribe $n = c/v$. En un medio homogéneo e isótropo, n es constante. En un medio homogéneo anisótropo, el valor de n depende de la dirección de propagación. Si el medio no es homogéneo, el índice de refracción depende del punto del medio que se considere. Si no especificamos lo contrario, consideraremos medios homogéneos e isótropos.

El índice de refracción depende de la longitud de onda de la luz empleada (véase dispersión, pág. 350), de la temperatura y en los gases depende, además, de la presión. A continuación damos una tabla de índices de refracción relativos al aire (relación entre el índice absoluto y el del aire en condiciones normales). Generalmente los índices se dan para la luz amarilla de sodio ($\lambda = 5800$ Å).*

Líquidos (a 20°C)		Sólidos	
Aceite de cedro	1,515	Hielo	1,32
Acetona	1,359	Ámbar	1,546
Alcohol etílico	1,361	Ácido bórico	1,463
Alcohol metílico	1,329	Alcanfor	1,532
Benceno	1,501	Bálsamo del Canadá	1,530
Bromo	1,654	Diamante	2,417
Cloroformo	1,446	Vidrio de cuarzo	1,46
Glicerina	1,494	Vidrio crown ligero	1,515
Monobromuro de naftalina	1,658	Vidrio crown pesado	1,615
		Vidrio flint ligero	1,608
		Vidrio flint pesado	1,771

Índice de refracción absoluto de algunos gases en condiciones normales:

Aire	1,000292
Argón	1,000281
Helio	1,000036
Hidrógeno	1,000132
Oxígeno	1,000272

Índice de refracción, relativo al aire, del agua a distintas temperaturas:

t°C		t°C	
15°	1,3334	35°	1,3312
20°	1,3329	40°	1,3305
25°	1,3325	50°	1,3289
30°	1,3319	100°	1,3178

* Siempre, en Óptica geométrica, consideraremos luz monocromática y los índices serán los correspondientes a tal longitud de onda.

13.4 Consecuencias del principio de Fermat: reflexión y refracción. Supongamos un rayo luminoso que parte del punto P y llega al punto P' recorriendo la distancia s_1 en un medio de índice n_1, s_2 en uno de índice n_2, s_k en uno de índice n_k y así sucesivamente. Cada uno de los medios se supone homogéneo e isótropo, por lo que la celeridad de la luz en cada trayecto será constante $v_k = c/n_k$. El tiempo empleado por la luz en ir de P a P' será

$$t = \sum_k \frac{s_k}{v_k} = \frac{1}{c} \Sigma_k \, n_k \, s_k$$

a $\Sigma_k \, n_k \, s_k$ se le llama *camino óptico* y representa el camino que recorrería la luz en el vacío durante el mismo tiempo $\Sigma_k \, n_k \, s_k = c \, t$. A veces se representa el camino óptico por (PP').

Según el principio de Fermat, t debe ser mínimo o máximo, lo cual implica que $dt = 0$ ó, lo que es lo mismo, $d(PP') = 0$.

Sean dos medios de índices n_1 y n_2 (fig. 13.2) separados por cierta superficie. La luz que parte de P llega a la superficie de separación, parte se refleja y parte se transmite (o refracta). Aplicando el principio de Fermat vamos a determinar las leyes de la reflexión y de

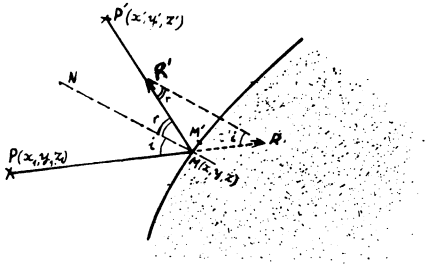


FIG. 13.2 Reflexión de la luz.

la refracción. Tomemos un sistema de coordenadas en el cual las coordenadas de P son (x_1, y_1, z_1), incide un rayo en cierto punto M (x, y, z) de la superficie de separación de los medios y llega al punto P' (x', y', z') del mismo medio, después de reflejarse. Haciendo $PM = s_1$ y $MP' = s'$, el camino óptico de P a P' es $n_1(s_1 + s')$ y, según el principio de Fermat, $n_1(ds_1 + ds') = 0$ y como n_1 es constante, debe ser

$$ds_1 + ds' = 0 \tag{13.1}$$

Físicamente, esto significa lo siguiente: Suponiendo que el camino PMP' es el camino que realmente sigue la luz para ir de P a P', si

variamos infinitamente poco dicho camino haciendo, por ejemplo, que incida en otro punto M' $(x + dx, y + dy, z + dz)$, infinitamente próximo a M, los caminos PM' y $M'P'$ han variado en ds_1 y ds' respectivamente y la suma de estas variaciones es nula (por ejemplo, uno se ha alargado y el otro se ha acortado en la misma pequeña longitud). Para hallar estas variaciones vamos a considerar PM y MP' como distancia entre dos puntos y escribimos:

$$\begin{aligned} s_1^2 &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \\ s'^2 &= (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \end{aligned} \tag{13.2}$$

diferenciando hallamos:

$$\begin{aligned} 2\, s_1\, ds_1 &= 2\,(x - x_1)\, dx + 2\,(y - y_1)\, dy + 2\,(z - z_1)\, dz \\ 2\, s'\, ds' &= -2\,(x' - x)\, dx - 2\,(y' - y)\, dy - 2\,(z' - z)\, dz \end{aligned}$$

la condición 13.1 da:

$$\left(\frac{x - x_1}{s_1} - \frac{x' - x}{s'}\right) dx + \left(\frac{y - y_1}{s_1} - \frac{y' - y}{s'}\right) dy + \\ + \left(\frac{z - z_1}{s_1} - \frac{z' - z}{s'}\right) dz \tag{13.3}$$

ahora bien,

$$\frac{x - x_1}{s_1} \quad \frac{y - y_1}{s_1} \quad \frac{z - z_1}{s_1}$$

son los cosenos directores de PM;

$$\frac{x - x'}{s'} \quad \frac{y - y'}{s'} \quad \frac{z - z'}{s'}$$

los de MP', a quienes llamaremos α_1, β_1, γ_1 y α', β', γ' respectivamente, con lo que 13.3 se escribe

$$(\alpha_1 - \alpha')\, dx + (\beta_1 - \beta')\, dy + (\gamma_1 - \gamma')\, dz = 0 \tag{13.4}$$

α_1, β_1, γ_1, pueden considerarse las componentes del vector **MR** de módulo unidad en la dirección PM; α', β', γ' las del **MR'** de módulo unidad y dirección MP' (fig. 13.2), y dx, dy, dz las del vector $\mathbf{dl} = \mathbf{MM'}$ sobre la superficie. La ecuación 13.4 se expresa vectorialmente

$$(\mathbf{MR} - \mathbf{MR'}) \cdot \mathbf{dl} = 0 \quad \text{o bien} \quad \mathbf{R'R} \cdot \mathbf{dl} = 0$$

que es la condición de perpendicularidad de **R′R** a dl. Como dl está sobre la superficie y su extremo M' puede ser cualquier punto de la misma, inmediato a M, **R′R** tiene la misma dirección que la normal NM a la superficie en M.

De la figura 13.2 deducimos que, siendo **RR′** paralelo a **NM**, los ángulos PMN y MRR' son iguales, lo mismo que NMR' y el $MR'R$, y como el triángulo MRR' es isósceles, llegamos a la conclusión de que $PMN = NMR'$. Además, **MN** y **RR′** determinan un plano que contiene a PR y MP' por tener cada una de estas rectas dos puntos comunes con dicho plano, así que podemos enunciar las dos leyes de la reflexión:

El rayo incidente, el reflejado y la normal están contenidos en un mismo plano.

El ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales.

Vamos a considerar ahora la *refracción*. El rayo PM se transmite al segundo medio, y siendo el índice de éste distinto del índice del primero, se propagará con velocidad distinta. Experimentalmente se comprueba que cambia bruscamente de dirección, lo cual demostra-

FIG. 13.3 Refracción de la luz.

remos siguiendo un camino análogo al anterior. Sea MQ el camino que sigue el rayo PM en el segundo medio (fig. 13.3). Llamando s_2 a MQ y siendo x_2, y_2, z_2 las coordenadas de Q tenemos:

$$s_2^2 = (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2$$

$$ds_2 = -\frac{x_2 - x}{s_2}\,dx - \frac{y_2 - y}{s_2}\,dy - \frac{z_2 - z}{s_2}\,dz \qquad (13.5)$$

Siendo n_1 y n_2 distintos, la expresión analítica del principio de Fermat será

$$n_1\,ds_1 + n_2\,ds_2 = 0 \qquad (13.6)$$

teniendo en cuenta que

$$\frac{x_2 - x}{s_2} \qquad \frac{y_2 - y}{s_2} \qquad \frac{z_2 - z}{s_2}$$

son los cosenos directores de MQ, a los que llamamos α_2, β_2, γ_2, la ecuación 13.6 se escribe

$$(n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2)\, dx + (n_1 \beta_1 - n_2 \beta_2)\, dy + (n_1 \gamma_1 - n_2 \gamma_2)\, dz = 0 \qquad (13.7)$$

Tomando los vectores **MT** de módulo n_1 y **MT'** de módulo n_2, la condición 13.7 se puede escribir

$$(\mathbf{MT} - \mathbf{MT'}) \cdot \mathbf{dl} = 0 \quad \text{o bien} \quad \mathbf{TT'} \cdot \mathbf{dl} = 0$$

que es la condición de perpendicularidad y razonando como en el caso anterior, **TT'** debe ser paralelo a la normal **NM** a la superficie en M. Llamando θ al ángulo que forma MQ con la normal NN' (ángulo de refracción) que es igual a $MT'T$ y que PMN es el suplementario de MTT', del triángulo MTT' deducimos

$$MT'/\text{sen } i = MT/\text{sen } \theta \qquad MT/MT' = \text{sen } \theta/\text{sen } i$$

como $MT = n_1$ y $MT' = n_2$ tenemos

$$\text{sen } i/\text{sen } \theta = n_2/n_1 \qquad (13.8)$$

Por un razonamiento análogo al anterior se deduce que PM, MQ y la normal están contenidos en el mismo plano, que junto con la ecuación 13.8 constituyen las leyes de la refracción:

El rayo incidente, el refractado y la normal en el punto de incidencia están contenidos en un mismo plano.

El cociente entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción es igual a la razón del índice de refracción del segundo medio al del primero.

De la definición de índice de refracción se deduce que $n_2/n_1 = v_1/v_2$, siendo v_1 y v_2 las celeridades en los medios 1 y 2 respectivamente. Al cociente n_2/n_1 se llama índice de refracción del segundo medio relativo al primero. De esta ley se deduce que si el segundo medio tiene un índice superior al del primero, el rayo refractado se acerca a la normal; en caso contrario, se aleja de ella. Efectivamente, despejando sen θ de la ecuación 13.8

$$\text{sen } \theta = \frac{n_1}{n_2} \text{ sen } i \tag{13.9}$$

si n_2 es mayor que n_1, sen θ es inferior a sen i, o sea, $\theta < i$.

13.5 Angulo límite y reflexión total. Si $n_2 > n_1$, para cualquier valor de i existe θ, siendo su valor máximo cuando el rayo incidente es rasante. En tal caso, $i = 90°$ y

$$\theta_M = \text{arc sen } (n_1/n_2) \tag{13-10}$$

En el caso de que $n_1 > n_2$, sen $\theta >$ sen i y θ se mantiene siempre mayor que i, el valor máximo de θ es 90°, que corresponde al valor de (n_1/n_2) sen $i = 1$, es decir, sen $i = n_2/n_1$. Al valor del ángulo de incidencia

$$i_L = \text{arc sen } n_2/n_1 \tag{13.11}$$

para el cual el ángulo de refracción es de 90° (emergencia rasante) se le llama *ángulo límite*. Puede observarse que este valor coincide con el θ_M de la ecuación 13.10. Basta considerar los medios invertidos, 1 en lugar de 2, y 2 en vez de 1, ya que entonces estamos en el caso anterior.

Para valores de i mayores que el ángulo límite no tenemos rayo emergente y el rayo incidente se refleja en la superficie de separación de los dos medios. A este fenómeno se le llama *reflexión total* y toda la energía luminosa del rayo incidente se mantiene en el reflejado totalmente, cosa que no ocurre en la reflexión de un rayo en la superficie de separación de dos medios cualesquiera, ya que siempre hay cierta cantidad de energía que se transmite en el rayo refractado que acompaña al reflejado.

Este fenómeno se presta a numerosas aplicaciones, alguna de las cuales veremos. Una de las más recientes es la de la transmisión de luz a lo largo de una fibra transparente * o fibra óptica. Una fibra única sirve solamente para conducir luz, pero reuniendo muchas fibras delgadas, formando un haz, podemos transmitir imágenes. Cada una de las fibras individuales transmiten una pequeña porción de la imagen. La luz que penetra en la fibra lo hace de manera que va experimentando sucesivas reflexiones totales y no sale de dicha fibra hasta llegar al extremo de ella. Si el diámetro de la fibra es muy pequeño, la propagación de la luz se estudia usando la teoría electromagnética de la propagación de ondas en las guías de onda, un nuevo hecho que viene a apoyar la teoría electromagnética de la luz.

* Véase *Advanced Optical Techniques*, cap. 11 (Fiber Optics), Edit, Van Heel, Amsterdam 1967.

Ejemplo. Una fibra óptica cilíndrica homogénea de índice de refracción N está situada en un medio de índice n. Calcular el valor máximo de la inclinación de un rayo incidente con respecto al eje longitudinal de la fibra para que la luz se transmita a lo largo de ella. De la figura 13.4 deducimos que para

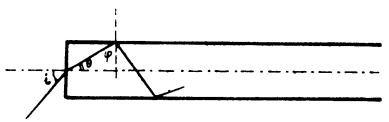


FIG. 13.4 Transmisión de luz por una fibra óptica.

que la propagación tenga lugar, el ángulo debe ser superior al ángulo límite; o sea, sen $\varphi_L = n/N$. De la ley de la refracción

$$\text{sen } i = (N/n) \text{ sen } \theta \qquad \text{y como} \qquad \text{sen } \varphi = \cos \theta$$

tenemos

$$\text{sen } \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - n^2/N^2}$$

luego

$$\text{sen } i_m = N/n \sqrt{1 - n^2/N^2} = \sqrt{N^2/n^2 - 1}$$

El valor máximo de la inclinación deseada será $i_m = \text{arc sen } \sqrt{N^2/n^2 - 1}$.

CAJA DE AHORROS DE ALICANTE Y MURCIA
BIBLIOTECA GABRIEL MIRÓ
ALICANTE

14

Sistemas ópticos

14.1 Dioptrios. Se llama sistema óptico a un conjunto de medios transparentes y homogéneos separados por superficies de forma geométrica sencilla. Si un sistema óptico no posee superficies reflectoras se llama *dioptrio*. Si la superficie de separación de los dos medios es un plano, al dioptrio se le llama dioptrio plano; si la superficie fuese una esfera, el dioptrio sería esférico.

Antes de iniciar el estudio de los dioptrios vamos a dar unas ideas generales acerca de las imágenes producidas por un sistema óptico.

Un punto luminoso manda rayos en todas direcciones. Si un haz de rayos que parte del citado punto atraviesa un sistema óptico, la trayectoria de los rayos sufre cambios de dirección que podemos determinar. Supongamos un haz de rayos que parte de un punto P (fig. 14.1 *a*); si después de haber atravesado el sistema óptico S dicho haz converge en un punto P', este punto es la *imagen real* de P. Si el

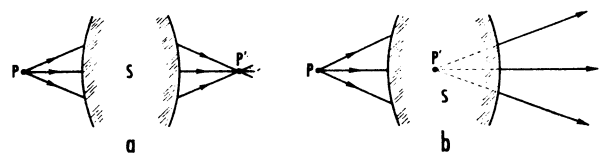


FIG. 14.1 Formación de una imagen: *a*) real, y *b*) virtual.

haz que parte de P después de atravesar el sistema S forma un haz de rayos divergentes, de modo que sus prolongaciones converjan en P' (fig. 14.1 *b*), dicho punto P' es la *imagen virtual* de P.

Un observador situado dentro del haz de rayos vería lo mismo una imagen real que una virtual; pero si colocamos una pantalla adecuada, sólo se formará sobre ella una imagen real y no una virtual.

Si interponemos otro sistema óptico entre S y P', el haz de rayos debido al nuevo sistema no nos formará la imagen en el mismo punto

que antes; el haz de rayos puede converger en otro punto o diverger y dar una imagen virtual. Como la prolongación de los rayos de entrada al nuevo sistema convergen en P' (punto imagen en ausencia del nuevo sistema), al punto P' se le llama punto *objeto virtual* respecto a dicho nuevo sistema óptico.

En la figura 14.2 representamos tres sistemas ópticos, S_1, S_2 y S_3. Un punto luminoso P produce una imagen P' al atravesar S_1, que es virtual, siendo un punto luminoso real respecto a S_2, el cual da una imagen real P'', que es un punto luminoso virtual respecto a S_3, el cual da una imagen real P'''. El conjunto de los tres sistemas nos proporciona una imagen real P''' de P.

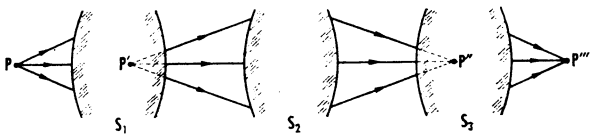


FIG. 14.2 Combinación de tres sistemas ópticos.

Suponiendo que la luz se propaga de izquierda a derecha, el espacio antes de la superficie que limita el dioptrio por donde entra la luz se llama *espacio objeto real.* El espacio a partir de dicha superficie se llama *espacio objeto virtual.*

Al espacio a partir de la superficie que limita el sistema óptico por donde sale la luz que lo ha atravesado se llama *espacio imagen real,* y al espacio anterior a la citada superficie *espacio imagen virtual.* Las imágenes reales se forman en el espacio imagen real, y las virtuales en el espacio imagen virtual.

Un sistema óptico se dice que es *estigmático* cuando la imagen, real o virtual, de un punto es otro punto; o sea, cualquier haz de rayos que parte de un punto, después de atravesar un sistema óptico estigmático converge (los rayos o sus prolongaciones) en un punto. Si la luz parte del segundo punto nos dará como imagen el primer punto. A esta propiedad se le llama *principio del retorno inverso* de los rayos. Estos dos puntos se llaman *conjugados* respecto al sistema. Se demuestra que la condición de estigmatismo equivale a decir que el camino óptico punto luminoso-imagen sea constante, para cualquier rayo que parta de dicho punto. En un sistema óptico estigmático, para hallar la imagen de un punto basta trazar dos rayos que partan del mismo y encontrar su punto de intersección después de atravesar el sistema.

Finalmente, vamos a dar una regla para los signos que hay que

atribuir a los ángulos y distancias para el estudio analítico de la marcha de la luz en los dioptrios. Adoptaremos el convenio de signos DIN. Las distancias se cuentan positivamente en el sentido de propagación de la luz, tomando un origen determinado, el cual supondremos que es de izquierda a derecha. La distancia de un punto al eje principal (eje de simetría del dioptrio) es positiva si el punto está en la parte superior, negativa si está en la inferior. El ángulo formado por un rayo luminoso y una recta es positivo cuando para hacer coincidir la recta con el rayo, según el menor ángulo, el sentido de giro sea el de las agujas de un reloj. En los dioptrios esféricos, el radio del dioptrio se toma positivo si el centro está a la derecha de la superficie esférica y negativo en caso contrario.

14.2 Dioptrio esférico. Dos medios transparentes de distinto índice de refracción separados por una superficie esférica constituyen un *dioptrio esférico.* El centro de la esfera y su radio son el *centro* y el *radio* del dioptrio. Generalmente el dioptrio es un casquete esférico, su eje de simetría es el eje principal del dioptrio, la intersección de dicho eje con la superficie es el *polo* o *vértice* del dioptrio. Toda recta que pasando por el centro corta a la superficie se llama *eje secundario.* Un plano que pase por el eje determina una *sección principal.* Todo rayo que tenga la misma dirección que un eje principal o secundario es normal a la superficie y no sufre desviación; por tanto, tales rayos pasarán siempre por el centro.

Sea (fig. 14.3) un dioptrio esférico de centro C, radio R y vértice O. El índice de refracción del medio de la izquierda es n y el de la derecha n'. Un punto luminoso P sobre el eje principal manda un rayo PI que se refracta siguiendo el camino IP'; suponemos, en la figura 14.3, $n' > n$; por lo tanto, el rayo IP se aproxima a la nor-

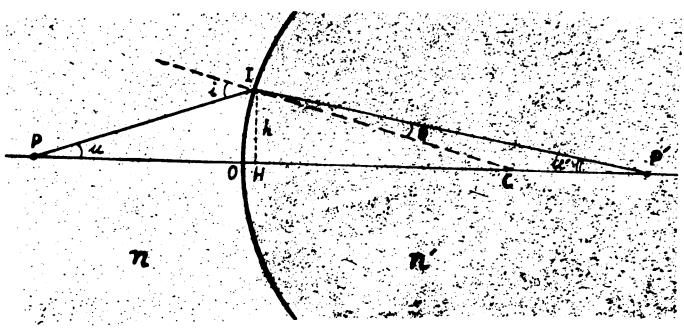


FIG. 14.3 Dioptrio esférico.

mal IC a la superficie en I. Dado que un rayo que parte de P siguiendo el eje principal no se desvía, el punto P' intersección del rayo refractado en I y el eje, será la imagen de P si se cumplen determinadas condiciones de estigmatismo. Los puntos P y P' serán conjugados con respecto a este dioptrio.

Según hemos visto en § 13.4, el vector de componentes $n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2$, $n_1\beta_1 - n_2\beta_2$, $n_1\gamma_1 - n_2\gamma_2$ ha de ser paralelo a la normal en el punto de incidencia. En nuestro caso, $n_1 = n$ y $n_2 = n'$; los cosenos directores de la normal son los de IC, a los cuales llamamos N_1, N_2, N_3, con lo que la condición de paralelismo la podemos escribir:

$$\frac{n\alpha_1 - n'\alpha_2}{N_1} = \frac{n\beta_1 - n'\beta_2}{N_2} = \frac{n\gamma_1 - n'\gamma_2}{N_3} \qquad (14.1)$$

considerando el plano determinado por P, I y P' (plano del papel), la normal IC debe hallarse en este mismo plano (primera ley de la refracción). Tomando como eje 1 el PP' y como 2 el vertical que pasa por O, trabajaremos en el plano PIP', sección principal, y podemos prescindir de la componente 3. Del dibujo deducimos los valores de los cosenos directores:

$$\alpha_1 = \cos u = PH/PI \qquad \beta_1 = -\operatorname{sen} u = -h/PI$$
$$\alpha_2 = \cos u' = HP/IP' \qquad \beta_2 = \operatorname{sen} u' = h/IP'$$
$$N_1 = HC/R \qquad N_2 = h/R$$

Si nos limitamos a rayos poco inclinados respecto al eje (rayos paraxiales), el ángulo u es pequeño y lo mismo el u', con lo que podemos tomar $PI \simeq PO \simeq PH$; $IP' \simeq HP' \simeq OP'$.

Si tomamos como centro de coordenadas el punto O y llamamos x a la abscisa de P, x' a la de P', tendremos

$$PO = -x \text{ (por estar a la izquierda de } O)$$
$$OP' = x'$$
$$\beta_1 = \frac{-h}{-x} = \frac{h}{x} \qquad \beta_2 = \frac{h}{x'}$$

además $$\alpha_1 = \alpha_2 = N_1 = 1$$

nos queda la relación (14.1) reducida a

$$n - n' = \frac{n\dfrac{h}{x} - n'\dfrac{h}{x'}}{h/R} = R\left(\frac{n}{x} - \frac{n'}{x'}\right)$$

o bien
$$\frac{n}{x} - \frac{n'}{x'} = \frac{n - n'}{R} \tag{14.2}$$

que es la *fórmula de Gauss* para el dioptrio esférico para incidencia paraxial. En este caso, el estigmatismo es perfecto, pues la posición de P', imagen de P, no depende de la inclinación de los rayos que parten de P. Cualquier rayo que parta de P, después de atravesar la superficie de la esfera, irá a parar a P'. Si en lugar de ser P un punto luminoso es un objeto del cual queremos formar su imagen, para que ocurra lo que hemos indicado, éste deberá tener pequeñas dimensiones y los rayos que de él partan hacia el dioptrio deberán ser paraxiales.

Supongamos que llega al dioptrio un haz estrecho de rayos paralelos al eje principal. P está en el infinito, a su imagen P' se le llama *foco imagen* F' del dioptrio y a su correspondiente abscisa f' *distancia focal imagen*. De la ecuación 14.2 deducimos, haciendo $x = \infty$, que

$$-n'/f' = (n - n')/R, \quad f' = \frac{n'}{n' - n} R \tag{14.3}$$

Si $R > 0$ y $n' > n$, $f' > 0$ y F' está a la derecha de O. Si $f' < 0$, el foco imagen es virtual, los rayos divergen y sus prolongaciones convergen en dicho foco.

Un punto F situado sobre el eje principal, a una distancia f del vértice O, tal que un haz estrecho de rayos que parta de él dé lugar a un haz de rayos paralelos al eje principal, después de atravesar la superficie del dioptrio, recibe el nombre de *foco objeto* y a f se le llama *distancia focal objeto*. Haciendo $x' = \infty$ en la ecuación 14.2, tenemos

$$n/f = (n - n')/R, \quad f = -\frac{n}{n' - n} R \tag{14.4}$$

Si $R > 0$ y $n' > n$, $f < 0$, o sea, el foco objeto está a la izquierda de O. Si fuese $f > 0$, sería un foco objeto virtual.

Dividiendo las ecuaciones 14.3 y 14.4 tenemos

$$f/f' = -n/n' \tag{14.5}$$

el cociente entre las distancias focales es negativo, los focos están a un lado y a otro de O y los valores de las distancias focales objeto e imagen son directamente proporcionales a los índices de refracción del medio en los espacios objeto e imagen, respectivamente. Si sumamos las ecuaciones 14.3 y 14.4 obtenemos

$$f + f' = R \tag{14.6}$$

como f y f' son de signo contrario, deducimos que cuanto mayor sea R, mayor será la diferencia entre los valores absolutos de las distancias focales.

En la ecuación 14.2, dividiendo los dos miembros por n' tenemos

$$\frac{n/n'}{x} - \frac{1}{x'} = \frac{n/n' - 1}{R}$$

sustituyendo el valor de n/n' por su valor dado por la ecuación 14.5 hallamos

$$\frac{-f/f'}{x} - \frac{1}{x'} = \frac{-f/f' - 1}{R}$$

o bien $f/x + f'/x' = (f + f')/R$, pero de la ecuación 14.6 resulta

$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1 \tag{14.7}$$

que es la fórmula del dioptrio esférico en función de las distancias focales, en la aproximación de Gauss. Es decir, para rayos paraxiales.

Conocida la posición de un punto (objeto) distante x del vértice, podemos hallar su conjugado (imagen) distante x' de O, despejando x' de la ecuación 14.7

$$x' = \frac{f'}{x - f}\, x \tag{14.8}$$

De aquí deducimos que si $x = 0$, $x' = 0$ y el punto O es la imagen de sí mismo. Si x está a la izquierda de O y lo mismo F, de la ecuación 14.8 resulta

$$x' = \frac{f'}{-x + f}(-x) = \frac{f'}{x - f}\, x$$

la fórmula es la misma y puede aplicarse usando los valores absolutos de x.

Si P está a la izquierda de F, $x' > 0$ y P' estará a la derecha de F'. Si P se aleja de F por la izquierda, P' se aproxima a F' por la derecha. Cuando P está comprendido entre F y O, x' es negativo (imagen virtual).

Si deseamos encontrar la imagen gráficamente, basta dibujar un rayo que parta del extremo del objeto y sea paralelo al eje principal,

el cual después de refractado pasará por el foco imagen. Después, uno que partiendo del mismo punto pase por el centro; el cual no se desvía. En el punto de intersección de estos dos rayos tendremos la imagen del punto de partida de los mismos. Si el objeto es un segmento vertical, como todos los puntos que tienen la misma abscisa dan una imagen en la cual todos tienen la misma abscisa, bastará trazar la perpendicular al eje desde el punto imagen hallado (fig. 14.4).

FIG. 14.4 Construcción de la imagen en un dioptrio esférico.

Vamos a definir el *aumento lateral* y el *aumento angular*. Sea un objeto pequeño, perpendicular al eje principal, de altura $y = PA$ (figura 14.5). La imagen de P será P' y la de A será A'. En la aproximación de Gauss, y por lo que hemos dicho en la construcción gráfica, $P'A'$ será paralela a PA y a la distancia $P'A'$ le llamaremos y', es decir, y es la altura del objeto e y' la de la imagen.

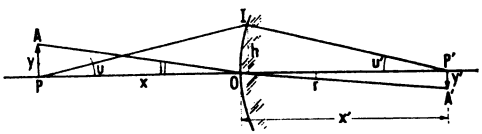


FIG. 14.5 Aumentos en el dioptrio esférico.

Desde P mandamos un rayo PI paraxial que corta al eje principal en P' imagen de P. Desde A mandamos un rayo que pase por O, el cual forma un ángulo i con el eje principal (normal a la esfera); el ángulo de refracción será θ, el rayo refractado OA', la imagen de PA será $P'A'$, siendo el segmento AP paralelo a $P'A'$, por lo antes indicado.

Se llama *aumento lateral* a la relación $\beta = P'A'/PA$. De la figura 14.5 deducimos:

$$PA = y = (-x)\ \text{tg}\ i = -x\ \text{sen}\ i \quad \text{(por ser } i \text{ pequeño)}$$
$$P'A' = -y' = -x'\ \text{tg}\ \theta = -x'\ \text{sen}\ \theta$$

así, pues,
$$\beta = \frac{x'}{x}\,\frac{\text{sen}\ \theta}{\text{sen}\ i} = \frac{x'}{x}\,\frac{n}{n'} = -\frac{f\,x'}{f'\,x} \qquad (14.9)$$

$\beta > 0$ si y e y' son del mismo signo (objeto e imagen derechos); $\beta < 0$ si y e y' son de signo contrario (objeto derecho, imagen invertida o viceversa).

De la ecuación 14.8, $x'/x = f'/(x - f)$, y sustituyendo en la ecuación 14.9,

$$\beta = -\frac{f}{f'}\frac{f'}{x-f} = \frac{-f}{x-f} = \frac{1}{1-x/f} \tag{14.10}$$

para foco objeto real ($f < 0$) y x en el espacio objeto ($x < 0$) podemos trabajar con valores absolutos. El aumento lateral es positivo si el objeto está entre el foco objeto y el vértice. En este caso, en el que ya sabemos que la imagen es virtual, ésta será derecha y mayor. Caso de que el objeto esté a la izquierda de F, $\beta < 0$ y la imagen es invertida. En este mismo caso, si el objeto está situado entre el foco y un punto a una distancia del vértice doble que la distancia focal, la imagen será mayor que el objeto (aumento superior a la unidad, en valor absoluto). De manera análoga discutiríamos el caso en que $f > 0$ o que $x > 0$.

Se llama aumento angular γ al cociente entre las tangentes de los ángulos que forman con el eje dos rayos conjugados. Sea el rayo PI y su conjugado IP' (fig. 14.5), que forman con el eje los ángulos u y u', respectivamente. De la figura se deduce que

$$\text{tg } (-u) = h/-x \qquad \text{tg } u' = h/x'$$

$$\gamma = \frac{\text{tg } u'}{\text{tg } u} = \frac{x}{x'} \tag{14.11}$$

En la aproximación de Gauss

$$\gamma = \frac{u'}{u} = \frac{x}{x'} \tag{14.12}$$

Recordando el valor del aumento lateral

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{x}\frac{n}{n'}$$

y sustituyendo el valor de x/x' dado por la ecuación 14.12, tenemos:

$$\frac{y'}{y} = \frac{u}{u'}\frac{n}{n'}$$

de donde

$$n'\,u'\,y' = n\,u\,y \tag{14.13}$$

Esta ecuación 14.13 nos expresa la invariancia del producto $n\,u\,y$ en los dos medios y se llama *invariante de Helmholtz*. Si tenemos distintos dioptrios de índices n_1, n_2, ..., n_k, se verifica:

$$n_1\,y_1\,u_1 = n_2\,y_2\,u_2 = \ldots = n_k\,y_k\,u_k \tag{14.14}$$

14.3 Dioptrio plano. Dos medios de distinto índice de refracción separados por una superficie plana constituyen un *dioptrio plano*. Es un caso particular de dioptrio esférico cuya esfera tenga radio infinito. La ecuación del dioptrio plano, es decir, la que nos permite

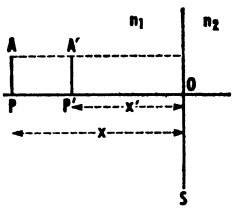


FIG. 14.6 Dioptrio plano.

encontrar la imagen de un punto, en la aproximación de Gauss, es la dada por la ecuación 14.12, en la que hagamos $R = \infty$, con lo que se convierte en

$$\frac{n_1}{x} - \frac{n_2}{x'} = 0 \tag{14.15}$$

o bien

$$x' = \frac{n_2}{n_1}\,x \tag{14.16}$$

de donde se deduce que si el objeto está a la izquierda del plano de separación de los dos medios (fig. 14.6), $x < 0$, la imagen estará también a la izquierda, $x' < 0$, lo cual indica que será *virtual*, pues se forma en el espacio objeto. Lo mismo podemos decir si el objeto está a la derecha.

El aumento lateral

$$\beta = \frac{n_1\,x'}{n_2\,x} = 1$$

En definitiva, las imágenes producidas por un dioptrio plano, en la aproximación de Gauss, son *virtuales, derechas* y *del mismo tamaño* que el objeto.

Si el ángulo de incidencia no es pequeño, x' depende del ángulo de incidencia, no tendremos estigmatismo perfecto y las imágenes no serán nítidas.

Ejercicio. Tenemos una varilla de vidrio que termina en un hemisferio de 1 cm de radio. El índice de refracción del vidrio es 1,5. Un punto luminoso se desplaza a lo largo del eje de simetría; hállese en cada instante la posición de la imagen y el correspondiente aumento lateral y represéntese gráficamente la posición de la imagen y dicho aumento en función de la posición del punto luminoso.

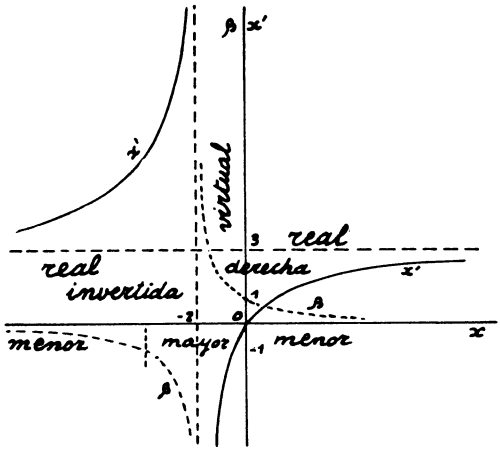


FIG. 14.7

Primero calculamos las distancias focales, aplicando las ecuaciones 14.3 y 14.4 y encontramos $f' = 3$ cm y $f = -2$ cm.

Aplicando la ecuación 14.8 hallamos x' y aplicando la ecuación 14.10 hallamos el aumento lateral β. Los valores obtenidos los expresamos en la tabla adjunta y la gráfica correspondiente la dibujamos a continuación:

x	x'	β
$-\infty$	3	0
−10	3,75	−0,25
−6	4,5	−0,5
−3	9	−2
−2	∞	∞
−1	−3	2
0	0	1
1	1	0,67
2	1,5	0,5
4	2	0,33

En la figura 14.7 se indican las regiones donde la imagen es real ($x' > 0$), virtual ($x' < 0$), derecha ($\beta > 0$), invertida ($\beta < 0$), mayor ($\beta > 1$) y menor que el objeto ($\beta < 1$).

Ejemplo. Un observador A situado a una altura de 1 m por encima de la superficie del agua de una piscina de 1 m de profundidad, ve un punto lumi-

noso situado en el fondo. El rayo que recibe forma un ángulo de 45° con la vertical; hállese la profundidad aparente, para el observador, de dicho punto y a qué distancia está del pie de la vertical del observador. El índice de refracción del agua respecto al aire es $n = 4/3$.

En este caso el ángulo de incidencia no es pequeño (el de refracción es de 45°) y no podemos aplicar lo dicho para los dioptrios planos para incidencia pequeña (fig. 14.8).

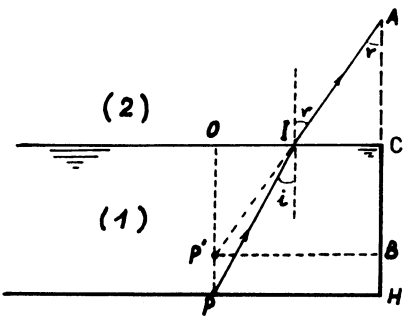


FIG. 14.8

Sea P el punto luminoso, el observador lo verá en P'. De la figura deducimos:

$$PO = OI \text{ ctg } i$$
$$P'O = OI \text{ ctg } r$$

dividiendo y despejando $P'O$ resulta

$$P'O = PO \frac{\text{ctg } r}{\text{ctg } i} = PO \frac{\cos r}{\cos i} \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r}$$

pero sen i/sen $r = n_2/n_1 = 1/n$, siendo n el índice del agua respecto al aire. Además,

$$\cos i = \sqrt{1 - \text{sen}^2 i} = \sqrt{1 - \frac{\text{sen}^2 r}{n^2}}$$

luego

$$P'O = \frac{PO}{n} \frac{\cos r}{\sqrt{1 - \frac{\text{sen}^2 r}{n^2}}} = \frac{PO \cos r}{\sqrt{n^2 - \text{sen}^2 r}}$$

En nuestro caso, $PO = 1$ m, $n = 4/3$, $\cos r = \text{sen } r = 1/\sqrt{2}$ y sustituyendo

$$P'O = 3/\sqrt{23} = 0{,}625 \text{ m}$$

La distancia $PH = P'B = AB \text{ tg } r = (AC + CB) \text{ tg } 45° = 1{,}625$ m. Si el punto luminoso fuese el punto H, la imagen de él que percibiría el observador estaría a una profundidad $OP/n = 0{,}75$ m; cuanto mayor sea r menor será la profundidad a que se vea.

14.4 Marcha de la luz a través de una lámina de caras paralelas e imágenes producidas. Una lámina de caras paralelas es un medio transparente homogéneo limitado por dos caras planas y paralelas. Supondremos dicha lámina rodeada por un mismo medio a un lado y otro de sus caras. Sea n el índice de refracción relativo de la lámina respecto al medio que la rodea. Un rayo incidente AO se refracta al pasar dentro de la lámina siguiendo el camino OO' (fig. 14.9 *a*). Al llegar a O' se refracta de nuevo y sigue el camino $O'A'$. Aplicando la ley de la refracción al rayo incidente AO y al refractado OO', tenemos sen i/sen $r = n$. Aplicando dicha ley a la segunda refracción

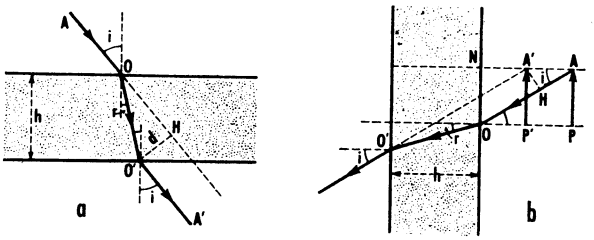


FIG. 14.9 Lámina de caras planas y paralelas.

tenemos sen r'/sen $i' = 1/n$; como r y el ángulo r' que forma OO' son iguales, por alternos internos, deberá ser el ángulo $i = i'$. De aquí deducimos que el rayo OA' debe ser paralelo al incidente AO.

Si el rayo incidente fuese el $A'O'$, el rayo emergente sería el OA, debido a la igualdad de ángulos, tal como hemos visto. Esto puede considerarse una comprobación experimental del principio de retorno de los rayos luminosos.

El rayo emergente es paralelo al incidente, pero desplazado lateralmente. A la distancia entre estos dos rayos paralelos le llamaremos desplazamiento lateral d.

Para calcular d utilizaremos el triángulo OHO' (fig. 14.9 *a*):

$$d = OO' \text{ sen } \widehat{O'OH} = \frac{h}{\cos r} \text{ sen } (i - r)$$

Este desplazamiento lateral vemos que es directamente proporcional al espesor h de la lámina y varía de 0 a h cuando i varía de 0 a 90° [$i = 90°$, sen $(i - r) = \cos r$].

Sea el objeto AP (fig. 14.9 *b*). La imagen de P está sobre la recta PO y la de A sobre la recta AN. Trazando el rayo AO vemos en la figura 14.9 *b* que el rayo emergente corta al AN en el punto A'

(imagen del A) situado de AP a la distancia AA', que vamos a determinar. Del triángulo AHA' deducimos $AA' = A'H/\text{sen } i$; pero $A'H$ es el desplazamiento lateral

$$d = \frac{h}{\cos r} \text{ sen } (i - r)$$

así pues,

$$AA' = \frac{h \text{ (sen } i \cos r - \cos i \text{ sen } r)}{\text{sen } i \cos r} = h \left(1 - \frac{\text{tg } r}{\text{tg } i}\right)$$

Si i es pequeño,

$$\text{tg } i \simeq \text{sen } i \qquad \text{tg } r \simeq \text{sen } r$$

luego

$$\frac{\text{tg } i}{\text{tg } r} \simeq \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = n$$

con lo que

$$AA' = h \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Otro punto del objeto formaría su imagen a la misma distancia, luego la imagen es paralela al objeto (para incidencia pequeña). La imagen es *virtual, igual* al objeto y situada en el espacio objeto, y dista de tal objeto la longitud AA' dada anteriormente.

14.5 Marcha de la luz a través de un prisma. Un prisma es un medio transparente limitado por dos dioptrios planos, llamados caras, que se cortan en la arista del prisma. Cortando el prisma por un plano normal a la arista (fig. 14.10) obtenemos la sección principal CBB'. El ángulo determinado por BC y $B'C$ se llama *ángulo del prisma* o *ángulo refringente.*

Consideremos un prisma de índice de refracción n respecto al medio que le rodea (que supondremos es aire) y cuyo ángulo refrinfente es α. Para determinar la marcha de la luz a través de dicho prisma, consideremos un rayo luminoso en el plano que contiene a la sección principal. Sea RI el rayo incidente (fig. 14.11) contenido en el plano de la sección principal CBB' (plano de la figura). RI forma con la normal un ángulo i (ángulo de incidencia). Al penetrar en el prisma en I se refracta siguiendo el camino IE, que forma el ángulo r con la normal al prisma en I. Al llegar al punto E de la otra cara, se refracta de nuevo, siguiendo el camino ER' (rayo emergente), que forma con la normal NE en E un ángulo e (ángulo de emergencia). El rayo $RIER'$ se mantiene siempre en el plano de la figura, según las leyes de la refracción.

Se llama *desviación* al ángulo formado por el rayo incidente y el emergente. En la figura, la desviación es el ángulo δ. Conociendo n

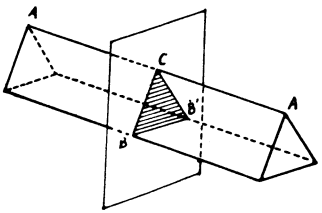


FIG. 14.10 Prisma.

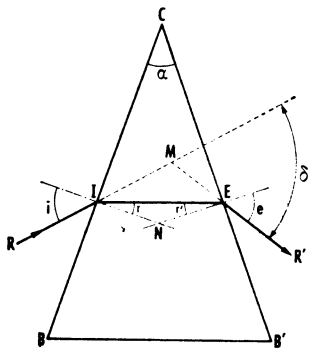


FIG. 14.11 Marcha de un rayo en un prisma.

y α podemos determinar la marcha de un rayo a través del prisma, para cualquier i. De la figura deducimos:

$$r + r' = 180° - \widehat{INE}$$

pero $$\widehat{INE} = 180° - \alpha$$

luego $$r + r' = \alpha$$

Para hallar r conociendo i aplicamos 13.9, que ahora escribimos:

$$\text{sen } r = \frac{1}{n} \text{ sen } i \qquad r' = \alpha - r \qquad \text{sen } e = n \text{ sen } r' = n \text{ sen } (\alpha - r)$$

La desviación dada por el ángulo

$$\delta = \widehat{MIE} + \widehat{MEI} = i - r + e - (r + r') = i + e - \alpha$$

Si el ángulo de incidencia es pequeño, también lo será r, y si α es pequeño lo serán igualmente r' y e. En este caso podemos sustituir los senos de los ángulos por los ángulos, y tenemos

$$i = n\,r \qquad i + e = n\,(r + r') = n\,\alpha$$
$$e = n\,r \qquad \delta = n\,\alpha - \alpha = (n - 1)\,\alpha$$

Si el ángulo r' fuese superior al ángulo límite del prisma (que llamaremos l) respecto al medio que le rodea, sufriría reflexión total y no emergería.

Siendo el valor máximo de r', el ángulo l y el de r también l (cuando la incidencia es rasante $i = 90°$, $r = l$), como $\alpha = r + r'$, el valor máximo de α para que haya emergencia es $\alpha = 2\,l$. En este caso un rayo incidente rasante emerge rasante. Si suponemos $\alpha = l$, tenemos:

Para $i = 90°$, $r = l$, $r' = l - l = 0$, $e = 0$, el rayo emergente es normal a la cara.

Para $i = 0$, $r = 0$, $r' = l$, $e = 90°$, emergencia rasante.

A continuación vamos a determinar la desviación en un prisma de índice $n = 1{,}5$, respecto al aire que le rodea, y cuyo ángulo de re-

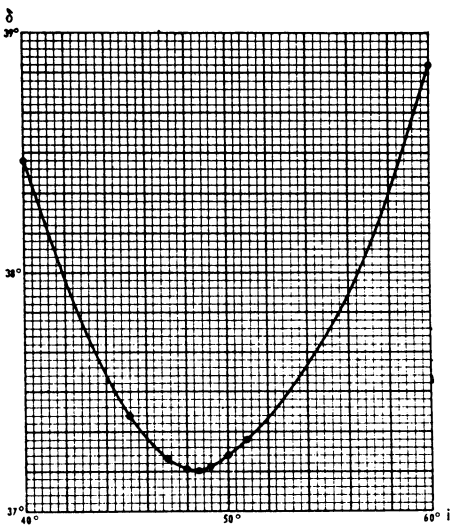


FIG. 14.12 Mínima desviación.

fringencia es de 60°, para distintos ángulos i. Utilizando las anteriores fórmulas para hallar r y e, calcularemos δ. Los valores de δ en función de i se representan en la figura 14.12 y en ella vemos que para $i = 48° 35'$ la desviación es mínima. Para este ángulo $i = 48° 35'$ el valor de e es el mismo. En general, se obtiene el valor mínimo de δ cuando $i = e$.

Podemos demostrarlo analíticamente: Diferenciando las expresiones

$$\begin{aligned} \delta &= i + e - \alpha \\ \operatorname{sen} i &= n \operatorname{sen} r \\ \operatorname{sen} e &= n \operatorname{sen} r' \\ \alpha &= r + r' \end{aligned} \qquad \text{obtenemos} \qquad \begin{aligned} d\delta &= di + de \\ \cos i\, di &= n \cos r\, dr \\ \cos e\, de &= n \cos r'\, dr' \\ 0 &= dr + dr' \end{aligned}$$

de donde deducimos:

$$dr = \frac{\cos i}{n \cos r}\, di \qquad de = -\frac{n \cos r'}{\cos e}\,\frac{\cos i}{n \cos r}\, di$$

$$dr' = -dr \qquad de = \frac{n \cos r'\, dr'}{\cos e} = -\frac{n \cos r'}{\cos e}\, dr$$

$$d\delta = di - \frac{\cos i \cos r'}{\cos e \cos r}\, di$$

$$\frac{d\delta}{di} = 1 - \frac{\cos i \cos r'}{\cos e \cos r} = 0$$

La condición de máximo o mínimo se cumple si $i = e$, ya que entonces $r = r'$.

Podemos ver que es un mínimo hallando la segunda derivada y comprobar que es positiva para $i = e$.

Para un prisma de pequeño ángulo y con incidencia pequeña vimos que la desviación $\delta = (n-1)\alpha$; la desviación es constante, directamente proporcional a α y a $n-1$.

La existencia del mínimo de desviación nos permite determinar el índice de refracción del prisma midiendo el ángulo δ. Como $i = e$,

$$\delta_m = 2i - \alpha \qquad i = \frac{\delta_m + \alpha}{2} \qquad r = r' = \frac{\alpha}{2}$$

Si conocemos δ_m y α, hallamos n:

$$n = \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{\operatorname{sen} \dfrac{\delta_m + \alpha}{2}}{\operatorname{sen} \dfrac{\alpha}{2}}$$

Si α es pequeño para incidencia casi normal, para hallar n basta despejarlo de $\delta = (n-1)\alpha$.

$$n - 1 = \frac{\delta}{\alpha} \qquad n = \frac{\delta}{\alpha} + 1$$

14.6 Sistemas ópticos centrados. Se llama sistema óptico *centrado* a un conjunto de dioptrios esféricos cuyos centros están alineados. A la recta que une los centros se le llama *eje del sistema* (o eje principal del sistema). Si alguno de los dioptrios fuese plano (esfera de radio infinito), estaría situado normalmente al eje del sistema.

De la definición de eje se deduce que un rayo luminoso dirigido según el eje se propaga a través del sistema sin desviarse; de aquí

deducimos que la imagen de un punto situado sobre el eje está situada también sobre el eje. Si un rayo luminoso tiene dos puntos pertenecientes a una sección principal (cfr. § 14.2), en su propagación a través del sistema siempre estará contenido en dicha sección principal en virtud de la primera ley de la refracción.

Como ejemplo de sistemas ópticos centrados tenemos el ojo, la lupa, el microscopio, etc.

Al igual que el dioptrio esférico, un sistema óptico centrado será estigmático para rayos de pequeña inclinación respecto al eje del sistema.

En un sistema óptico estigmático, la imagen de un punto P será otro punto P', el cual, según la ley de la refracción, debe hallarse en el plano de la sección principal que pasa por P, ya que los sucesivos rayos refractados deben hallarse en el mismo plano que el incidente y por tanto también estará en el mismo su intersección (el punto imagen). De aquí que podamos estudiar el problema en un plano refiriendo el punto P a un sistema Oxy y el P' al $O'x'y'$.

Para simplificar el estudio podemos tomar tanto el eje x (del espacio objeto) como el x' (del espacio imagen) a lo largo del eje principal, escogiendo los orígenes O y O' para el sistema de referencia de los espacios objeto e imagen respectivamente. El convenio de signos será el adoptado anteriormente al estudiar los dioptrios.

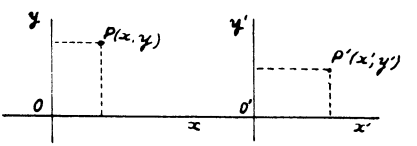


FIG. 14.13 Sistema centrado.

Sea un punto en el espacio objeto, o *punto objeto*, $P\,(x, y)$, cuya imagen sea el punto $P'\,(x', y')$, y sólo éste si el sistema es estigmático. Dadas las coordenadas x e y del punto P podemos hallar las coordenadas x' e y' del *punto imagen* P' por medio de determinada relación analítica. Es decir, suponemos conocidas las funciones $f_1\,(x, y)$ y $f_2\,(x, y)$ tales que

$$\begin{aligned} x' &= f_1\,(x,\ y) \\ y' &= f_2\,(x,\ y) \end{aligned} \tag{14.17}$$

Un sistema óptico se dice que es *estigmático perfecto* si, además de que a cada uno de los puntos del espacio objeto le corresponde un sólo punto imagen, la imagen de un plano del espacio objeto

es un plano. También se dice entonces que el sistema óptico es *aplanético,* y son tales sistemas los que vamos a considerar. Hay que tener presente que al estudiar el problema en el plano de una sección principal, la correspondencia será ahora entre recta objeto y recta imagen, o sea, entre las intersecciones del plano objeto e imagen correspondiente con el plano de dicha sección principal.

Dada una recta de ecuación

$$A\,x + B\,y + C = 0 \tag{14.18}$$

le corresponde una recta imagen determinada cuya ecuación será

$$A'\,x' + B'\,y' + C' = 0 \tag{14.19}$$

Sustituyendo los valores de x' e y', dados por las ecuaciones 14.17, en la ecuación 14.19 hallamos

$$A'\,f_1\,(x,\ y) + B'\,f_2\,(x,\ y) + C' = 0 \tag{14.20}$$

la cual deben satisfacer todos los puntos de la recta 14.18.

Designando por λ un parámetro (que puede ser función de x e y) distinto de cero, podemos escribir

$$A'\,f_1\,(x,\ y) + B'\,f_2\,(x,\ y) + C' = \lambda\,(A\,x + B\,y + C)$$

o bien

$$\frac{A'}{\lambda}\,f_1\,(x,\ y) + \frac{B'}{\lambda}\,f_2\,(x,\ y) + \frac{C'}{\lambda} = A\,x + B\,y + C$$

Siendo el segundo miembro lineal, también deberá serlo el primero, por lo que deberá ser

$$\left.\begin{aligned} \frac{f_1}{\lambda} &= a_1\,x + b_1\,y + c_1 \\ \frac{f_2}{\lambda} &= a_2\,x + b_2\,y + c_2 \\ \frac{1}{\lambda} &= a_3\,x + b_3\,y + c_3 \end{aligned}\right\} \tag{14.21}$$

donde las a, b y c son constantes. Despejando λ de la tercera ecuación tenemos

$$\lambda = \frac{1}{(a_3\,x + b_3\,y + c_3)}$$

Según las ecuaciones 14.17,

$$x' = f_1(x, y) = \lambda(a_1 x + b_1 y + c_1) = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}$$
$$y' = f_2(x, y) = \lambda(a_2 x + b_2 y + c_2) = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3} \qquad (14.22)$$

Con estas relaciones tenemos las condiciones que ligan las coordenadas de un punto objeto con las del correspondiente punto imagen, en los sistemas estigmáticos perfectos que consideramos.

Al haber tomado el eje x y el x' coincidentes con el eje principal, que es un eje de revolución, el sistema posee simetría de revolución, con lo que si y cambia de signo, manteniéndose la x constante, x' debe ser la misma. Para que ocurra esto, los coeficientes b_1 y b_3 deben ser nulos. Además, si y cambia de signo, lo mismo debe ocurrirle a y', con lo que a_2 y c_2 deben ser nulos. Las ecuaciones 14.22 se convierten en

$$x' = \frac{a_1 x + c_1}{a_3 x + c_3}$$
$$y' = \frac{b_2 y}{a_3 x + c_3} \qquad (14.23)$$

Despejando x e y de las ecuaciones 14.23, tenemos

$$x = \frac{c_3 x' - c_1}{a_1 - a_3 x'}$$
$$y = \frac{a_1 c_3 - a_3 c_1}{b_2 (a_1 - a_3 x')} y' \qquad (14.24)$$

Dividiendo en las ecuaciones 14.23 y primera de las 14.24 numerador y denominador por a_3, y por a_3^2 en la 14.24, que nos da y, haciendo además

$$a = a_1/a_3 \quad b = b_2/a_3 \quad c = c_1/a_3 \quad d = c_3/a_3$$

las ecuaciones 14.23 y 14.24 se escriben:

$$x' = \frac{a x + c}{x + d}$$
$$y' = \frac{b y}{x + d} \qquad (14.25)$$

$$x = \frac{d\,x' - c}{a - x'}$$

$$y = \frac{a\,d - c}{b\,(a - x')}\,y' \qquad (14.26)$$

Un sistema centrado, pues, está definido por las cuatro constantes características a, b, c y d.

14.7 Planos focales y focos. En las ecuaciones 14.25 vemos que para $x = -d$, los valores de x' e y' se hacen infinitos. Un punto luminoso situado en una posición en que $x = -d$ nos da su imagen en el infinito. Tales puntos son los de un plano perpendicular al eje x y cuya intersección con la sección principal es la recta $x + d = 0$. A dicho plano se le llama *plano focal objeto* y su imagen, o plano conjugado, está en el infinito. A su intersección con el eje se le llama *foco objeto*. Colocando en el foco objeto un punto luminoso, a la salida del sistema tendremos un haz de rayos paralelos al eje. Si lo colocamos en un punto del plano focal objeto, a la salida nos dará un haz de rayos paralelos, pero no paralelos al eje principal. Efectivamente: Si el punto luminoso está en el foco objeto, y por tanto sobre el eje principal, su imagen está en el infinito en la dirección del eje, luego todos los rayos que partan del foco deben cortarse en el punto del infinito de aquella dirección, o sea han de ser paralelos al eje. Si el punto es otro cualquiera del plano focal objeto, su imagen está en un punto del plano del infinito conjugado del plano focal y por tanto en una dirección distinta de la del eje principal, por lo que los rayos serán paralelos, pero no al eje principal.

En las ecuaciones 14.26 vemos que cuando $x' = a$, $x = \infty$; si el punto objeto está en el infinito, la imagen está en un punto de abscisa $x' = a$. El plano perpendicular al eje que pasa por dicho punto se llama *plano focal imagen*, y al punto de intersección con el eje principal se le llama *foco imagen*. Un haz de rayos paralelos al eje principal se cortan en el foco imagen. Un haz de rayos paralelos, pero no paralelos al eje principal, se cortan en un punto del plano focal imagen, distinto del foco imagen.

14.8 Fórmulas de Newton. Las coordenadas del foco objeto F son, pues, $(-d, 0)$, y las del foco imagen F', $(a, 0)$. Vamos a efectuar un cambio de coordenadas tomando como orígenes los focos y manteniendo los ejes de ordenadas paralelos a los antiguos. Llamando X, Y, X' e Y' a las nuevas coordenadas, tendremos (fig. 14.14)

$$X = x + d \qquad Y = y$$
$$X' = x' - a \qquad Y' = y$$

Sustituyendo los valores de las coordenadas antiguas,

$$x = X - d \qquad y = Y$$
$$x' = X' + a \qquad y' = Y$$

en las ecuaciones 14.25, hallamos:

$$X' + a = \frac{a\,(X - d) + c}{X} \qquad X\,X' + a\,X = a\,X - a\,d + c$$

$$X\,X' = c - a\,d \tag{14.27}$$

$$Y' = \frac{b\,Y}{X}$$

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{b}{X} \tag{14.28}$$

Haciendo $b = f$, $\dfrac{c - a\,d}{b} = f'$, tenemos:

$$c - a\,d = f\,f'$$

y las ecuaciones 14.27 y 14.28 se convierten en

$$X\,X' = f\,f' \tag{14.29}$$

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{f}{X} = \frac{X'}{f'} \tag{14.30}$$

Las ecuaciones 14.29 y 14.30 son las *fórmulas de Newton*, de las cuales puede deducirse toda la teoría geométrica de los sistemas centrados.

14.9 Aumento lateral; puntos y planos principales. Se llama *aumento lateral* a la razón $A = Y'/Y$, que, según la ecuación 14.30, vale $A = f/X$, o sea que depende de f y de X pero no de Y. El valor de A será igual a la unidad si $X = f$ o bien si $X' = f'$.

De la ecuación 14.29 vemos que si $X = f$, $X' = f'$; luego los anteriores puntos son objeto e imagen, es decir, son conjugados, y se llaman *puntos principales*. Los planos perpendiculares al eje principal y que pasan por los puntos principales, son conjugados y se llaman *planos principales*, y como en ellos todos los puntos tienen la mis-

ma X o la misma X', el aumento lateral para todos sus puntos es igual a la unidad. O sea, la imagen de un punto de uno de ellos situado a cierta distancia del eje principal es un punto del otro situado a la misma distancia del eje citado. La distancia f del foco objeto al punto principal objeto se llama *distancia focal objeto,* y a la distancia f' del foco imagen al punto principal imagen se llama *distancia focal imagen.*

Tracemos la recta AM paralela al eje principal, que parte de un punto A del plano focal objeto (fig. 14.15). El punto conjugado de M

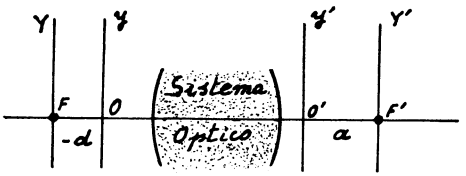


FIG. 14.14 Sistemas de coordenadas para las fórmulas de Newton.

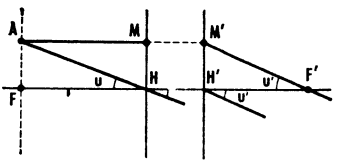


FIG. 14.15 Planos principales.

será el M', situado en el plano principal imagen a la misma distancia del eje que el punto M. Por ser AM paralelo al eje principal, el rayo emergente $M'F'$ debe pasar por el foco imagen F'. El rayo AH, que forma un ángulo u con el eje, tiene por conjugado el que pasa por H' y formará un ángulo u' con el eje.

Al estudiar el dioptrio esférico demostrábamos que nuy era invariante (invariante de Helmholtz) al pasar de un dioptrio a otro; luego debe cumplirse en los sistemas centrados, y por tanto deberá cumplirse que $nuMH = n'u'M'H'$; pero $MH = M'H'$, luego $nu = n'u'$. En la figura, u es positivo, luego u' deberá serlo también. Según sabemos, los rayos que parten de un punto del plano focal, a la salida deben ser paralelos; por tanto, el rayo que emerge de H' debe ser paralelo a $M'F'$. Para que sea positivo el ángulo u', que es igual al $H'F'M'$, por ser paralelos los rayos antes citados, el foco imagen debe estar situado a la derecha de H'. En general, si F está a la izquierda de H, F' debe estar a la derecha de H'. Si tomamos como origen de coordenadas los puntos H y H' para el espacio objeto e imagen, respectivamente, las distancias focales f y f' tienen signos contrarios. Podemos determinar la relación entre las distancias focales considerando el triángulo AFH y el $M'H'F'$. Del primero deducimos que $FA = HF$ tg u, que para u pequeño podemos escribir $FA = f\,u$. Del triángulo $M'H'F'$ deducimos que $H'M' = H'F'$ tg u', que por lo mismo

que en el anterior podemos escribir $H'M' = f'u'$; pero $FA = H'M'$, y como f es negativo, igualando, tenemos

$$-f\,u = f'u'$$

pero $nu = n'u'$, y dividiendo miembro a miembro hallamos

$$\frac{-f}{n} = \frac{f'}{n'}$$

o bien

$$\frac{f}{f'} = \frac{-n}{n'} \tag{14.31}$$

lo cual podemos expresar diciendo:

La razón de las distancias focales es igual al cociente entre los índices de refracción de los medios extremos, cambiado de signo.

Si los índices de refracción de los medios extremos son iguales (como ocurre a menudo), las distancias focales son iguales y opuestas.

Si el foco imagen está a la derecha de la cara extrema del sistema óptico, dicho sistema es convergente; es decir, un haz de rayos incidente paralelo al eje, al emerger converge en el foco imagen. Si el foco imagen está a la izquierda de la cara extrema del sistema óptico, los rayos emergentes del sistema divergen, y si eran paralelos al eje principal del sistema óptico, las prolongaciones de los rayos que emergen divergentes se cortan en el foco imagen. El primer sistema se llama convergente; el segundo, divergente.

14.10 Aumento angular; puntos nodales. Sea un punto luminoso situado en el punto P del eje principal de un sistema óptico, cuyos focos son los puntos F y F' y los puntos principales los H y H'.

Desde P trazamos un rayo PM que corta al plano principal objeto en el punto M. Si la imagen de P es P', el rayo conjugado de PM es el $M'P'$, pues M' es el conjugado de M y dista del eje principal, igual

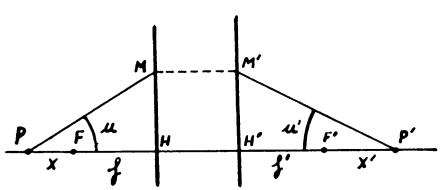


FIG. 14.16

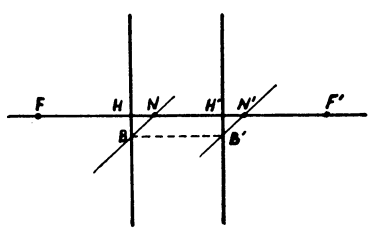


FIG. 14.17 Puntos nodales.

que M, la distancia $MH = M'H' = h$. El rayo PM forma el ángulo u con el eje principal, y el $M'P'$ el ángulo u'. Se llama *aumento angular* a la razón entre tg u' y tg u. Si los ángulos fuesen pequeños, dicha razón sería u'/u. De la figura 14.16 deducimos:

$$\gamma = \frac{\text{tg } u'}{\text{tg } u} = \frac{h/H'P'}{h/HP} = \frac{HP}{H'P'}$$

pero como los ángulos son de distinto signo, escribiremos:

$$\gamma = -\frac{HP}{H'P'}$$

Tomando como origen los focos

$$HP = -X + f \qquad H'P' = -f' + X'$$

y sustituyendo en la relación anterior:

$$\gamma = -\frac{-X + f}{-f' + X'}$$

Según la fórmula de Newton 14.29, $X = ff'/X'$; así pues,

$$\gamma = -\frac{-\dfrac{ff'}{X'} + f}{-f' + X'} = -\frac{\dfrac{f(X' - f')}{X'}}{-f' + X'}$$

$$\gamma = -\frac{f}{X'} = -\frac{X}{f'} \tag{14.32}$$

Este aumento angular es igual a $+1$ cuando $X' = -f$ o cuando $X = -f'$, lo cual corresponde a dos puntos conjugados llamados *puntos nodales*, N y N' (véase fig. 14.17). Un rayo que pasa por N tiene por conjugado otro que pasa por N' y es paralelo al primero. Obsérvese que, con origen en los puntos F y F', $f > 0$ y $f' < 0$; luego N está a la derecha de F $[FN = -(-f')]$ y N' a la izquierda de F' $(F'N' = -f)$. De la figura deducimos que $NN' = BB' = HH'$. Si las distancias focales fuesen iguales, los puntos nodales coinciden con los puntos principales.

14.11 Ecuación de los puntos conjugados tomando como orígenes los puntos principales. Sean P y P' dos puntos conjugados (fig. 14.16).

La fórmula de Newton 14.29 la escribimos $PF \cdot F'P' = f f'$, tomando como orígenes los puntos H y H'. Llamando p a PH y p' a $H'P'$,

$$PF = p - f \qquad F'P' = p' - f'$$

así que

$$(p - f)(p' - f') = f f' \qquad p p' - p f' - p' f + f f' = f f'$$

$$p p' = p f' + p' f$$

y dividiendo por $p p'$:

$$\frac{f}{p} + \frac{f'}{p'} = 1 \tag{14.33}$$

Esta es la ecuación que nos liga a los puntos conjugados con las distancias focales. Despejando p' hallamos:

$$p' = \frac{p}{p - f} f' \tag{14.34}$$

Si P y F están a la izquierda de H, p y f son negativas; pero como cambia de signo numerador y denominador, la fórmula es la misma. En estas condiciones, si $p > f$, $p' > 0$ y la imagen está a la derecha de H'. Si $p < f$, $p' < 0$ y la imagen estaría a la izquierda de H'.

La ecuación 14.33 es análoga a la del dioptrio esférico (ec. 14.7), en la cual las p eran x, distancias al vértice, lo cual nos indica que podemos considerar un dioptrio esférico como un sistema óptico en el cual los planos principales coinciden y son tangentes al dioptrio en el vértice.

El aumento lateral (ec. 14.30) tiene el mismo valor, pues no hemos cambiado el origen de las Y. Su valor ahora será:

$$\frac{Y'}{Y} = -\frac{f}{X} = -\frac{f}{p - f}$$

Ahora es $f < 0$, porque se mide a partir de H, y en la ecuación 14.30 a partir de F. Teniendo en cuenta la ecuación 14.34, el aumento lateral será:

$$\frac{Y'}{Y} = -\frac{f p'}{f' p} \tag{14.35}$$

y como las f tienen signo contrario, el aumento lateral tendrá el mismo signo que p'/p. Si el objeto está a la izquierda de H y la imagen a la derecha de H', el aumento lateral será negativo y la imagen será invertida.

El aumento angular dado por la ecuación 14.32 se escribirá, por la misma razón de antes, al tomar como orígenes H y H':

$$\gamma = \frac{f}{X'} = \frac{X}{f'} = \frac{p - f}{f'}$$

y despejando $p - f = p\,f'/p'$ de la ecuación 14.34, resulta

$$\gamma = \frac{p}{p'} \tag{14.36}$$

Multiplicando las ecuaciones 14.35 y 14.36 se tiene

$$\gamma \frac{Y'}{Y} = -\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'} \tag{14.37}$$

o sea, que *el producto del aumento angular por el aumento lateral es igual al cociente entre los índices de refracción de los medios extremos.*

14.12 Determinación gráfica de las imágenes. Un sistema óptico queda determinado por cuatro datos, que pueden ser los dos focos y los dos puntos principales o también los dos focos y los dos puntos nodales. Los datos antes citados se llaman *elementos cardinales* del sistema óptico. Con ellos puede determinarse gráficamente la posición de la imagen de un objeto dada por el sistema óptico (para rayos paraxiales).

Si tenemos un objeto pequeño, por ejemplo la flecha de la figura 14.18, basta hallar la imagen del extremo A, pues siendo perpendicular al eje, la imagen deberá serlo también, ya que todos los puntos distan p del plano principal objeto. Trazaremos una recta pa-

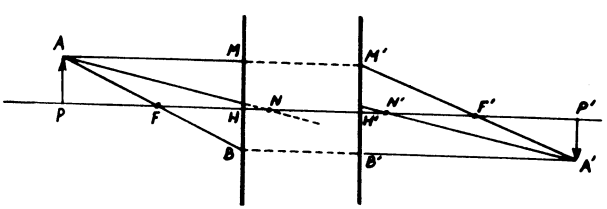


FIG. 14.18 Construcción de la imagen.

ralela al eje hasta que corte en M al plano principal objeto, prolongaremos hasta encontrar, en M', al plano principal imagen y desde M' trazaremos una recta que pase por el foco imagen. Si desde el

extremo del objeto trazamos una recta que pase por el foco objeto, su conjugada sale paralela al eje del sistema. Trazaremos la recta que pase por el foco y prolongaremos hasta que corte al plano principal objeto en B y de allí una paralela al eje principal hasta que corte al rayo conjugado del primero en A'. Si tenemos los puntos nodales, en lugar del segundo rayo podemos trazar uno que pase por el punto nodal objeto. El rayo conjugado, paralelo al primero, debe pasar por el punto nodal imagen y lo prolongaremos hasta que corte al rayo $M'A'$. La imagen de AP es $P'A'$.

Si el punto está en el eje, podemos trazar un rayo cualquiera que cortará al plano principal objeto en el punto M (fig. 14.19) y sale del punto M' del plano principal imagen situado a la misma altura. Tra-

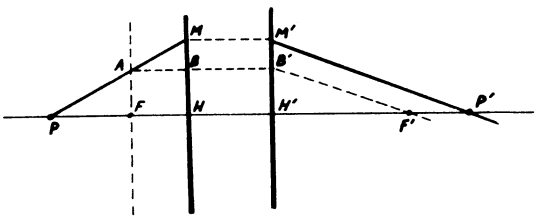


FIG. 14.19 Construcción de la imagen de un punto del eje.

zando el plano focal objeto, el rayo primero corta a este plano en el punto A. Desde A trazamos una recta paralela al eje principal, cuya conjugada $B'F'$ pasa por el foco imagen. El rayo conjugado del PM será paralelo al $B'F'$, por pasar por el mismo punto del plano focal, por lo que desde B' trazaremos una paralela a $M'F'$, la cual corta al eje en el punto P' imagen del punto P.

14.13 Sistemas telescópicos o afocales. Si en las ecuaciones 14.23 $a_3 = 0$, siendo las demás constantes distintas de cero, las constantes $a = a_1/a_3$ y $d = c_3/a_3$ se hacen infinitas y los planos focales $x + d = 0$ y $a - x' = 0$ están en el infinito. El sistema se llama *afocal* o *telescópico*. Las ecuaciones 14.23 se reducen a

$$x' = \frac{a_1 x + c_1}{c_3} \qquad y' = \frac{b_2 y}{c_3}$$

las cuales, haciendo $a_1/c_3 = A$, $c_1/c_3 = C$ y $b_2/c_3 = B$, se escriben

$$x' = A x + C \qquad y' = B y$$

Tomando como orígenes dos puntos O y O' conjugados cualesquiera, como para $x = 0$ debe ser $x' = 0$, la constante C debe ser nula, con lo que las ecuaciones se reducen a

$$x' = A\,x \qquad y' = B\,y \tag{14.38}$$

El aumento lateral $Y'/Y = y'/y = B$ es constante.

Dividiendo miembro a miembro las dos ecuaciones 14.38

$$\frac{y'}{x'} = \frac{B}{A}\,\frac{y}{x}$$

pero $y'/x' = \text{tg } u'$; $y/x = \text{tg } u$, siendo u y u' los ángulos que forman con el eje principal dos rayos conjugados que pasan por O y O'.

El aumento angular

$$\gamma = \frac{\text{tg } u'}{\text{tg } u} = \frac{B}{A} \tag{14.39}$$

es constante. Multiplicando el aumento lateral por el angular tenemos $(y'/y)\,\gamma = B^2/A$, pero sabemos (ec. 14.37) que el producto del aumento lateral por el aumento angular es igual a $-f/f'$, luego

$$\frac{f}{f'} = -\frac{B^2}{A}$$

aunque las distancias focales sean infinitas, su cociente es finito y es constante. Si los medios extremos fuesen iguales, $B^2 = A$ y el aumento angular sería $\gamma = 1/B$, recíproco del aumento lateral.

14.14 Combinación de sistemas ópticos centrados. Sean dos sistemas ópticos centrados de los cuales nos dan sus elementos cardinales: En el primer sistema, los puntos principales son H_1, H_1', y los focos, F_1, F_1'; en el segundo sistema son H_2, H_2' y F_2, F_2', y las distancias focales respectivas, f_1, f_1' y f_2, f_2'.

Vamos a demostrar que dichos sistemas ópticos equivalen a un sistema óptico centrado único, del cual determinaremos sus elementos cardinales y luego puede generalizarse a un número de sistemas cualquiera. Primero procederemos gráficamente. Desde un punto a la izquierda del primer sistema, que dista h del eje principal, trazamos un rayo paralelo a dicho eje (fig. 14.20) que corta a los planos principales del mismo en los puntos A y A'. De este último punto debe ir hacia el foco imagen F_1'. Prolongamos dicho rayo hasta que corte al plano principal objeto del segundo sistema, trazamos una paralela

desde este punto hasta que corte al plano principal imagen en el punto E. Para conocer el rayo emergente, trazaremos desde el foco objeto F_2 del segundo sistema una paralela al rayo $A'F_1'$, el cual, a la salida del plano principal imagen será paralelo al eje principal y debe cortarse con el emergente de E en un mismo punto P del plano focal imagen del segundo sistema. Uniendo E con dicho punto

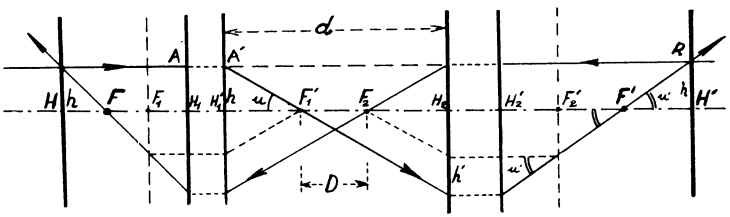


FIG. 14.20 Combinación de dos sistemas.

hallamos el rayo emergente que corta al eje principal en el punto F', que será el foco imagen del sistema combinado, es decir, el punto del eje donde se cortarían los rayos de un haz paralelo al eje principal que incidiese en el sistema. Prolongando este rayo EF' hallaremos un punto del mismo que diste h del eje, o sea, del plano principal imagen del sistema combinado, hallando su intersección R con la dirección del rayo incidente. Trazando desde allí una perpendicular al eje principal hallamos el punto principal imagen H'. Operando de manera análoga, con un rayo procedente de la derecha del segundo sistema, hallaríamos el foco objeto F y el punto principal H del sistema equivalente.

Para la determinación analítica del sistema equivalente, procederemos de la manera siguiente. En primer lugar, definiremos el *intervalo óptico* como la distancia entre el foco imagen del primer sistema y el foco objeto del segundo y lo simbolizaremos por la letra D. Si llamamos d a la distancia $H_1'H_2$, tendremos $D = d - H_1'F_1' - F_2H_2$ y como $H_1'F_1' = f_1$ y $F_2H_2 = -f_2$, dicho valor lo escribimos

$$D = d - f_1' + f_2 \tag{14.40}$$

Aplicando la fórmula de Newton 14.29 a los puntos F' y F_1' conjugados respecto al segundo sistema, tenemos

$$(-F_1'F_2)\cdot F_2'F' = f_2 f_2' \qquad \text{o sea} \qquad F_2'F' = -\frac{f_2 f_2'}{D}$$

haciendo lo propio con los puntos F_2 y F, conjugados del primer sistema, escribimos

$$-F F_1 \cdot F_1' F_2 = f_1 f_1' \quad \text{o sea} \quad F F_1 = -\frac{f_1 f_1'}{D}$$

y tenemos la posición de los focos. Si hallamos las distancias focales, tendremos la posición de los puntos principales.

De la semejanza de los triángulos $A' H_1' F_1'$ y $F_1' F_2' C$ deducimos

$$\frac{h}{-h'} = \frac{f_1'}{D}$$

De la de los triángulos QEP y $F'H'R$ deducimos

$$\frac{h}{-h'} = \frac{F' H}{f_2'}$$

Igualando los valores de h/h' y despejando $F'H'$ encontramos

$$F'H' = \frac{f_1' f_2'}{D}$$

Ahora bien, $F'H'$ es la distancia focal imagen del sistema equivalente; si la medimos tomando como origen el punto H', esta distancia es precisamente $-f'$, así que

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{D} \tag{14.41}$$

Si f_1', f_2' y D son positivas, como ocurre en la figura 14.20, F' está a la izquierda de H'; si una de ellas, o las tres, fuesen negativas, estaría a la derecha de H'.

Con un razonamiento análogo, operando con el rayo que viene de la derecha, para determinación gráfica de F y H, hallaríamos

$$HF = f = \frac{f_1 f_2}{D} \tag{14.42}$$

En la figura, f_1 y f_2 son negativas y D positiva; luego en este caso f es positiva y el foco objeto está a la derecha de H.

Tenemos ya las distancias focales; vamos a determinar la posición de los focos y de los puntos principales con relación a los planos principales extremos de los sistemas dados:

$$FH_1 = FF_1 + F_1H_1 = \frac{f_1 f_1'}{D} + f_1 =$$

$$= \frac{1}{D}(f_1' + d - f_1' + f_2) f_1 = \frac{(d + f_2) f_1}{D} \quad (14.43)$$

$HH_1 = HF + FH_1$; el valor de HF (ec. 14.42) es, tomando como origen el punto H, si referimos las distancias a H_1, $HF = -f_1 f_2/D$, así que

$$HH_1 = -\frac{f_1 f_2}{D} + \frac{(d + f_2) f_1}{D} = \frac{f_1 d}{D} \quad (14.44)$$

Operando de manera análoga con F' hallaríamos:

$$H_2' F' = \frac{(d - f_1') f_2'}{D} \quad (14.45)$$

$$H_2' H' = \frac{f_2' d}{D} \quad (14.46)$$

Tenemos, pues, la posición de los focos (ec. 14.43 y 14.45), y de los puntos principales (ec. 14.44 y 14.46) del sistema equivalente referidas a los puntos H_1 (los objeto) y H_2' (los imagen).

Si D fuese nulo, el sistema equivalente sería afocal; las distancias focales, aunque infinitas, tienen por cociente, según vimos en el párrafo 14.13,

$$\frac{f}{f'} = -\frac{f_1 f_2}{f_1' f_2'} = -\frac{B^2}{A}$$

15

Lentes y espejos

15.1 Lentes esféricas. Una *lente esférica* es un medio transparente limitado por dos superficies esféricas, o bien, un sistema formado por dos dioptrios esféricos. El *eje principal* es la recta que une los centros de curvatura de las superficies esféricas que la limitan. Es, pues, un sistema centrado. Si los rayos incidentes son paraxiales, el dioptrio vimos que era estigmático, luego la lente será un sistema centrado estigmático para rayos paraxiales. Considerando cada dioptrio como un sistema óptico, podemos hallar el sistema óptico equivalente a una lente, aplicando lo indicado en el párrafo anterior.

Según vimos en § 14.11, en un dioptrio esférico los planos principales coinciden y son tangentes al dioptrio en el vértice. La distancia d entre H_1' y H_2 es ahora igual al espesor de la lente (distancia entre los vértices de los dos dioptrios). Las distancias focales las hallaremos aplicando las ecuaciones 14.3 y 14.4. Consideremos la lente representada en la figura 15.1, limitada por las superficies esféricas D_1 y D_2, de radios R_1 y R_2. Si la lente es de vidrio de índice de refracción N, en el primer dioptrio $n = 1$ (aire) y $n' = N$; en el segundo $n = N$ y $n' = 1$. El radio del primer dioptrio es R_1 y el del segundo R_2, con lo que las distancias focales serán:

$$f_1 = -\frac{1}{N-1}R_1 \qquad f_1' = \frac{N}{N-1}R_1$$

$$f_2 = -\frac{N}{1-N}R_2 = \frac{N}{N-1}R_2 \qquad f_2' = \frac{1}{1-N}R_2 = -\frac{1}{N-1}R_2 \tag{15.1}$$

(Aunque en la figura R_1 es positivo y R_2 es negativo, las ecuaciones 15.1 son generales; a los radios se les dará el signo correspondiente en cada caso concreto.)

Para determinar gráficamente el sistema equivalente se procede

como se ha indicado en el párrafo anterior, tal como se hace en la figura, hallando F, F', H y H'. (En la figura 15.1 se halla sólo F' y H'.) Para la determinación analítica hallaremos primero el valor de D

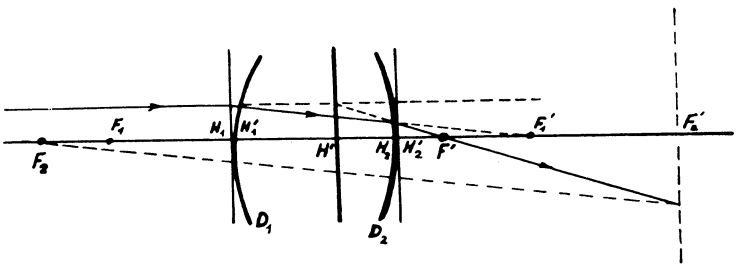


FIG. 15.1 Lente.

dado por la ecuación 14.40, sustituyendo f_1' y f_2 por sus valores dados por las ecuaciones 15.1.

$$D = d - f_1' + f_2 = d - \frac{NR_1}{N-1} + \frac{NR_2}{N-1}$$

$$D = d + \frac{N}{N-1}(R_2 - R_1)$$

Las posiciones de los planos principales están determinadas por:

$$HH_1 = \frac{f_1 d}{D} = \frac{-\frac{R_1}{N-1} d}{d + \frac{N}{N-1}(R_2 - R_1)} = \frac{-R_1 d}{(N-1)d + N(R_2 - R_1)}$$

$$H_2'H' = \frac{f_2' d}{D} = \frac{-R_2 d}{(N-1)d + N(R_2 - R_1)}$$

Las distancias de los focos a los vértices de la lente serán:

$$FH_1 = \frac{f_1(d + f_2)}{D} = \frac{-R_1[(N-1)d + NR_2]}{(N-1)[(N-1)d + N(R_2 - R_1)]}$$

$$H_2'F' = \frac{f_2'(d - f_1')}{D} = \frac{R_2[-(N-1)d + NR_1]}{(N-1)[(N-1)d + N(R_2 - R_1)]}$$

Las distancias focales son iguales y de signo contrario, por ser los medios extremos iguales y valen

$$f = \frac{f_1 f_2}{D} = -\frac{R_1 R_2 N}{(N-1)^2 D} \qquad f' = -\frac{f_1' f_2'}{D} = \frac{R_1 R_2 N}{(N-1)^2 D}$$

Resulta una expresión más simple hallando $1/f' = -1/f$:

$$\frac{1}{f'} = \frac{(N-1)^2 [d + N(R_2 - R_1)/(N-1)]}{R_1 R_2 N} = (N-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{(N-1)^2 d}{N R_1 R_2}$$

Si d es pequeño frente a los radios de curvatura, puede despreciarse el segundo sumando y tomaremos:

$$\frac{1}{f'} = (N-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{15.2}$$

Aplicando estas fórmulas a lentes de índice de refracción $N = 1{,}5$ hallamos:

Biconvexa de radios $R_2 = -R_1 = -R$ y espesor d:

$$HH_1 = \frac{d}{3 - d/2R} \quad \text{si } d \ll R \qquad HH_1 = \frac{d}{3}$$

$$\frac{1}{f'} = 0{,}5\,\frac{2}{R} \quad f' = R \quad f = -R \qquad H_2H' = -\frac{d}{3}$$

Planoconvexa, $R_1 = R$, $R_2 = \infty$:

$$HH_1 = 0 \quad H_2H' = -\frac{2d}{3} \quad f' = 2R$$

Bicóncava, $R_1 = -R$, $R_2 = R$:

$$HH_1 = \frac{d}{d/2R + 3} \quad \text{si } d \ll R \qquad HH_1 = \frac{d}{3}$$

$$f' = -R \quad f = R \qquad H_2H' = -\frac{d}{3}$$

Planocóncava, $R_1 = -R$, $R_2 = \infty$:

$$HH_1 = 0 \quad H_2H' = -\frac{2d}{3} \quad f' = -2R$$

El aumento lateral $Y'/Y = y'/y$ en un sistema óptico vale, según la ecuación 14.35, $-(f/f')\,(p'/p)$. En una combinación de sistemas ópti-

cos, la fórmula es la misma con tal de tomar como valores de f y f' los correspondientes al sistema equivalente y p y p' las distancias del objeto al plano principal objeto y de la imagen al plano principal imagen, respectivamente, del sistema equivalente. En el caso de una lente, como por lo común los medios extremos son iguales (aire), el aumento lateral será $Y'/Y = p'/p$. El aumento angular es (cfr. ecuación 14.36) $\gamma = p/p'$ que, en este caso, es el recíproco del aumento lateral. Si la lente es delgada, los planos principales coinciden, siendo las distancias p y p' las distancias a la lente de la cual despreciamos el espesor.

La ecuación 14.33 de los puntos conjugados, para una lente en donde los medios extremos son iguales, y por tanto $f/f' = -1$, se convierte (dividiendo los dos miembros por f') en

$$\frac{-1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f'} \tag{15.3}$$

y recordando la ecuación 15.2 para una lente de pequeño espesor, tendremos:

$$\frac{-1}{p} + \frac{1}{p'} = (N-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{15.4}$$

que nos da la relación entre las posiciones de objeto e imagen y los radios de curvatura de las caras.

Esta ecuación, lo mismo que la relación del aumento lateral, la podemos deducir aplicando el principio de Fermat.

Supongamos una lente de espesor d y radios de curvatura R_1 y R_2. Desde un punto P (fig. 15.2) mandamos un rayo poco inclinado que incide en la lente en el punto B, emerge del punto C y suponemos que se forma la imagen del

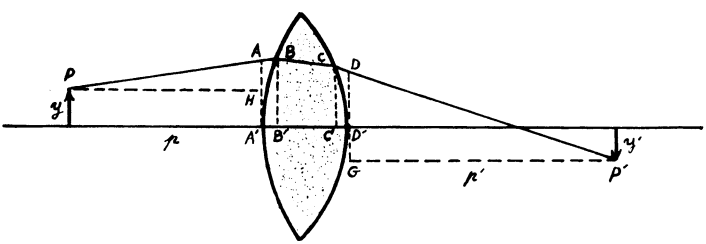


FIG. 15.2 Deducción, a partir del principio de Fermat, de la ecuación de las lentes.

punto P en el punto P'. El camino seguido por el rayo es $PBCP'$, pero el camino óptico es el $PB + N\,(BC) + CP'$ (siendo N el índice de refracción de la lente). Para calcular mejor los valores de las distancias hacemos

$$PB = PA + AB \qquad \text{y} \qquad CP' = CD + DP'$$

$$PA = (PH^2 + AH^2)^{1/2} = p\left(1 + \frac{(h-y)^2}{p^2}\right)^{1/2} \qquad \text{llamando } p = PH,\ h = AA'$$

desarrollando en serie y limitándonos a los dos primeros términos, ya que $(h-y)/p$ es pequeño, dada la poca inclinación del rayo, obtenemos

$$PA = p\left(1 + \frac{(h-y)^2}{2p^2}\right) = p + \frac{(h-y)^2}{2p}$$

$$AB \simeq A'B', \quad \text{ahora bien} \quad BB'^2 = A'B'(2R_1 - A'B'); \quad A'B' \simeq \frac{h^2}{2R_1}$$

por análoga consideración

$$CD \simeq C'D' = h^2/2R_2$$

$$BC \simeq d - A'B' - C'D' = d - h^2/2R_1 - h^2/2R_2$$

$$DP' = (GP'^2 + DG^2) = p'\left(1 + \frac{(h+y')^2}{p'^2}\right)^{1/2} \simeq p' + \frac{(h+y')^2}{2p'}$$

El camino óptico vale, pues:

$$p + (h-y)^2/p + h^2/2R_1 + N(d - h^2/2R_1 - h^2/2R_2) + h^2/2R_2 + (h+y)^2/2p'$$

teniendo en cuenta que la única variable es h, diferenciando e igualando a cero, hallamos:

$$(h-y)/p + h/R_1 - N\,h/R_1 - N\,h/R_2 + h/R_2 + (h+y')/p' = 0$$

o bien

$$h\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} - (N-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right] + \left(\frac{y'}{p'} - \frac{y}{p}\right) = 0$$

si la lente es un sistema estigmático, la posición de P' debe ser independiente de h. En esta relación, para que el mínimo se realice independientemente del valor de h, el coeficiente de h debe ser nulo, es decir,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = (N-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{15.5}$$

pero si este coeficiente es nulo, se verifica, además, que

$$y'/p' - y/p = 0 \qquad \text{o bien} \qquad y'/y = p'/p$$

que nos da el aumento lateral.

Observemos que la ecuación 15.5 es precisamente la 15.4. Lo que ocurre es que aquí los valores de p y de R_2 (que son negativos) están en valor absoluto, pues en la deducción no hemos tenido en cuenta los signos; pero si en la ecuación 15.4 ponemos $-p$ en vez de p y $-R_2$ en vez de R_2, obtenemos la 15.5.

15.2 Centro óptico de una lente. Es un punto del eje principal tal que todo rayo que pase por él, después de refractado en la cara de entrada, es, a la salida de la lente, paralelo a la dirección de

incidencia. En la figura 15.3 representamos una lente de espesor d y radios de curvatura R_1 y R_2. Un rayo incidente en A forma el ángulo i con la normal O_1A (O_1 es el centro de curvatura de la cara de entrada). Después de refractado, forma el ángulo r con dicha normal emergiendo en el punto B. Si O_2B (O_2 es el centro de curvatura de la segunda cara) es paralelo a O_1A, el punto C, intersección de AB con el eje, es el centro de curvatura. Efectivamente, el ángulo que forma AB con la normal O_2B es r igual al de refracción en la pri-

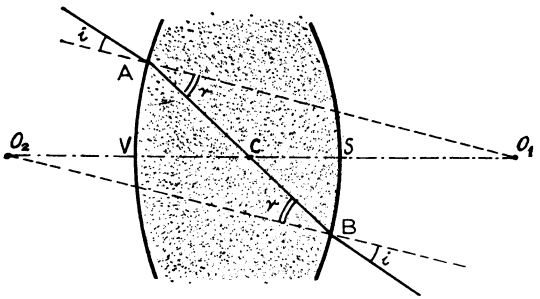


FIG. 15.3 Centro óptico.

mera cara por alternos internos, luego el rayo emergente de la lente en B formará el ángulo i que, según la ley de la refracción, debe ser igual al incidente; luego el rayo emergente es paralelo al incidente. Ya tenemos un método gráfico de hallar C. Unimos el punto de incidencia A con O_1, desde O_2 trazamos una paralela a AO_1 hasta que corte a la segunda cara de la lente en B, uniendo A con B, la recta de unión cortará al eje principal en el punto C, centro óptico de la lente.

Para la determinación analítica basta observar la figura y ver que los triángulos ACO_1 y O_2CB son semejantes, por tener los ángulos iguales; debe cumplirse que

$$\frac{O_2C}{O_2B} = \frac{CO_1}{O_1A}$$

y de la figura deducimos:

$$O_2C = O_2S - CS$$
$$CO_1 = VO_1 - VC$$

Si queremos referir el punto C al vértice V haremos $VC = x$, con lo que $CS = d - x$; además, $VO_1 = O_1A = R_1$ y $O_2S = O_2B = -R_2$ (en la figura R_2 es negativo); luego,

$$\frac{-R_2-(d-x)}{-R_2}=\frac{R_1-x}{R_1}$$

$$1+\frac{d-x}{R_2}=1-\frac{x}{R_1}$$

de donde

$$x=\frac{R_1\,d}{R_1-R_2} \tag{15.6}$$

Si R_1 y R_2 son de signos contrarios (lentes biconvexas y bicóncavas) el centro óptico está entre los dos vértices y si los radios fuesen iguales en valor absoluto, el centro óptico sería el punto medio entre los vértices. En una lente en la que una de las caras sea plana, el centro óptico coincide con el vértice de la cara no plana. En el caso de lente menisco, en la cual los dos radios son del mismo signo, x será mayor que d, estará fuera de la lente y en el lado de la cara de mayor curvatura, como puede comprobarse aplicando la fórmula anterior.

Problema. Determínese el sistema óptico equivalente a una bola de vidrio de índice de refracción $N=1{,}5$ y radio R. Hállese la posición de la imagen de un punto luminoso situado en el vértice izquierdo de la bola y los correspondientes aumentos lateral y angular.

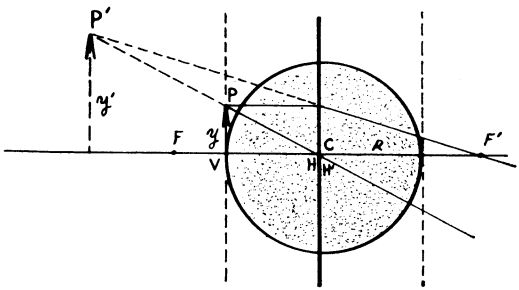


FIG. 15.4

Aplicando las fórmulas dadas en § 15.1 hallamos:

$$HH_1=\frac{-R\times 2R}{0{,}5\times 2R+1{,}5\,(-2R)}=R$$

$$H_2'H'=\frac{R\times 2R}{0{,}5\times 2R+1{,}5\,(-2R)}=-R$$

Los planos principales coinciden en el centro de la esfera.

$$1/f'=0{,}5\,(1/R+1/R)+\frac{0{,}5^2\times 2R}{1{,}5\times R(-R)}=\frac{2}{3R}$$

$$f'=3R/2 \qquad f=-3R/2$$

los focos están a $R/2$ del primer vértice por la izquierda (objeto) y $R/2$ por la derecha (imagen) del segundo vértice. Para hallar la imagen, en la ecuación 15.3 hacemos $p = -R$ y tenemos

$$-1/-R + 1/p' = 2/3\,R; \quad p' = -3\,R$$

o sea, una imagen virtual situada a la izquierda del primer vértice a la distancia $2\,R$. El aumento lateral $y'/y = p'/p = -3\,R/-R = 3$ es positivo, luego la imagen es derecha y tres veces mayor. El aumento angular es

$$\gamma = p/p' = -R/-3\,R = 1/3$$

El lector puede encontrar gráficamente los valores obtenidos, usando el método seguido en la figura 15.1.

En la figura 15.4 hemos hallado la imagen de un objeto pequeño situado en el vértice V por el método gráfico, supuesto hallado el sistema equivalente operando de la siguiente forma:

Por el extremo de la flecha en V trazamos un rayo paralelo al eje principal que corta a los planos principales objeto e imagen en el mismo punto; de allí va al foco imagen F'. Desde el mismo extremo trazamos un rayo que pase por el centro de la esfera que es el centro óptico, y este rayo, por incidir normalmente, no se desvía. Las prolongaciones de estos rayos se cortan en el punto P' que es la imagen de P, pudiéndose comprobar que la posición y el aumento coinciden con los resultados analíticos antes hallados.

El lector puede también comprobar, utilizando el mismo método que antes, que si en vez de una esfera es media esfera, con la cara plana a la derecha los valores ahora serían:

$$HH_1 = 0 \qquad H_2H' = -R/N \qquad 1/f' = (N-1)/R$$

15.3 Asociación de lentes. Si tenemos varias lentes a determinada distancia una de otra, podemos hallar el sistema equivalente asociando dos lentes, hallando el sistema equivalente (§§ 14.14 y 15.1), asociando el resultado con la siguiente y así sucesivamente.

Ejemplo. Tenemos dos lentes, una biconvexa de radios 3 cm y otra bicóncava de radios 1 cm. El índice de refracción del vidrio de cada una de ellas es 1,5, y las colocamos a una distancia de 6 cm suponiéndolas lo suficientemente delgadas para despreciar su espesor frente a los radios. Vamos a calcular el sistema equivalente y la posición de la imagen, dada por el sistema, de un pequeño objeto situado a 7 cm a la izquierda de la lente biconvexa, estando la bicóncava a la derecha.

Aplicando la ecuación 15.2 hallamos $f_1' = 3$ cm, $f_1 = -3$ cm (la primera es convergente); $f_2' = -1$ cm, $f_2 = 1$ cm (la segunda es divergente). Por ser delgadas, los planos principales coinciden en cada lente y, por tanto, $H_1'H_2 = d = 6$ cm, $D = 6 - 3 + 1 = 4$ cm. La posición de los planos principales del sistema equivalente será:

$$HH_1 = \frac{f_1\,d}{D} = -4{,}5 \text{ cm}$$

$$H_2'H' = \frac{f_2'\,d}{D} = -1{,}5 \text{ cm}$$

las distancias focales:

$$f = \frac{f_1 f_2}{D} = -0{,}75 \text{ cm} \qquad f' = -\frac{f_1' f_2'}{D} = 0{,}75 \text{ cm}$$

En la figura 15.5 representamos estos resultados.

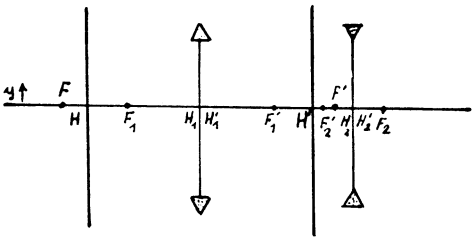


FIG. 15.5

Para hallar la posición de la imagen, aplicamos la ecuación 15.3, teniendo en cuenta que el objeto está a 2,5 cm a la izquierda de H:

$$\frac{-1}{-2{,}5} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{0{,}75}; \qquad p' = \frac{15}{14} \text{ cm}$$

está a la derecha de H' y a 3/7 cm a la izquierda de la segunda lente. El aumento $y'/y = p'/p = \dfrac{15/14}{-2{,}5} = -\dfrac{3}{7}$; la imagen es invertida y menor que el objeto.

Podíamos haber obtenido este resultado hallando la imagen dada por la primera lente, considerar dicha imagen como objeto para la segunda y así hallar la imagen definitiva. Efectivamente:

$$\frac{-1}{-7} + \frac{1}{p_1'} = \frac{1}{3}; \qquad p_1' = \frac{21}{4} \text{ cm}$$

dista $6 - \dfrac{21}{4} = \dfrac{3}{4}$ cm de la segunda y a su izquierda;

$$p_2 = -\frac{3}{4} \text{ cm}; \qquad \frac{-1}{-3/4} + \frac{1}{p_2'} = \frac{1}{-1}; \qquad p_2' = -\frac{3}{7} \text{ cm}$$

3/7 de cm a la izquierda de la segunda lente como hemos obtenido con el método anterior. Para hallar el aumento, calcularemos los aumentos en cada lente:

$$\frac{y'}{y} = \frac{y'}{y_1'} \cdot \frac{y_1'}{y} = \frac{p_2'}{p_2} \cdot \frac{p_1'}{p_1} = \frac{-3/7}{-3/4} \cdot \frac{21/4}{-7} = -\frac{3}{7}$$

En el caso de dos lentes, para el cálculo de la distancia focal imagen, podemos escribir

$$\frac{1}{f'} = -\frac{D}{f_1' f_2'} = -\frac{d - f_1' + f_2}{f_1' f_2'}$$

y como $f_2 = -f_2'$ $$\frac{1}{f'} = -\frac{d}{f_1' f_2'} + \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} \tag{15.7}$$

Si las lentes son delgadas y yuxtapuestas, $d = 0$ y la ecuación 15.7 se convierte en

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} \tag{15.8}$$

las posiciones de los planos principales son

$$HH_1 = \frac{f_1 d}{D} = 0 \qquad H_2' H' = \frac{f_2' d}{D} = 0$$

o sea, coinciden con los de la lente; luego puede tomarse como sistema equivalente de dos lentes delgadas otra lente delgada cuya distancia focal imagen sea la f' dada por la ecuación 15.8, y $f = -f'$.

Al recíproco de la distancia focal imagen se le llama *convergencia*, o sea, $C = 1/f'$. Si la distancia f' se expresa en metros, la convergencia vendrá dada en *dioptrías*. Las lentes convergentes tienen convergencia positiva y las divergentes, negativa. En la asociación de lentes delgadas yuxtapuestas podemos decir (ec. 15.8) que la convergencia de la lente equivalente es igual a la suma de las convergencias de las lentes que asociamos. Asociando, yuxtapuestas, dos lentes convergentes, la equivalente también lo es. Si son las dos divergentes también lo será la equivalente. Si una es convergente y la otra divergente, la equivalente será convergente o divergente según que la convergencia de la lente convergente sea mayor o menor que la de la divergente, respectivamente.

15.4 Lentes delgadas. Las lentes delgadas son lentes esféricas en las cuales el espesor es despreciable frente a los radios de curvatura y se puede considerar prácticamente nulo, con lo que los vértices de los dos dioptrios se confunden en un punto. La lente se puede representar como un segmento perpendicular al eje principal donde coinciden los planos principales. En los extremos de dicho segmento colocaremos una punta de flecha, si es convergente y hacia arriba en la parte superior; al revés, en la inferior. Si es divergente, la punta se coloca en sentido contrario al caso anterior. En la figura 15.5 ya se ha hecho esta representación.

Las distancias focales, en función del índice de refracción y de los radios de curvatura, se calcularán por la ecuación 15.2. El centro óptico coincide con el punto de intersección del segmento represen-

tativo con el eje principal. La construcción gráfica de las imágenes producidas por la lente puede hacerse trazando un rayo paralelo al eje, que emerge de la lente pasando por el foco imagen, y otro rayo que, partiendo del mismo punto, pase por el centro óptico. Según sabemos, emerge paralelo al incidente y, como el espesor es despreciable, continúa en la misma dirección. El punto de intersección con el rayo anterior será la imagen del punto objeto.

Para la determinación analítica de la posición de la imagen utilizamos la ecuación 15.3, siendo p y p' las distancias a la lente del objeto y de la imagen, respectivamente.

Suponiendo el objeto a la izquierda de la lente ($p < 0$), despejando de la ecuación 15.3 obtenemos

$$p' = \frac{f'}{p - f'} p$$

si $f' > 0$ (lente convergente), será $p' > 0$ (imagen real si $|p| < f'$, o sea si el objeto está a la izquierda de F. Si está entre F y la lente, $p' < 0$ y la imagen se forma en el espacio objeto, a la izquierda de la lente; es una imagen virtual. El aumento lateral es $y'/y = p'/p$, pero antes hemos escrito en la fórmula $-p$ por haber supuesto que el objeto estaba a la izquierda, así que

$$\frac{y'}{y} = -\frac{f'}{p - f'} \tag{15.9}$$

que es negativo para las imágenes reales, las cuales serán invertidas, y positivo para las virtuales, que serán derechas. En la fórmula anterior se observa que el tamaño de la imagen será tanto mayor cuanto más cerca del foco esté el objeto, si bien su imagen se forma en puntos cada vez más alejados.

Si la lente es divergente, es $f' < 0$,

$$p' = \frac{-f'}{p + f'} p$$

y las imágenes se forman siempre en el espacio objeto; son virtuales. El aumento

$$\frac{y'}{y} = \frac{f'}{p + f'}$$

es siempre positivo y menor que la unidad. Las imágenes serán siempre derechas y menores que el objeto y se formarán, según hemos dicho, a la izquierda de la lente.

El lector puede comprobar, gráficamente, todo lo dicho anteriormente acerca de las imágenes producidas por las lentes delgadas, convergentes y divergentes.

Problema. Tenemos un pequeño objeto situado perpendicularmente al eje principal de una lente convergente de distancia focal imagen f'. Debemos colocar una pantalla para que se forme la imagen de este objeto en ella. Si la lente se mueve con velocidad constante v a lo largo de su eje principal, determínese la celeridad de la pantalla para que la imagen se forme siempre en ella.

La pantalla debe ser perpendicular al eje principal y la distancia de la pantalla al objeto es

$$x = p + p' = p + \frac{f'}{p - f'} p = \frac{p^2}{p - f'}$$

Para que la imagen sea real, P debe estar a la izquierda de F. Si en la posición inicial lo está, como al mover la lente hacia la derecha (fig. 15.6) F también lo

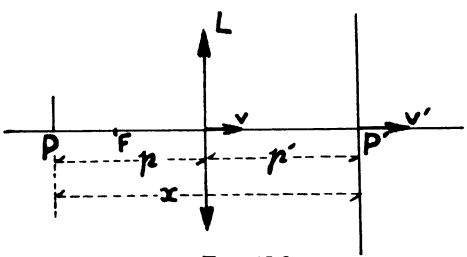


FIG. 15.6

hace, siempre tendremos imagen real. Moveremos la lente hacia la derecha y también la pantalla. Para determinar la celeridad, derivaremos respecto al tiempo la relación anterior, obteniendo:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(p - f')\, 2p\, (dp/dt) - p^2\, dp/dt}{(p - f')^2} = \frac{p}{p - f'} \cdot \frac{dp}{dt}$$

$\frac{dx}{dt} = v'$ es la celeridad de la pantalla, $\frac{dp}{dt}$ es la de la lente, luego:

$$v' = \frac{p}{p - f'} v$$

15.5 Reflexión como caso particular de la refracción: Espejos. La ley de la reflexión, atendiendo al convenio de los signos, puede expresarse en la forma $i = -r$. En la refracción $\text{sen } i / \text{sen } \theta = n'/n$, siendo i el ángulo de incidencia, θ el de refracción, n' el índice de refracción del segundo medio y n el índice del medio donde se halla el rayo incidente. Si hacemos $\theta = -r = i$, tenemos

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } (-i)} = \frac{n'}{n}; \quad \text{de donde} \quad \frac{n'}{n} = -1 \quad \text{o bien} \quad n = -n'$$

Así que si en las fórmulas de la refracción consideramos $n'/n = -1$ tendremos, como caso particular, la reflexión.

Podremos estudiar la reflexión en un espejo esférico considerando un dioptrio esférico del mismo radio y en el que $n = -n'$. Sea un espejo convexo ($R > 0$) y la ecuación 14.3 nos da el foco imagen

$$f' = \frac{n'}{n' - n} R = \frac{n'}{n' + n'} R = \frac{R}{2}$$

y la 14.4 nos da el foco objeto

$$f = -\frac{n}{n' - n} R = -\frac{-n'}{n' + n'} R = \frac{R}{2}$$

de lo que deducimos que el foco objeto y el foco imagen coinciden en un punto situado a $R/2$ a la derecha del vértice del espejo, o sea en el punto medio del segmento que une el vértice con el centro de curvatura. La ecuación 14.7, que nos da la imagen de un punto, en la aproximación de Gauss, se convierte en

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{2}{R} \tag{15.10}$$

El aumento lateral es

$$\beta = -\frac{f x'}{f' x} = -\frac{x'}{x}$$

En los espejos convexos, los objetos situados a la izquierda del mismo ($x < 0$) dan la imagen a la derecha del vértice

$$x' = \frac{R x}{2 x + R} \qquad (x' \text{ siempre positivo})$$

El aumento lateral $-x'/x$ es siempre positivo. Las imágenes son derechas. El valor de dicho aumento

$$\beta = \frac{R}{2 x + R}$$

es siempre inferior a la unidad.

Las imágenes son siempre derechas, menores que el objeto y virtuales, formadas por la prolongación de los rayos reflejados.

En la figura 15.7 se ve la construcción gráfica. Se traza un rayo paralelo al eje que, después de reflejado, pasa por el foco. Otro rayo

que pasa por el centro de curvatura no se desvía. La intersección de estas prolongaciones nos da la imagen deseada.

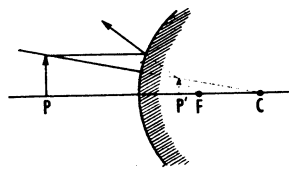


FIG. 15.7 Espejo esférico convexo.

Si el espejo es cóncavo ($R < 0$), las distancias focales $f = f' = -R/2$ son iguales. Los focos coinciden en un punto situado a la izquierda del vértice a una distancia del mismo igual a la mitad del radio de curvatura. La ecuación 15.10 será ahora

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = -\frac{2}{R} \tag{15.11}$$

Situando el objeto a la izquierda ($x < 0$), la ecuación 15.11 nos da, despejando x', la posición de la imagen

$$x' = \frac{R\,x}{R - 2\,x}$$

Para los objetos situados en puntos entre el foco y el espejo, $x' > 0$, imagen virtual, y para los situados a distancias del vértice mayores que la focal, la imagen es real ($x' < 0$).

Si el punto está en el centro de curvatura $x = R$ (en valor absoluto), $x' = -x$, la imagen coincide con el objeto.

El aumento lateral será

$$\beta = \frac{R}{R - 2\,x}$$

y las imágenes virtuales son siempre mayores y derechas, mientras que las reales, cuando el punto se halla entre el centro de curvatura

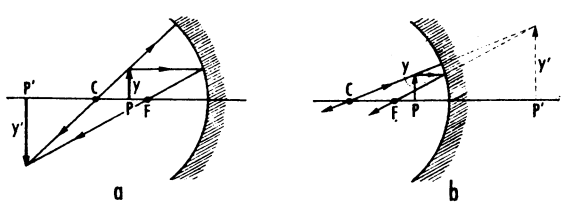


FIG. 15.8 Espejos esféricos cóncavos.

y el foco, son mayores e invertidas; pero si la distancia al vértice es mayor que el radio, las imágenes son menores e invertidas (fig. 15.8 *a* y *b*).

Un espejo plano puede considerarse como un espejo esférico de radio infinito. Las ecuaciones 15.10 y 15.11 se convierten en

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = 0$$

Siendo $x < 0$, resulta $x' = x$, la imagen se forma a la derecha del espejo. Es virtual y como el aumento lateral es igual a la unidad, la imagen tiene las mismas dimensiones que el objeto y es derecha. En realidad, la imagen es la figura simétrica del objeto respecto al plano del espejo.

Problema. En una habitación, de sección recta rectangular, las paredes son espejos planos. Tenemos un punto luminoso *P* y un observador en el centro, a la misma altura que *P*, observa la luz procedente del punto después de haberse reflejado en las cuatro paredes. Dibújense las trayectorias de los sucesivos rayos reflejados.

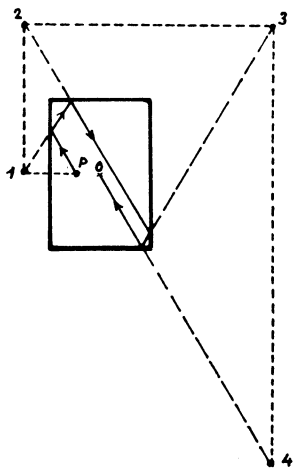


FIG. 15.9

Basta dibujar el simétrico de *P* (fig. 15.9) respecto la primera pared, luego el simétrico del antes dibujado con respecto a la segunda y así sucesivamente. Basta unir el punto *O* del observador con el último punto simétrico, la intersección de esta recta con el simétrico anterior, etc., para obtener los rayos reflejados, donde puede comprobarse que cumplen con las leyes de la reflexión.

Puede comprobarse fácilmente que si un espejo gira cierto ángulo, el rayo reflejado gira un ángulo doble. Esto se utiliza para aumentar

la sensibilidad de algunos aparatos de medida, en particular galvanómetros, en los que el cuadro móvil lleva un espejo que refleja un rayo luminoso. Cuando gira el cuadro, y por tanto el espejo, el rayo reflejado gira un ángulo doble y produce una mancha luminosa en una escala adecuada, lo cual aumenta la sensibilidad de dicho aparato.

15-6 Combinación de espejos y lentes. Es un caso particular de combinación de sistemas ópticos.

Un espejo puede considerarse como sistema óptico cuyos planos principales coinciden en el vértice y cuyos focos coinciden en un punto situado a $R/2$ del vértice, o en el punto medio del segmento determinado por el centro de curvatura y el vértice. Se opera como en § 14.14.

Ejemplo. Tenemos una lente delgada convergente, cuya distancia focal $f' = 3$ cm. A 6 cm a su derecha colocamos un espejo cóncavo de radio 4 cm cuyo centro está sobre el eje principal de la lente. Hállese el sistema óptico equivalente y la imagen de un objeto pequeño situado a 4 cm de la lente y a su izquierda.

$$d = 6 \text{ cm} \qquad f_1' = 3 \text{ cm} \qquad f_2 = -2 \text{ cm} \qquad D = 6 - 3 - 2 = 1 \text{ cm}$$

$$HH_1 = f_1\, d/D = -18 \text{ cm} \qquad H_2'H' = f_2'\, d/D = -12 \text{ cm}$$

$$(f_2 = f_2' = 2 \text{ cm}) \qquad f = f_1 f_2/D = 6 \text{ cm} \qquad f' = -f_1' f_2'/D = 6 \text{ cm}$$

El plano principal objeto está situado a 18 cm a la izquierda de la lente, el plano principal imagen a 12 cm a la izquierda del espejo. El foco imagen del sistema equivalente, a 6 cm a la derecha del plano principal objeto y el foco imagen a 6 cm a la derecha del plano principal imagen.

Para determinar la posición de la imagen, vemos que, estando a 4 cm a la izquierda de la lente está a 14 cm a la derecha de H, luego $p = 14$ cm. Así que aplicando la ecuación 14.33 hallamos

$$\frac{6}{14} + \frac{6}{p'} = 1; \qquad p' = 10{,}5 \text{ cm}$$

la imagen está a 1,5 cm a la izquierda del espejo.

Podíamos haber hallado la imagen directamente, calculando primero la dada por la lente y la que da de ésta el espejo.

$$\frac{-1}{-4} + \frac{1}{p_1'} = \frac{1}{3}; \qquad p_1' = 12 \text{ cm}$$

está a la derecha del espejo, situada a $12 - 6 = 6$ cm del mismo; así que su imagen estará situada en p_2' que vamos a calcular

$$\frac{-2}{6} + \frac{-2}{p_2'} = 1; \qquad p_2' = -1{,}5 \text{ cm}$$

situada a 1,5 cm del espejo a su izquierda.

El lector puede resolver el problema gráficamente y obtendrá los anteriores resultados.

16

Instrumentos ópticos

16.1 El ojo como instrumento óptico. La forma del ojo es sensiblemente esférica. Su envoltura externa se llama *esclerótica,* que en su parte anterior es transparente y se llama *córnea.* La esclerótica está revestida interiormente por una membrana oscura, llamada *coroides,* que en su parte anterior, al llegar a la córnea, se separa de la esclerótica y queda formando el diafragma *iris,* con una abertura circular llamada *pupila,* la cual regula la intensidad de la luz entrante, al variar su diámetro de 2 a 8 mm. Inmediatamente detrás del iris se encuentra el *cristalino,* lente convergente, no del todo homogénea, cuyo índice de refracción medio es 1,42 y su espesor de 3,6 mm. Esta lente, que es elástica, cambia de curvatura por la acción del músculo ciliar y, por tanto, varía su distancia focal. El fondo del ojo está recubierto por la retina, en la cual terminan gran número de fibras del nervio óptico. En la retina se forman las imágenes de los objetos exteriores. La retina está constituida por células cilíndricas (bastoncitos) y cónicas (conos), dispuestas una al lado de otra y perperdiculares a la superficie de la retina. Las células más sensibles a la luz son los conos. En las distintas partes de la retina, la distribución de conos y cilindros es diferente, de aquí que la sensibilidad varíe. La máxima sensibilidad está en la mancha amarilla, que es donde no hay más que conos y en gran cantidad; dicha mancha está situada en la parte de la retina opuesta a la pupila, casi junto al eje óptico del sistema; su diámetro es de unos 2 mm. A la entrada del nervio óptico, el ojo no tiene sensibilidad (no hay conos ni bastoncitos); a este punto se le llama punto ciego. Entre la córnea y el cristalino existe un líquido transparente llamado humor acuoso, cuyo índice de refracción es de 1,336; entre el cristalino y la retina existe un líquido transparente y viscoso de índice de refracción prácticamente igual al anterior.

Vamos a considerar un ojo normal como un sistema óptico. El ojo enfocado al infinito, considerado como sistema óptico, está representado en la figura 16.1. Como los índices extremos no son iguales, la relación entre las distancias focales

$$-\frac{f'}{f} = \frac{n'}{n} = \frac{22{,}74}{-17{,}06} = 1{,}336$$

Los planos principales casi coinciden; su distancia es de 0,25 mm. Estando el plano principal objeto a 1,35 mm detrás de la córnea. Dada la pequeña distancia de los planos principales, puede suponerse coincidentes y considerar el sistema óptico que constituye el ojo como instrumento óptico, como un dioptrio esférico de índice de refrac-

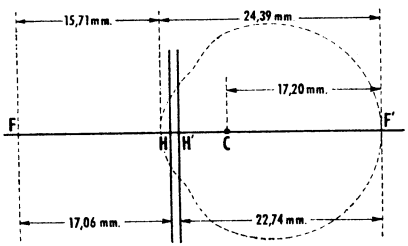


FIG. 16.1 El ojo como sistema óptico.

ción 1,33 colocado en el aire y cuyo vértice estaría a unos 2 mm detrás de la córnea, el centro a 6 mm también detrás de la córnea, y distancias focales objeto e imagen respectivamente —17 mm y 23 mm. Puede también considerarse equivalente a una lente delgada en el aire situada en el centro óptico C (a 6 mm detrás de la córnea) y de distancia focal 17 mm.

El campo de visión del ojo se extiende a todos los objetos situados dentro de un cono de vértice la pupila y de abertura unos 130°. Pero la visión nítida es para las imágenes formadas sobre la mancha amarilla; entonces el campo de visión es mucho menor, siendo el ángulo de unos 45′. Dada la movilidad del globo ocular, pueden observarse objetos por visión directa de forma que las imágenes se formen en la mancha amarilla, explorando un objeto extenso. Sin mover la cabeza, sólo con el movimiento ocular, el campo de visión nítida alcanza el valor de unos 40°.

Estando el foco imagen del sistema óptico que constituye el ojo sobre la retina, las imágenes de los objetos alejados se forman directamente sobre la retina. Cuando queremos ver con nitidez objetos

cercanos debemos acomodar, es decir, el músculo ciliar varía la curvatura del cristalino de modo que la imagen se forme en la retina. Cuando el objeto está a distancia inferior a 15 cm, un ojo normal no puede verlo con nitidez, debido a que no se puede acomodar la visión a estas pequeñas distancias. A esta distancia que varía de 15 a 20 cm se le llama *distancia mínima de visión neta* (o distinta). Al lugar donde está situado el punto observado en este caso se le llama *punto próximo*. Se llama *punto remoto* al más lejano lugar donde puede estar un objeto para poder verlo con nitidez; para un ojo normal está en el infinito.

16.2 Defectos de convergencia y de acomodación. Los defectos de convergencia son debidos a que la curvatura del cristalino es distinta de la normal. Estos defectos son:

MIOPÍA. Cuando la curvatura del cristalino sin acomodación es demasiado elevada. El foco imagen del sistema óptico queda delante de la retina de modo que la imagen de un punto alejado se forma antes de la retina. El punto remoto estará situado a cierta distancia. En este caso el punto próximo estará más cercano a la lente que en el caso de ojo normal; la distancia mínima de visión neta puede ser de unos 5 cm. Para corregir este defecto se usa una lente divergente, de manera que la posición del foco imagen sea la correcta. La distancia focal de la lente divergente usada será igual a la distancia del punto remoto (distancia máxima de la visión distinta), ya que esta lente formará una imagen virtual en el punto remoto de los rayos que provienen del infinito y entrarán en el ojo como si viniesen del punto remoto, que es el foco de la lente divergente. Además del punto remoto, el punto próximo de un ojo miope corregido vuelve a ser el normal.

HIPERMETROPÍA. Es cuando el cristalino sin acomodar es poco convergente. El foco imagen está detrás de la retina; en este caso la imagen de los objetos muy alejados se forma detrás de la retina; para verlos es necesario acomodar. En este caso el punto remoto es virtual y el punto próximo está más lejos de lo normal (por ejemplo puede valer 50 cm). Para corregir este defecto se usan lentes convergentes de distancia focal igual a la distancia máxima de la visión neta, pues los rayos procedentes de puntos muy alejados formarán su imagen real en el punto remoto y de esta forma el ojo verá los objetos lejanos sin acomodación. Al mismo tiempo, si el ojo conserva la facultad de acomodación, la distancia mínima de la visión neta será la normal.

DEFECTOS DE ACOMODACIÓN. La facultad de acomodación disminuye con la edad de la persona. El punto remoto se mantiene en el infinito, pero el punto próximo se aleja. A este defecto se le llama *presbicia.* Un ojo normal que con el tiempo se transforme en présbita deberá usar lentes convergentes para ver objetos cercanos (por ejemplo, para leer), y verá los objetos lejanos sin necesidad de lentes. Cuando la facultad de acomodación es casi nula, la persona necesitará varias lentes convergentes de distancia focal aproximadamente igual a la distancia del objeto que desea ver, ya que entonces el haz incidente es paralelo y forma su imagen en la retina. Si la persona es miope y con la edad se hace présbita, necesitará lentes convergentes para ver objetos cercanos, y lentes divergentes para objetos alejados.

Además de los citados defectos de convergencia y de acomodación, existe otro defecto, debido a que las superficies que limitan los dioptrios en el ojo no son de revolución y sus secciones meridianas tienen distinta curvatura. Se pone de manifiesto este defecto, llamado *astigmatismo,* al observar dos rectas perpendiculares situadas en un plano, pues se ve claramente una de ellas o la otra según que acomode a una u otra de las dos focales (citadas al hablar de astigmatismo de sistemas). Para corregir este defecto se usan lentes cilíndricas adecuadas, de manera que siendo sus generatrices paralelas a uno de los planos de simetría del ojo, tenga una convergencia tal, que logre que la focal paralela a sus generatrices coincida en posición con la otra.

16.3 Agudeza visual. Sean dos puntos luminosos A y B; sus imágenes formadas en la mancha amarilla son A' y B'. Si las imágenes se forman sobre el mismo cono, la sensación de imagen es única y los puntos se perciben como un punto único. Si las imágenes A' y B' se forman en dos elementos distintos de la mancha amarilla, percibiremos los puntos como separados. Designemos por α al ángulo que forman las uniones de los puntos con el centro óptico del ojo. Llamaremos agudeza visual del ojo al menor valor del ángulo α para el cual los puntos A y B se perciban como separados.

Puede determinarse experimentalmente colocando una regla graduada en milímetros en posición vertical y observándola normalmente a distancias cada vez mayores hasta que no se perciban los trazos netamente separados. El ángulo, expresado en radianes, que forma el centro óptico del ojo con los dos trazos centrales es la agudeza visual del ojo del observador. Como el ángulo es muy pequeño, puede sustituirse el ángulo por la tangente, y entonces tenemos: tangente de la mitad del ángulo, igual a la mitad de la distancia entre trazos dividido por la distancia; luego el ángulo aproximadamente

será igual a la distancia entre trazos dividido por la distancia. En este caso, la distancia entre trazos es un milímetro. Expresando la distancia en milímetros y hallando el cociente tendremos la agudeza visual. Su valor es del orden de $3 \cdot 10^{-4}$ radianes; o sea, empezaremos a no distinguir con nitidez los trazos a partir de 3 m.

Hay que tener presente que para un mismo observador la agudeza visual depende de la forma de los objetos observados, del brillo de los mismos, del fondo frente al cual están situados y de la fatiga ocular del observador debida a reiteradas observaciones.

La mínima distancia entre dos puntos para que puedan verse netamente separados será cuando los observemos a una distancia igual a la mínima distancia de visión neta. Para un ojo normal esta distancia vale unos 15 cm. La separación de los dos puntos debe ser como mínimo

$$3 \cdot 10^{-4} \cdot 15 \text{ cm} = 45 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Un ojo miope para el cual la mínima distancia de visión neta es menor, por ejemplo 5 cm, la mínima distancia entre dos puntos para que se los vea netamente separados es menor; en nuestro ejemplo sería

$$3 \cdot 10^{-4} \cdot 5 = 15 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Un miope contemplando un objeto a la mínima distancia de visión neta ve más detalle que un observador con la vista normal contemplando a la mínima distancia de visión neta.

16.4 Lupa. Es una lente convergente con la cual, colocando un objeto de forma adecuada, percibiremos su imagen ampliada. Así, pues, dos puntos de un objeto se verán bajo un ángulo mayor y podremos ver separados dos puntos que a simple vista no era posible distinguir. Según lo dicho al final del párrafo anterior, deducimos que la lupa, al aumentar la convergencia del ojo, aumenta la facultad de poder distinguir entre sí dos puntos próximos y por lo tanto observar un objeto con mayor detalle.

Para que la imagen se vea derecha y mayor, es necesario que el objeto esté entre la lente y el foco objeto, y para verla con nitidez debe estar situado dicho objeto a una distancia igual o mayor que la distancia mínima de visión neta. Si queremos contemplar la imagen sin acomodación, debe estar el objeto en el plano focal objeto, ya que entonces la imagen se forma en el infinito.

FORMACIÓN DE IMÁGENES EN LA LUPA. La imagen de un objeto observado con una lupa se construye como en el caso de una lente con-

vergente estando el objeto entre la lente y el foco imagen. Si consideramos la lupa como lente gruesa, debemos conocer la posición de los planos principales además de las distancias focales (las cuales tienen el mismo valor).

AUMENTO DE UNA LUPA. Es la relación entre el ángulo bajo el cual se ve la imagen desde el centro óptico del ojo y el ángulo bajo el cual se ve el objeto desde el mismo punto situado a una distancia igual a la mínima de visión neta. Considerando la lupa como lente

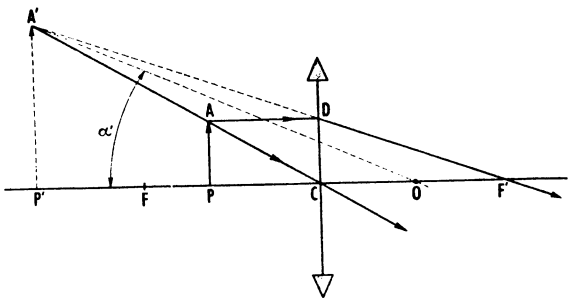


FIG. 16.2 Lupa.

convergente delgada y siendo los ángulos pequeños, pueden sustituirse los ángulos por su tangente. Situado el ojo con su centro óptico en O distante a de F', siendo $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{AP}{d}$, y teniendo en cuenta la figura 16.2 se verifica:

$$\text{tg}\ \alpha' = \frac{A'P'}{d'} \qquad A = \frac{\alpha'}{\alpha} \simeq \frac{A'P'}{AP}\,\frac{d}{d'}$$

siendo d' la distancia OP', y d la mínima distancia de visión neta. De los triángulos $F'A'P'$ y $F'DC$ deducimos

$$\frac{A'P'}{DC} = \frac{P'F'}{CF'}$$

pero $\qquad DC = AP \qquad P'F' = d' + a \qquad CF' = f' = f$

$$\frac{A'P'}{AP} = \frac{d' + a}{f} \qquad A = \frac{d' + a}{f}\,\frac{d}{d'} = \frac{d}{f}\left(1 + \frac{a}{d'}\right) \qquad (16.1)$$

Si el objeto se encuentra en el plano focal, la imagen se forma en el infinito y no necesitamos acomodación para observarla; en este

caso $d' = \infty$ y el aumento vale $A = \dfrac{d}{f}$ (si $a = 0$ ocurre lo mismo), expresando el aumento en función de la convergencia de la lente $C = \dfrac{1}{f}$ y considerando que la distancia mínima de visión neta es 25 cm = 0,25 m, el aumento vale $A = 0{,}25\ C = \frac{1}{4} C$, midiendo la C en dioptrías. El aumento vemos que es directamente proporcional a la convergencia de la lente. Suponiendo que el centro óptico del ojo coincide con el de la lente (es decir, muy próximo a él), entonces $a = f$, y si la imagen se forma a una distancia del ojo igual a la mínima de la visión neta, $d' = d$ y el aumento vale

$$A = \frac{d}{f}\left(1 + \frac{f}{d}\right) = \frac{d + f}{f} = 1 + \frac{d}{f} \tag{16.2}$$

el aumento lateral

$$\beta = \frac{A'P'}{AP} = \frac{d' + a}{f} \quad \text{si } a = f \text{ y } d = d' \quad \beta = \frac{d + f}{f} = 1 + \frac{d}{f}$$

coincide con el angular.

Potencia de una lupa. Es una característica propia, prescindiendo de las características visuales del observador, y es igual a la relación entre el ángulo formado por los extremos de la imagen con el centro óptico del ojo y la altura del objeto (supuesto paralelo a la lupa)

$$p = \frac{\alpha'}{AP} = \frac{\dfrac{A'P'}{d'}}{AP} = \frac{A'P'}{AP}\,\frac{1}{d'} = \frac{1}{f}\left(1 + \frac{a}{d'}\right)$$

$$\text{si} \quad a = 0 \quad \text{o si} \quad d' = \infty \quad p = \frac{1}{f} \tag{16.3}$$

la potencia de la lupa coincide con su convergencia.

16.5 Microscopio. El microscopio es un sistema óptico con el cual pueden observarse objetos muy pequeños. Dicho sistema óptico consiste esencialmente en un objetivo y un ocular. El objetivo está constituido por un sistema de lentes (para corregir las aberraciones) convergente y de pequeña distancia focal. Dicho objetivo forma una imagen real del objeto de mayor tamaño e invertida. El ocular actúa como una lupa que nos da una imagen virtual mayor que la imagen formada por el objetivo.

FORMACIÓN DE LA IMAGEN. El objeto se coloca cerca del foco objeto del objetivo y debe formarse entre el foco objeto del ocular y éste, para que el ocular nos dé una imagen virtual y mayor (debe formarse cerca del foco). La imagen que vemos con el microscopio es invertida respecto al objeto observado, ya que el objetivo invierte la imagen y el ocular no. En la figura 16.3 representamos la marcha de los rayos en el microscopio.

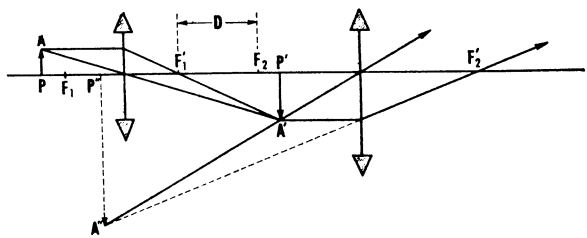


FIG. 16.3 Marcha de los rayos en el microscopio.

Para facilitar el dibujo se consideran objetivo y ocular lentes delgadas cuando en realidad cada uno de ellos está constituido por un sistema de lentes. En realidad necesitaríamos conocer las distancias focales y la posición de los planos principales, y la construcción sería como la realizada al hablar de la combinación de sistemas ópticos.

Para que un observador vea la imagen de un objeto a través del microscopio debe *enfocar* éste, o sea lograr que la imagen se forme a una distancia del ojo del observador superior a la mínima distancia de la visión neta. Para ello se podría mover el objetivo, para una posición fija del objeto antes de su foco objeto, hasta ver la imagen con nitidez. En realidad, para enfocar lo que se hace es mover el tubo que contiene objetivo y ocular, manteniendo constante su distancia. Para dicho movimiento, el microscopio tiene dos tornillos de enfoque, uno de movimiento rápido y el otro de movimiento lento, para precisar el enfoque.

PROFUNDIDAD DE CAMPO. Es la distancia entre dos posiciones del objeto observado, tales que sus correspondientes imágenes se formen en el punto próximo y en el remoto del observador. En un microscopio la profundidad de campo es muy pequeña, pues al estar el objeto próximo al foco objeto del objetivo, al desplazar muy poco el objeto el desplazamiento relativo de la imagen real es grande, y al formarse esta imagen cerca del foco objeto del ocular, el desplazamiento relativo al objeto de la imagen final es mayor aún. Sien-

do la profundidad de campo tan pequeña, el enfoque del microscopio deberá hacerse con cuidado, ayudados por el tornillo de movimiento lento.

AUMENTO DEL MICROSCOPIO. Como en el caso de la lupa, se define el aumento del microscopio como la razón del ángulo bajo el cual se ve desde el centro óptico del ojo la imagen dada por el microscopio al ángulo bajo el cual se ve el objeto desde el mismo punto cuando está situado a la mínima distancia de visión neta. Sustituyendo los ángulos por las tangentes y supuesto el ojo en F_2' tenemos (fig. 16.3):

$$A = \frac{\dfrac{P''A''}{P''F_2'}}{\dfrac{PA}{d}} \quad \text{pero} \quad \frac{P''A''}{P''F_2'} = \frac{P'A'}{f_2} \qquad A = \frac{P'A'}{PA}\,\frac{d}{f_2}$$

Llamando f_1 y f_2 a las distancias focales del objetivo y del ocular respectivamente, y $D = \overline{F_1' F_2}$, en la figura 16.3 se verifica (considerando que la imagen dada por el objetivo se forma muy cerca de F_2):

$$\frac{P'A'}{PA} = \frac{D + f_1}{f_1}$$

como f_1 es despreciable frente a D (sus valores son respectivamente, en general, $f = 5$ mm, $D = 160$ mm), queda:

$$A = \frac{D}{f_1}\,\frac{d}{f_2} \tag{16.4}$$

El aumento lateral es igual a la razón $\dfrac{P''A''}{PA}$

$$\beta = \frac{P''A''}{PA} = \frac{\dfrac{P''A''}{P'A'}}{\dfrac{PA}{P'A'}} = \frac{\beta_2}{\dfrac{1}{\beta_1}} = \beta_1 \beta_2 \tag{16.5}$$

siendo β_1 y β_2 los aumentos laterales del objetivo y ocular respectivamente. Así pues:

El aumento lateral del microscopio es igual al producto del aumento lateral del objetivo por el aumento lateral del ocular.

Si la imagen se forma a una distancia del centro óptico del ojo igual a la mínima de la visión neta, entonces el aumento lateral coincide con el aumento angular.

Con la aproximación antes citada, al ser f_1 pequeño vemos que el aumento angular del objetivo vale D/f_1 y el del ocular d/f_2, y su producto vale el aumento hallado antes. En un microscopio existe un juego de objetivos y oculares cambiables que nos permiten distintos aumentos.

POTENCIA DEL MICROSCOPIO. Es la razón del ángulo que forma el centro óptico del ojo unido con los extremos de la imagen a la altura del objeto. Sustituyendo ángulo por tangente

$$p = \frac{\dfrac{P''A''}{P''F'}}{PA}$$

Como

$$A = \frac{\dfrac{P''A''}{P''F_2'}}{\dfrac{PA}{d}} = \frac{\dfrac{P''A''}{P''F'}}{PA} \cdot d$$

vemos que

$$p = \frac{A}{d} = \frac{D}{f_1 f_2} \tag{16.6}$$

Según vimos al estudiar la combinación de sistemas ópticos, la distancia focal objeto del sistema óptico que constituye el microscopio

$$f = \frac{f_1 f_2}{D}$$

De aquí vemos que la potencia del microscopio es

$$p = \frac{1}{f} \tag{16.7}$$

16.6 Anteojo astronómico. Es un instrumento óptico destinado a la observación de los astros. Consta de un objetivo que forma la imagen del astro en su plano focal y un ocular que sirve para ampliar la imagen dada por el objetivo. El objetivo es un sistema de lentes convergentes de distancia focal relativamente grande (algunos metros); el ocular, también convergente, tiene una distancia focal pequeña (algunos centímetros). Generalmente, en cada anteojo hay un juego de

oculares de distintos aumentos que se utilizan en cada caso concreto según las necesidades. El objetivo da una imagen real e invertida y el ocular da una imagen virtual que también será invertida respecto al objeto.

FORMACIÓN DE LA IMAGEN. En la figura 16.4 representamos la formación de la imagen. La imagen del objetivo se forma en su plano focal y está situada muy cerca del foco objeto del ocular y entre dicho

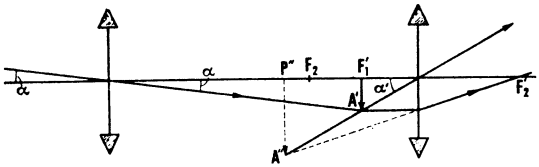


FIG. 16.4 Marcha de los rayos en el anteojo astronómico.

foco y el ocular. La imagen es virtual y mayor. Si el foco imagen del objetivo coincide con el foco objeto del ocular, la imagen se forma en el infinito y no hay necesidad de acomodación. Cuando los focos citados coinciden, el sistema se llama afocal (los focos del sistema están en el infinito).

Para enfocar el anteojo moveremos el ocular respecto al objetivo hasta lograr que la imagen se forme a distancia superior a la mínima de la visión neta. Si no queremos acomodar, la formaremos a distancia superior a la del punto remoto (o en el infinito).

AUMENTO DEL ANTEOJO ASTRONÓMICO. En este caso, el aumento no puede definirse como en los casos anteriores, ya que el objeto está muy lejos. El aumento que podemos considerar útil al observador se define como la razón del diámetro aparente de la imagen (ángulo bajo el cual el ojo ve su diámetro) al diámetro aparente del objeto observado. De la figura 16.4 se desprende que el diámetro aparente de la imagen es α' y el del objeto es α. Siendo los ángulos pequeños, sustituiremos ángulo por tangente y tenemos:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\dfrac{F_1'A'}{f_2}}{\dfrac{F'A'}{f_1}} = \frac{f_1}{f_2} \tag{16.8}$$

(supuesto que F_2 y F_1' coinciden o están muy próximos).

El aumento nominal de un anteojo astronómico es igual a la razón de la distancia focal del objetivo a la del ocular. Para lograr grandes

aumentos deberemos aumentar la distancia focal del objetivo y disminuir la del ocular.

CAMPO DEL ANTEOJO ASTRONÓMICO. Es la porción de espacio visible con dicho instrumento en las condiciones consideradas al usarlo. Se mide por el ángulo de un cono, de vértice el centro óptico del objetivo, tal que podamos observar cualquier objeto situado en su interior.

16.7 Anteojo terrestre. Es un instrumento óptico que nos permite ver un objeto lejano con mayor diámetro aparente que a simple vista, debiendo tener la imagen la misma posición relativa al suelo que el objeto (no puede dar imagen invertida). Para lograr la inversión de imagen en un anteojo astronómico para convertirlo en terrestre, podemos añadir una lente convergente (en algunos casos, dos), colocada en forma conveniente nos dará una imagen invertida de la que nos ha formado el objetivo, y por lo tanto tendremos una imagen derecha. El utilizar dos lentes tiene la ventaja de enderezar la imagen y ampliarla. Un inconveniente de estos anteojos es su excesiva longitud, lo cual dificulta el transporte para las observaciones terrestres en distintos lugares. Como ejemplo de anteojo terrestre tenemos el catalejo. Para evitar este inconveniente se utiliza el anteojo de Galileo,

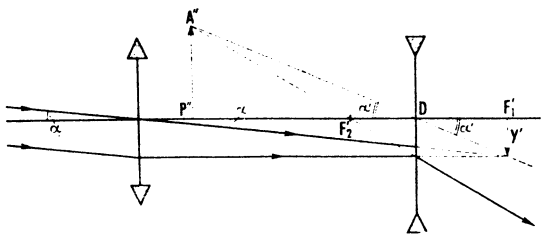


FIG. 16.5 Marcha de los rayos en el anteojo terrestre.

que en esencia consiste en un objetivo convergente y un ocular divergente. En la figura 16.5 representamos la marcha de la luz en este anteojo. Siendo el objeto lejano, el objetivo nos daría una imagen real situada en su plano focal. Antes de su foco imagen está el ocular divergente, para el cual aquella imagen actúa como objeto virtual y de la cual nos dará la imagen $A''B''$ virtual derecha y mayor.

El aumento será α'/α. Operando como en los casos anteriores, sustituyendo ángulos por tangentes, tenemos (suponiendo $DF_1' = f_2$) que entonces la imagen se forma en el infinito, y observando desde D:

$$\left.\begin{aligned}\alpha' &= \frac{y'}{f_2}\\ \alpha &= \frac{y}{f_1}\end{aligned}\right\} \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f_1}{f_2} \tag{16.9}$$

Cuando la imagen se forma en el infinito, es decir, cuando coinciden el plano focal imagen del objetivo y el plano focal objeto del ocular, la distancia entre objetivo y ocular (prácticamente la longitud del anteojo) es igual a la diferencia entre la distancia focal del objetivo y la del ocular. Para enfocar este anteojo se mueve el ocular respecto al objetivo.

Para observar un objeto con el anteojo de Galileo debe colocarse la pupila del ojo lo más cerca posible del ocular, ya que el haz luminoso emergente del ocular es divergente y así tendremos más claridad en la imagen.

16.8 Telescopio reflector. Actualmente, para la observación astronómica se utilizan generalmente los telescopios reflectores, es decir, los que utilizan un espejo en lugar del objetivo refractor de los anteojos astronómicos. El espejo acostumbra ser cóncavo parabólico y de gran perímetro (el del observatorio de Monte Palomar es de unos 5 m de diámetro), construido con vidrio de coeficiente de dilatación pequeño. Un objetivo refractor del tamaño de los espejos usados en los telescopios tendría gran poder separador, pero es irrealizable por las dificultades que se presentarían.

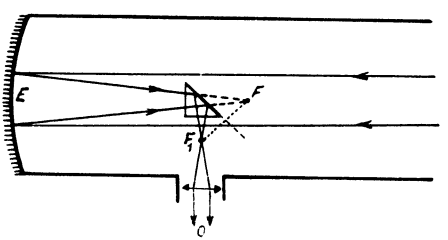


FIG. 16.6 Telescopio reflector. Método de Newton.

Para observar la imagen sin alterar los rayos incidentes puede seguirse varios métodos, entre los que destacamos dos. En el método de Newton, los rayos procedentes del objeto (astro), prácticamente paralelos, se reflejan en el espejo E (fig. 16.6) y formarían su imagen en F, pero encuentran un prisma de reflexión total y la imagen es F_1 (simétrica de F respecto a la cara del prisma opuesta al ángulo recto).

Esta imagen en F_1 se observa con un ocular O cuya distancia focal sea tal que obtengamos una imagen virtual y mayor.

En el método de Cassegrain, los rayos reflejados en el espejo se reflejan de nuevo (fig. 16.7) en un pequeño espejo convexo hiperbólico, cuyo eje es el mismo que el del cóncavo, y estos rayos reflejados

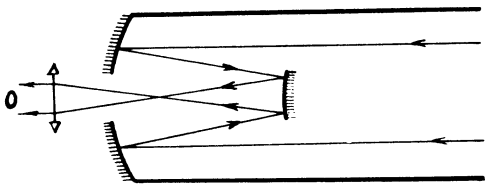


FIG. 16.7 Telescopio reflector. Método de Cassegrain.

pasan a través de un orificio existente en el centro del espejo parabólico y van a parar a un ocular O. El aumento de un telescopio se define como en los anteojos astronómicos (ec. 16.8) y vale el cociente entre la distancia focal del espejo y la del ocular.

16.9 Cámara fotográfica. Es un aparato cuya parte óptica consiste en un objetivo convergente que nos forma la imagen de un objeto sobre una placa o película sensible. Se logra formar la imagen en la placa (enfocar) variando la distancia del objetivo a la placa.

Debido a que la abertura del haz incidente es mayor que en los anteojos astronómicos y que la imagen sobre la placa debe ser nítida, el objetivo debe estar muy bien corregido de aberraciones. La entrada de luz se regula con un diafragma de anchura variable (iris) que nos permite variar la abertura del haz incidente. La abertura del diafragma depende de la iluminación del objeto que se pretende fotografiar y del tiempo de exposición. Un objetivo es más claro o *luminoso* cuando exige menor tiempo de exposición a igualdad de iluminación del objeto. Por otra parte el tiempo de exposición depende de la sensibilidad de la película. Hay que calcular el tiempo de exposición en función de la sensibilidad de la película, iluminación del objeto y abertura del diafragma. Si el objeto es inmóvil puede tenerse el diafragma a pequeña abertura y prolongar el tiempo de exposición, tanto más cuanto menor sea la iluminación.

AUMENTO. Es la razón del tamaño de la imagen al del objeto. Dicho aumento es igual a la razón de la distancia focal del objetivo a la distancia del objeto a fotografiar.

PODER SEPARADOR. Es la menor distancia entre dos puntos que puedan distinguirse en la prueba fotográfica. Depende de las aberra-

ciones de esfericidad, las aberraciones cromáticas y el diámetro de las pupilas (que puede originar fenómenos de difracción). Aparte del sistema óptico, el poder separador depende del grano de la placa (variable con la sensibilidad).

CAMPO ANGULAR. Se llama *campo total* a la porción de espacio en el interior del cono formado por los rayos que atraviesan el objetivo. Se llama *campo de nitidez* a la porción de espacio que está comprendido dentro del cono formado por los rayos que pasan por el objetivo y dan una imagen aceptable de los objetos situados en aquel espacio. Si el ángulo de abertura del cono que define el campo de nitidez es inferior a 50°, el objetivo correspondiente se llama *pequeño angular* y si es superior a 75° se llama *gran angular.*

PROFUNDIDAD DE CAMPO. Supongamos que enfocamos un plano vertical. Los objetos situados en dos planos paralelos a éste, uno antes y otro después, nos dan en la placa imágenes nítidas. Llamaremos profundidad de campo a la mayor distancia entre aquellos dos planos con tal de que las imágenes en la placa sean nítidas. Esta profundidad aumenta al aumentar la distancia del objeto al objetivo y al disminuir la abertura del diafragma.

PROFUNDIDAD DE FOCO. Si queremos fotografiar un objeto contenido en un plano deberemos colocar la placa en el plano conjugado respecto del plano objeto. Colocando la placa antes y después de dicho plano conjugado obtenemos imágenes nítidas. A la mayor distancia entre los planos donde podemos colocar la placa para obtener imagen nítida de un mismo plano objeto se llama *profundida de foco.*

ABERTURA RELATIVA DEL OBJETIVO. Se llama abertura relativa del objetivo al cociente entre el diámetro del diafragma y la distancia focal del objetivo. El tiempo de exposición depende de la iluminación de la imagen sobre la película y es inversamente proporcional al cuadrado de la abertura relativa del objetivo. Se conviene en tomar los tiempos de exposición proporcionales a 2^n ($n = 0, 1, 2, \ldots$), o sea, a 1, 2, 4, ... Las aberturas relativas, y por tanto los diámetros del diafragma, serán inversamente proporcionales a la raíz cuadrada de estos números, o sea, a 1, 1,4, 2, 2,8 ... En el diafragma del objetivo se suele indicar el correspondiente valor, que serán los valores anteriores multiplicados por una constante.

16.10 Aparato de proyección. Sirve para obtener sobre una pantalla una imagen real y mayor de un determinado objeto. Consta de un objetivo convergente delante del cual colocamos el objeto (trans-

parente) a una distancia del objetivo comprendida entre la distancia focal y el doble de la misma, de esta forma la imagen es real y mayor. El objeto se ilumina de manera adecuada y se coloca invertido para que la imagen sea derecha.

El aumento del aparato de proyección es igual a la razón del tamaño de la imagen al del objeto y es igual a la razón de la distancia de la pantalla al objetivo a la del objeto al mismo. Aproximadamente es igual a la distancia de la pantalla al objetivo dividida por su distancia focal.

Para que la imagen sea clara es preciso una buena iluminación del objeto (placa o película). Se logra con un sistema de lentes (condensador) que nos concentre sobre el objeto a proyectar el haz de rayos procedente del foco luminoso. En algunos casos se coloca detrás del foco luminoso un espejo cóncavo para aprovechar todos los rayos que salen de él.

Si hay que proyectar un objeto opaco se coloca horizontalmente y se ilumina fuertemente; por medio de un espejo, mandamos los rayos luminosos al objetivo y de aquí van a la pantalla como antes.

17

Optica física

Ya hemos indicado (§ 13.1) que la teoría de la emisión de NEWTON se abandonó y fue sustituida por la teoría ondulatoria iniciada por HUYGENS, que obraba por analogía con las ondas sonoras, y continuada por FRESNEL, quien la estableció de manera definitiva. Podemos extender a las ondas luminosas lo establecido en el capítulo 11 del tomo I, lo cual es aceptable en líneas generales, si prescindimos del origen y la producción de las ondas.

La Óptica geométrica aparece como consecuencia de las leyes de la teoría ondulatoria. Sólo admitiendo el principio de Huygens (§ 11.6, tomo I) hallamos las leyes de la reflexión y de la refracción (§ 11.7, tomo I) encontrando los mismos resultados que se deducen del principio de Fermat (§ 13.4).

Además de interpretar los fenómenos propios de la Óptica geométrica, nos proporciona una explicación correcta de los fenómenos puramente ondulatorios (interferencias, difracción, etc.), lo cual no era posible usando solamente los principios de dicha Óptica geométrica. Por tanto, la teoría ondulatoria es más general y contiene a la Óptica geométrica como caso particular.

17.1 Teoría ondulatoria de la luz. Para adaptar a las ondas luminosas lo dicho en el movimiento ondulatorio armónico (§ 11.1, tomo I), prescindiremos del significado de la y, expresando que la luz es un fenómeno periódico y que el estado luminoso, o perturbación luminosa, en un punto P, que recibe luz de un foco luminoso distante x de P, viene definido por una variable luminosa y, en dicho punto, que vale (§ 11.1, tomo I):

$$y = A \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \tag{17.1}$$

en donde v es la celeridad de la onda luminosa en el medio donde se propaga. El valor máximo de la variable luminosa es la amplitud A, cuyo significado se aclarará más adelante. La ω es, como en el caso del movimiento armónico, la pulsación. El significado del período T es el propio de toda función periódica, y si lo hallamos en la ecuación 17.1 resulta ser $T = 2\pi/\omega$. En una onda luminosa, el período, o su inverso $1/T = f$, la frecuencia, caracterizan el color de la luz correspondiente a la onda luminosa. Si la onda es policromática, estará constituida por la superposición de ondas monocromáticas, cada una con un período T característico. El valor del período, o de la frecuencia, es independiente del medio por donde se propaga la onda, por lo que una onda monocromática que atraviesa distintos medios, conserva su color. Si la onda es policromática al refractarse, como el índice de refracción depende del período, se desviarán desigualmente las normales a las ondas superpuestas y aparece el fenómeno de la *dispersión*, tanto más acentuado cuanto mayor sea la variación del índice (poder dispersivo del medio). La longitud de onda tiene significado análogo al dado en la ecuación 11.2 del tomo I, y la variable luminosa puede expresarse, según la ecuación 11.3 del tomo I:

$$y = A \text{ sen } 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \tag{17.2}$$

En el vacío, $\lambda_0 = c\,T$ y en un medio cualquiera $\lambda = v\,T$, de donde

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{c}{v} = n \qquad \lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

o sea, que la longitud de onda depende del medio, y la ecuación 17.2 puede escribirse:

$$y = A \text{ sen } 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{n\,x}{\lambda_0} \right) \tag{17.3}$$

La intensidad de un movimiento ondulatorio se vio (§ 11.4, tomo I) que era directamente proporcional al cuadrado de la amplitud; $I = K\,A^2$. En Óptica física se admite esta relación entre la intensidad y la amplitud. El significado de la I es análogo: energía luminosa que atraviesa la unidad de superficie, normalmente a ella, en la unidad de tiempo. El significado de A no es el mismo,* la relación admi-

* En la teoría mecánica de las ondas luminosas, según se dijo en § 13.1, la variable luminosa era la elongación de una partícula de «éter» en torno a su posición de equilibrio, con el mismo significado que en las ondas elásticas, y la

tida se justifica plenamente en Óptica electromagnética (§ 12.2) en donde A es la amplitud del campo eléctrico o del magnético que constituyen la onda electromagnética y la constante K tiene un valor perfectamente determinado.

También podemos extender a la luz lo dicho en § 11.5, relativo a la absorción de las ondas. Tendremos un coeficiente de absorción β dependiente del medio y de la longitud de onda λ.

17.2 Interferencias luminosas; coherencia. Vamos a extender a la Óptica física lo indicado en § 11.9, tomo I, relativo a las interferencias de ondas. Ahora podemos expresar que: el estado luminoso en un punto, alcanzado por dos ondas luminosas de aproximadamente la misma dirección y del mismo período, vendrá definido por una variable luminosa, y, que será la suma de las variables luminosas de las ondas que llegan al citado punto. Si la primera onda produce, en el punto considerado, un estado luminoso definido por la variable luminosa

$$y_1 = A_1 \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{x_1}{v}\right)$$

y la segunda otro definido por

$$y_2 = A_2 \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{x_2}{v}\right)$$

el estado luminoso total será el definido por la variable luminosa

$$y = y_1 + y_2$$

hallando los mismos resultados que en § 11.9, tomo I. Es decir: la condición de máximo es (cfr. ec. 11.16, pág. 192, tomo I)

$$x_2 - x_1 = k\,\lambda$$

y la condición de mínimo (cfr. ec. 11.17, tomo I)

$$x_2 - x_1 = (2\,k + 1)\,\frac{\lambda}{2}$$

Sin embargo, en Óptica debemos considerar que la luz utilizada en la práctica es debida a filamentos incandescentes o a gases en los

amplitud A era el valor máximo de esta elongación. Es preferible hablar de ondas luminosas, como hemos hecho al principio del capítulo, sin mencionar el significado de la variable luminosa ni citar el éter, necesario para las teorías mecánicas, pero no para la teoría electromagnética.

que se ha excitado la luminiscencia, los cuales son focos luminosos constituidos por gran cantidad de focos microscópicos que emiten trenes de ondas en intervalos de tiempo pequeñísimos. La onda resultante la podemos considerar función sinusoidal del tiempo y del mismo período (luz monocromática), pero cuya fase no es constante pues varía para cada tren de ondas emitido. Las ecuaciones anteriores para y_1 e y_2 las debemos escribir en función de una fase inicial:

$$y_1 = A_1 \operatorname{sen}\left[\omega\left(t - \frac{x_1}{v}\right) + \theta_1\right]$$

$$y_2 = A_2 \operatorname{sen}\left[\omega\left(t - \frac{x_2}{v}\right) + \theta_2\right]$$

siendo θ_1 y θ_2 las fases iniciales. La condición de máximo será (diferencia de fases igual a un múltiplo de 2π)

$$\omega \frac{x_2 - x_1}{v} + \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$$

o bien

$$x_2 - x_1 + \frac{\lambda}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) = k\lambda$$

Si $\theta_1 - \theta_2$ es variable para cada tren de ondas, no tendremos definida la condición de máximo. Lo mismo podríamos decir de la de mínimo. Los focos luminosos se dice que son incoherentes. En todo punto alcanzado por ondas incoherentes no puede producirse el fenómeno de las interferencias. El estado luminoso debido a la superposición sería más o menos uniforme, pues al variar $\theta_1 - \theta_2$ las condiciones de máximo y de mínimo se sucederían rápidamente y en promedio observaríamos la indicada uniformidad. Para poder lograr el fenómeno de las interferencias en las ondas luminosas deberemos utilizar las ondas procedentes de un mismo foco luminoso. En este caso usamos los mismos trenes de ondas y por tanto $\theta_1 - \theta_2 = 0$; las condiciones de interferencias serán entonces la de la ecuación 11.16, p. 192, tomo I, para los máximos, y la de la ecuación 11.17, p. 192, tomo I, para los mínimos. Las ondas que cumplen la condición de que la diferencia entre las fases iniciales es nula, o que la diferencia de fases es estacionaria (independiente del tiempo), se dice que son ondas *coherentes,* y son las únicas que producen interferencias. Es prácticamente imposible hallar dos focos luminosos distintos coherentes; por esto, antes hemos indicado que para lograr interferencias debemos operar con un mismo foco luminoso, cuya luz alcance el punto

donde se producen las interferencias siguiendo dos caminos distintos y cuya diferencia de marcha cumpla con las ecuaciones 11.16 u 11.17 del tomo I, según queramos hallar los máximos o los mínimos. Hay que advertir que los caminos recorridos no pueden ser grandes, pues el tiempo de emisión de un tren de ondas es del orden de 10^{-8} s. En este tiempo, la luz ha recorrido un camino de unos pocos metros (según el medio), y para distancias mayores podrían llegar trenes de ondas distintos y no se cumpliría la condición de interferencia.

Si las ondas procedentes del mismo foco luminoso recorren caminos en medios distintos para llegar al punto de interferencia, la longitud de onda es distinta. Utilizaremos en este caso la ecuación 17.3 para hallar la diferencia de fases. La condición de máximo será

$$2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{n_1 x_1}{\lambda_0}\right)-2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{n_2 x_2}{\lambda_0}\right)=2k\pi$$

de donde

$$n_2 x_2 - n_1 x_1 = k\lambda_0 \tag{17.5}$$

la de mínimo será

$$n_2 x_2 - n_1 x_1 = (2k+1)\frac{\lambda_0}{2} \tag{17.6}$$

o sea: *en los puntos donde la diferencia de caminos ópticos recorridos por los rayos luminosos que los alcanzan, sea igual a un múltiplo de la longitud de onda en el vacío* ($\lambda_0 = c\,T$), *la amplitud de la variable luminosa será máxima* (suma de amplitudes) y por tanto *será máxima la intensidad* de la onda en dichos puntos. *Si la diferencia de los caminos ópticos fuese un múltiplo impar de una semilongitud de onda en el vacío, la amplitud sería mínima* (diferencia de amplitudes) y la *intensidad también mínima.* Siendo luz procedente del mismo foco luminoso, podemos tomar las amplitudes A_1 y A_2 iguales. En el caso de máximo, la amplitud será el doble y la intensidad cuatro veces mayor que la de cada una por separado, en dicho punto. En el mínimo, la amplitud será nula, lo mismo que la intensidad.

Generalmente consideramos las interferencias producidas por dos ondas o dos haces luminosos, pero podemos considerar también la producida por varios haces, la cual recibe el nombre de *interferencia múltiple.*

Para que llegue al punto de interferencia la luz procedente de un foco luminoso, podemos separar dos haces luminosos y hacerles recorrer caminos distintos; este método se llama de separación o

división de ondas y se usa cuando el foco es puntiforme o muy poco extenso. Puede usarse otro método que consiste en conseguir que un haz luminoso se refleje y se refracte parcialmente y que el haz reflejado y el refractado, siguiendo caminos distintos, se encuentren en el punto de interferencia; este método recibe el nombre de *división de amplitud* y puede utilizarse en el caso de focos luminosos extensos y sus efectos son más acentuados que en el método anterior. A continuación vamos a describir diversos métodos de producción de interferencias luminosas.

17.3 Experimento de Young. El experimento de Young fue (en 1801) la primera comprobación experimental de la teoría ondulatoria de la luz. Para realizar su experimento, YOUNG hacía llegar luz solar a un pequeño orificio practicado en una pantalla. Este pequeño orificio actuaba como centro secundario de la teoría de Huygens, las ondas procedentes del mismo alcanzaban dos pequeños orificios muy próximos en otra pantalla, paralela a la anterior, y a su vez estos orificios actuaban como centros secundarios y daban lugar a dos ondas coherentes que podían interferir y que daban unas franjas de interferencia, máximos y mínimos de intensidad, en una pantalla. Vamos a estudiar este experimento, considerando luz monocromática (actualmente se hace con pequeñas rendijas paralelas próximas, en lugar de orificios). En § 11.9, tomo I, decíamos que los lugares geométricos de los puntos que cumplían la condición de máximo o los de mínimo están sobre una familia de hiperboloides de revolución homofocales. En este caso, los focos serían los orificios. Si colocamos una pantalla paralela a la que contiene los orificios, observaremos franjas alternativamente claras y oscuras que son las intersecciones de los hiperboloides con el plano de la pantalla. Estas intersecciones son hipérbolas, pero dada la pequeña distancia entre los focos, y considerando que la distancia existente entre la pantalla donde se observan las franjas y la que contiene los orificios es grande frente a la distancia entre agujeros, las intersecciones son *prácticamente* rectas de dirección normal a la de la recta que une los dos orificios.

Vamos a representar esquemáticamente dicho experimento (figura 17.1). Los orificios son dos focos coherentes F_1 y F_2. La distancia entre los orificios es h y la de la pantalla P a la que contiene los focos es D. Tracemos la mediatriz del segmento F_1F_2, la cual corta a la pantalla en un punto O' equidistante de F_1 y de F_2; la diferencia de caminos seguidos por la luz para ir de F_1 a O' y de F_2 a O' es, pues, nula. En O' tendremos un máximo, sea cual fuera la posición de la pantalla. Por encima y por debajo de O' tendremos franjas alternati-

vamente oscuras y claras, también independientemente de la posición de la pantalla. Dichas franjas se dice que no están localizadas, pues varía su separación al hacer variar la posición de la pantalla. Para calcular los mínimos, o franjas oscuras, impondremos la condi-

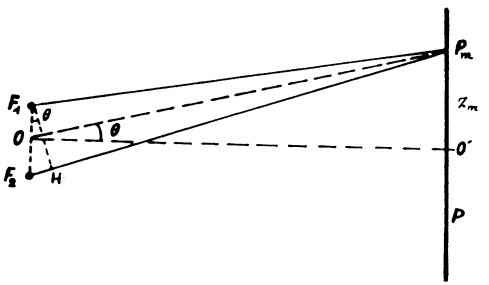


FIG. 17.1 Experimento de Young.

ción 17.6, que ahora coincide con la ecuación 11.17, tomo I, pues los haces luminosos se propagan por el mismo medio: el aire. Sea el punto P_m un punto de mínimo. Debe cumplirse que

$$F_2P_m - F_1P_m = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$$

Dada la pequeña separación de F_1 y F_2 y que D es mucho mayor que F_1F_2, la distancia F_1H es, prácticamente, la diferencia entre las distancias F_2P_m y F_1P_m, la cual es igual a h sen θ. Como θ es pequeño, podemos tomar el seno prácticamente igual a la tangente, y como tg $\theta = P_mO'/D$, tendremos, si llamamos z_m a la distancia P_mO',

$$F_2P_m - F_1P_m = \frac{h\,z_m}{D} \tag{17.7}$$

y de la condición de mínimo

$$\frac{h\,z_m}{D} = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \qquad z_m = (2k + 1)\frac{D\,\lambda}{2\,h} \tag{17.8}$$

dando a k los valores 0, 1, 2, ..., tendremos la posición de las franjas oscuras.

Para hallar la posición de las franjas claras, aplicaremos la condición de máximo, teniendo en cuenta la ecuación 17.7

$$\frac{h\,z_M}{D} = k\,\lambda \qquad z_M = \frac{D\,\lambda}{h}\,k \tag{17.9}$$

en donde ahora z_M nos da la distancia de la franja O' a la clara. Haciendo $k = 0, 1, 2, \ldots$, hallaremos las posiciones deseadas. Observemos que para $k = 0$ tenemos la posición coincidente con O' que antes hemos indicado. La separación entre franjas claras y oscuras será

$$S = z_M - z_m = \frac{D\lambda}{2h}$$

que es constante para luz monocromática. Si la luz no fuese monocromática, las z y las separaciones entre franjas dependerán de la longitud de onda, excepto en la franja central ($k = 0$) donde tendríamos máximo para todas las longitudes de onda. Si la luz fuese blanca, la franja central sería blanca y la posición de los máximos sería distinta para cada color, siendo el primer máximo el de la longitud de onda más pequeña y luego se presentarían los demás en orden a su longitud de onda. Según las condiciones del experimento, pueden superponerse los máximos de diferentes órdenes (para k distinta) de las distintas longitudes de onda. Las imágenes no serán nítidas, la observación más perfecta de las franjas es con luz monocromática y de las medidas de las distancias entre franjas puede deducirse la longitud de onda. Dado que λ es pequeña, para que S sea tal que puedan distinguirse las franjas claras y oscuras, h deberá ser muy pequeño y D grande. Si queremos calcular las intensidades en las franjas, podemos deducir una fórmula general que luego aplicaremos a este caso.

En lá página 165 del tomo I vimos cuál era la amplitud del m.a.s. resultante de la composición de dos de igual dirección y frecuencia. Si en éstos $A_1 = A_2$ y su diferencia de fase es θ, dicha amplitud resultante es

$$A^2 = 2A_1^2 + 2A_1^2 \cos\theta \qquad (17.10)$$

La intensidad de una onda es (cfr. 11.4, pág. 184, tomo I)

$$I_1 = KA_1^2 \qquad I = KA^2$$

y multiplicando los dos miembros de la ecuación 17.10 por K tendremos

$$I = 2I_1 + 2I_1 \cos\theta = 2I_1(1 + \cos\theta) = 4I_1 \cos^2\frac{\theta}{2} \qquad (17.11)$$

En nuestro caso

$$\theta = \omega\frac{x_2 - x_1}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}(F_1P - F_2P)$$

en donde P es un punto que dista z de O'. Así que escribiremos, recordando la ecuación 17.7

$$\theta = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{hz}{D}\right)$$

y la ecuación 17.11 se convierte en

$$I = 4I_1 \cos^2\left(\frac{\pi h z}{\lambda D}\right) \tag{17.12}$$

Para cada valor de z tendremos la intensidad correspondiente en el punto que dista z de O'. Para las franjas oscuras,

$$z_m = (2k+1)\frac{D\lambda}{2h}$$

la intensidad $$I = 4I_1 \cos^2\frac{(2k+1)\pi}{2} = 0$$

Para los distintos valores de z hallamos una variación gradual de intensidad, que será máxima en los puntos z_M y valdrá $I_M = 4I_1$. La ecuación 17.12 puede escribirse

$$I = I_M \cos^2\left(\frac{\pi h z}{\lambda D}\right) \tag{17.13}$$

Representando esta función $I = f(z)$ encontramos la curva de la figura 17.2, en donde indicamos los máximos M y los mínimos m por su orden en función del correspondiente valor de k. Si la luz fuese policromática, tendríamos máximos para cada color separados unos de

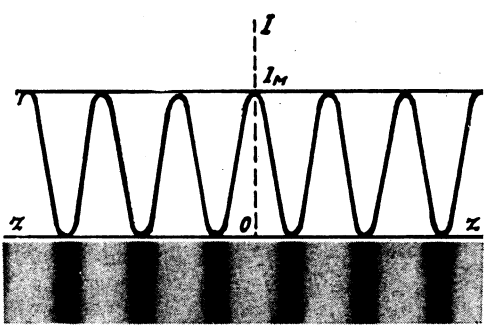


FIG. 17.2 Máximos y mínimos de intensidad en el experimento de Young.

otros, e igualmente los correspondientes mínimos. Lo que observaríamos sería una mezcla de colores y no podríamos distinguir las franjas con nitidez.*

Problema. 1.º Para el experimento de Young usamos luz amarilla de longitud de onda $\lambda = 5800$ Å, los orificios distan 1 mm y observamos las franjas en una pantalla situada a 2 m de distancia. Hállese la posición de los máximos y la de los mínimos.

2.º Supongamos que el foco luminoso se encuentra a 20 cm del plano de los orificios y que del foco al orificio F_2 tenemos aire en condiciones normales ($n_2 = 1{,}00029$) y del foco a F_1 tenemos anhídrido carbónico, también en condiciones normales, ($n_1 = 1{,}00045$). Calcúlese el desplazamiento del máximo principal.

1.º) $$z_M = k\frac{D\lambda}{h} = k\frac{2\times 58\times 10^{-8}}{10^{-3}} = k\,116\times 10^{-5}\ \text{m} = k\times 1{,}16\ \text{mm}$$

los máximos distan de O': $z_1 = 1{,}16$ mm, $z_2 = 2{,}23$ mm, ..., además del principal que está en O'.

Los mínimos,

$$z_m = (2k+1)\frac{D\lambda}{2h} = (2k+1)\,58\times 10^{-5}\ \text{m} = (2k+1)\,0{,}58\ \text{mm}$$

$z_1 = 0{,}58$ mm, $z_2 = 1{,}74$ mm, ...

2.º Apliquemos la ecuación 17.5 teniendo en cuenta que entre los orificios y la pantalla tenemos aire en condiciones normales

$$n_1FF_1 - n_2FF_2 + n_2F_1P - n_2F_2P = k\lambda$$

ya que h es muy pequeño frente a $FO = 20$ cm, $FF_1 = FF_2 \simeq FO = 0{,}2$ m y para el máximo principal $k = 0$, y por la ecuación 17.7 $F_2P - F_1P = hz/D$ resulta:

$$(n_1 - n_2)\,FO - n_2\frac{hz}{D} = 0$$

$$z = \frac{(n_1 - n_2)\,FO\cdot D}{n_2 h} = \frac{0{,}00016\times 0{,}2\times 2}{1{,}00029\times 0{,}001} = 0{,}064\ \text{m}$$

el máximo principal se desplaza 6,4 cm. Obsérvese la gran sensibilidad de los métodos interferenciales para determinar diferencias de índices de refracción, pues conociendo z podríamos hallar $n_1 - n_2$, o bien conocido uno de ellos (por ejemplo el del aire), podemos hallar el otro.

* Los colores son cada vez menos nítidos y a partir de cierta distancia a O' se tiene la impresión de blanco, que se llama *blanco de orden superior*. Observando este blanco con un espectroscopio (véase § 19.1) se obtiene un espectro que presenta rayas brillantes separadas por rayas oscuras, ya que faltan las longitudes de onda para las cuales hay mínimo. Como las rayas oscuras están distribuidas uniformemente en el espectro, se dice que el espectro es *acanalado*.

17.4 Espejos de Fresnel y dispositivos similares. Sean dos espejos, E_1 y E_2, muy poco inclinados uno respecto a otro (fig. 17.3), y F un foco de luz monocromática que manda luz hacia los espejos, la cual, después de reflejarse, puede interferir. La luz reflejada en cada espejo es como si procediese de F_1 y de F_2, simétricos de F respecto a cada uno de los espejos, y por tanto son focos virtuales. Sea P un punto de la pantalla en donde concurren los dos rayos reflejados en

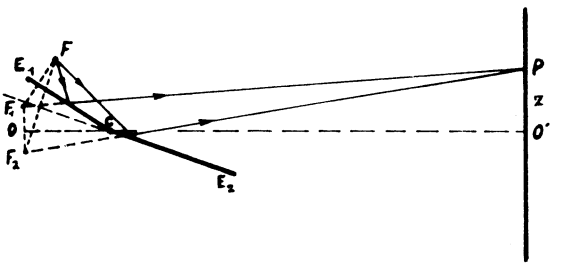


FIG. 17.3 Espejos de Fresnel.

los espejos. Tenemos un problema análogo al del experimento de Young, en que los orificios vienen sustituidos por los focos virtuales. La diferencia de marcha de los rayos será $F_2P - F_1P$; si llamamos h a la distancia F_1F_2 y D a la distancia OO', estamos en el caso del experimento de Young y podemos aplicar las ecuaciones 17.8 y 17.9 para hallar los mínimos y los máximos, respectivamente.

El valor de $h=F_1F_2$ lo podemos hallar geométricamente (fig. 17.4). Llamando R a la distancia del foco F a la intersección de los espejos C, tenemos

$$h = 2R \text{ sen } \frac{\widehat{F_1CF_2}}{2} = 2R \text{ sen } \widehat{F_1CO}$$

$$\widehat{F_1CF_2} = \widehat{FCF_2} - \widehat{FCF_1} = 2\widehat{FCE_2'} - 2\widehat{FCE_1} = 2\widehat{E_1CE_2'} = 2\alpha$$

$$\widehat{F_1CO} = \widehat{F_2CO} = \alpha$$

siendo α el ángulo que forma un espejo con la prolongación del otro. Luego $h = 2R$ sen α.

Siendo OO' la mediatriz de F_1F_2 (fig. 17.3), pasa por C y la distancia D es igual a la distancia $CO' + OC$. Para que h sea pequeña y poder observar las franjas distintamente, el ángulo α debe ser muy

pequeño. Siendo h pequeño, OC será prácticamente igual a R. Si llamamos d a la distancia de C a la pantalla ($d = CO'$), será $D = R + d$.

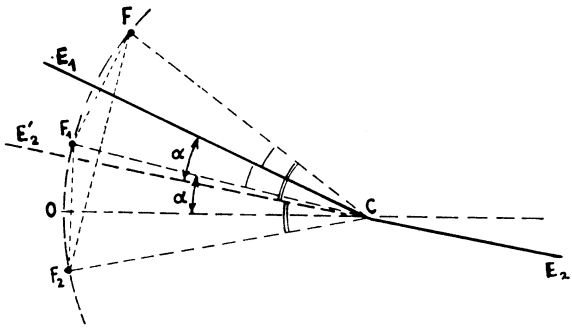


FIG. 17.4 Esquema de los espejos de Fresnel, más detallado, para el cálculo de $F_1 F_2$.

Al ser α pequeño, podemos tomar $\alpha = \text{sen } \alpha$ y $h = 2R\alpha$, con lo que las ecuaciones que dan los mínimos y los máximos, análogas a las 17.8 y 17.9, son

$$z_m = (2k + 1)\frac{(R + d)\lambda}{4R\alpha} \tag{17.14}$$

$$z_M = k\frac{(R + d)\lambda}{2R\alpha} \tag{17.15}$$

Las franjas, que deben tener dirección perpendicular a la de $F_1 F_2$, serán paralelas a la recta de intersección de los espejos (se suponen espejos rectangulares).

Problema. Determínese el ángulo entre los espejos de Fresnel tal que colocando un foco luminoso monocromático de $\lambda = 6000$ Å a 10 cm de la intersección de los espejos, se formen franjas de interferencia en una pantalla situada a 2 m de la intersección citada y los máximos disten entre sí 2 mm.

$$(z_M)_{k+1} - (z_M)_k = \frac{(R + d)\lambda}{2R}$$

sustituyendo valores

$$2 \times 10^{-3} = \frac{2{,}1 \times 6 \times 10^{-7}}{2 \times 0{,}1\,\alpha} \qquad \alpha = 3{,}15 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0{,}18° = 10{,}8'$$

como se ve, el ángulo entre un espejo y la prolongación del otro es de 10,8 minutos, que es un ángulo muy pequeño. Si no fuese así, los máximos y mínimos estarían tan próximos que no los podríamos distinguir.

Entre los dispositivos similares destacamos el espejo de Lloyd (figura 17.5): un foco luminoso F, muy poco distante de un espejo

plano E, manda luz hacia una pantalla y hacia el espejo. La luz directa y la reflejada interfieren y podemos observar las franjas en la pantalla. Las condiciones de máximo y de mínimo son las dadas por las ecuaciones 17.8 y 17.9, siendo ahora h la distancia $F\,F' = 2\,d$ (d es la distancia de F al plano del espejo) (cambio de fase).

Otros métodos son el biprisma de Fresnel y la bilente de Billet, dispositivos muy parecidos, que sirven para tener luz coherente y lograr interferencias, los cuales no vamos a detallar.

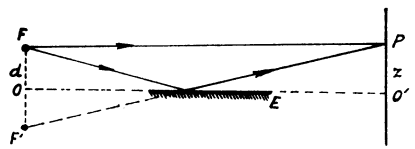


FIG. 17.5 Espejo de Lloyd.

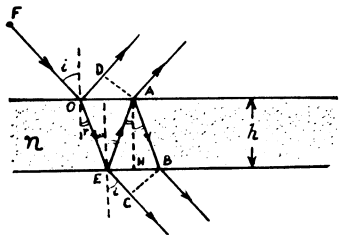


FIG. 17.6 Lámina de caras paralelas.

En todos los experimentos anteriores es evidente que puede hallarse la longitud de onda de la luz del foco monocromático, si medimos con precisión las distancias y la separación entre las franjas de interferencia.

17.5 Interferencias en láminas de caras paralelas. Consideremos un foco luminoso monocromático que manda un haz estrecho de rayos a una lámina de caras paralelas de índice de refracción n (figura 17.6). El rayo FO se refleja en parte en O y se transmite siguiendo el camino OE. Allí vuelve a reflejarse, siguiendo el camino EA y otra vez se refleja, siguiendo el camino AB. Al llegar a B emerge paralelo al que emerge de E. Por proceder del mismo foco F, ambos rayos son coherentes y por ser paralelos darían franjas en el infinito. Pero si interponemos un sistema óptico convergente, las interferencias tendrán lugar en el plano focal del sistema. Trazando desde B la perpendicular BC al rayo que emerge de E, la diferencia entre los caminos ópticos será

$$n\,(EA + AB) - EC = 2\,n\,\frac{h}{\cos\,r} - EB\ \text{sen}\ i = \frac{2\,n\,h}{\cos\,r} - 2\,h\ \text{tg}\ r\ \text{sen}\ i$$

y efectuando operaciones, la diferencia de caminos ópticos es, teniendo en cuenta que sen $i = n$ sen r,

$$n\,(EA + AB) - EC = 2\,n\,h\,\cos\,r \qquad (17.16)$$

Las condiciones de máximo y mínimo serán las expresadas por las ecuaciones 17.5 y 17.6, es decir,

$$\text{máximo:} \quad 2\,n\,h\,\cos\,r = k\,\lambda_0 \tag{17.17}$$

$$\text{mínimo:} \quad 2\,n\,h\,\cos\,r = (2\,k+1)\,\frac{\lambda_0}{2} \tag{17.18}$$

Los rayos reflejado en O y refractado en A también interfieren, pero su interferencia presenta una particularidad interesante al compararla con la anterior. La onda reflejada en O lo hace sobre un medio de índice de refracción *mayor*. En § 11.8, tomo I, vimos que cuando una onda elástica se refleja sobre un medio más resistente, sufre un cambio de fase de π radianes. La Óptica electromagnética demuestra que esto también ocurre cuando la reflexión tiene lugar sobre un medio de índice de refracción mayor que el del primer medio. Luego, el rayo reflejado en O presenta un salto de fase de π radianes que habrá que tener en cuenta para hallar las condiciones de interferencia constructiva y destructiva.

Teniendo en cuenta la ecuación 17.3, la diferencia de fase entre dos ondas, la primera de las cuales presenta un salto de fase de π radianes, será

$$2\,\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{n_1 x_1}{\lambda_0}\right)\pm\pi-2\,\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{n_2 x_2}{\lambda_0}\right)=2\,\pi\,\frac{n_2\,x_2-n_1\,x_1}{\lambda_0}\pm\pi \tag{17.19}$$

Y la condición de *máximo* se obtendrá igualando el segundo miembro de la ecuación 17.19 a $2\,k\,\pi$, de donde se deduce

$$n_2\,x_2-n_1\,x_1=(2\,k\mp 1)\,\frac{\lambda_0}{2} \tag{17.20}$$

o sea, que habrá interferencia *constructiva* en los puntos en que la *diferencia de caminos ópticos sea un número impar de semilongitudes de onda.* Pero ésta es, precisamente, la condición de *mínimo* si no hubiese habido inversión de fase. Para la condición de interferencia *destructiva* resulta inmediato que dicha diferencia de caminos ópticos ha de ser un *múltiplo de la longitud de onda,* la cual es condición de máximo en ausencia de inversión de fase. Ello no debe extrañarnos, por cuanto la fase aumenta en π radianes cuando la onda avanza media longitud de onda.

Consideremos el rayo reflejado en O, que forma el ángulo i con la normal, y el refractado en A que son paralelos e interferirían en el infinito. Si coloca-

mos la lente L (fig. 17.7) cuyo eje principal coincide con la normal a la lámina en O, los rayos anteriores interfieren en un punto del plano focal de la lente. Para hallar dicho punto trazamos una paralela a los rayos que pase por el centro óptico C de la lente y que corta al plano focal en el punto P. Este punto P es el punto donde interfieren los rayos citados. Si iluminamos con un foco extenso, tendremos numerosos pares de rayos que interferirán en el plano focal. Todos los rayos que formen un ángulo i con la normal en O constituyen un cono de semiángulo en el vértice O igual a i, e interfieren en los puntos del plano focal en que dicho plano corta al cono de vértice C y semiángulo i. Esta intersección es una circunferencia de radio FP. Las franjas de interferencia serán anillos, ya que todos los rayos que forman el ángulo i presentan el mismo ángulo de refracción r y, según la ecuación 17.16, la diferencia de sus caminos ópticos, $2\,n\,h\,\cos r$, es la misma. Vamos a calcular los radios de los anillos. Para un haz de ángulo i nulo, r también lo es, y la diferencia de caminos ópticos es $2\,n\,h$. Para la reflexión existe una inversión de fase que hemos ya considerado y resultará que si se cumple que $2\,n\,h = k_0\,\lambda_0$, tendremos mínimo (en lugar del máximo que habría si no hubiese inversión de fase). Si el haz de rayos forma un ángulo i, la condición de mínimo es $2\,n\,h\,\cos r = k\,\lambda_0$. En el primer caso, el mínimo se forma en F (rayos paralelos al eje principal que se cortan en el foco imagen F); en el segundo caso se forma en puntos distantes PF de F. Esta distancia PF es el radio del anillo oscuro R_k. Restando las dos condiciones de mínimo antes citadas tenemos

$$2\,n\,h - 2\,n\,h\,\cos r = (k_0 - k)\,\lambda_0$$

o bien

$$2\,n\,h\,(1 - \cos r) = k'\,\lambda_0$$

llamando k' a $k_0 - k$.

Téngase en cuenta que

$$k_0 = \frac{2\,n\,h}{\lambda_0} \qquad \text{y} \qquad k = \frac{2\,n\,h\,\cos r}{\lambda_0}$$

con lo que $k_0 > k$ y k' es siempre positivo.

El valor del radio es $R_k = f$ sen i. Para calcular la i correspondiente al haz que dará el anillo oscuro de radio R_k, recordemos que

$$1 - \cos r = 2\,\text{sen}^2\,\frac{r}{2}$$

y si el ángulo es pequeño (vamos a considerar incidencia casi normal)

$$\text{sen}\,\frac{r}{2} \simeq \frac{r}{2}$$

con lo que tendremos

$$n\,h\,r^2 = k'\,\lambda_0 \qquad r = \sqrt{\frac{k'\,\lambda_0}{n\,h}}$$

De la ley de la refracción, sen $i = n$ sen r y si r es pequeño también lo es i y escribimos $i = n\,r$, o sea

$$i = n\sqrt{\frac{k'\lambda_0}{n\,h}} = \sqrt{\frac{n\,k'\lambda_0}{h}}$$

y

$$R_k = f\,i = f\sqrt{\frac{n\,k'\lambda_0}{h}}$$

o bien

$$R_k = f\sqrt{k'}\sqrt{\frac{n\,\lambda_0}{h}} \qquad (17.21)$$

Los anillos serán alternativamente claros y oscuros. Si k_0 es entero, el central es oscuro; si es la mitad de un número impar, sería claro (condición de máximo). Los radios de los anillos del mismo estado de interferencia que el central varían como las raíces cuadradas de los números enteros y la distancia entre anillos disminuye a medida que se alejan del centro, como puede observarse en la fotografía adjunta. Deben observarse con luz lo más monocromática posible.

Si la lámina es delgada y observamos las interferencias para incidencia próxima a la normal, cos $r \simeq 1$, y las fórmulas anteriores se convierten en:

$$\text{máximo} \quad 2\,n\,h = k\,\lambda_0$$

$$\text{mínimo} \quad 2\,n\,h = (2\,k+1)\,\frac{\lambda_0}{2}$$

para la luz transmitida, y al revés si se tratara de la luz reflejada.

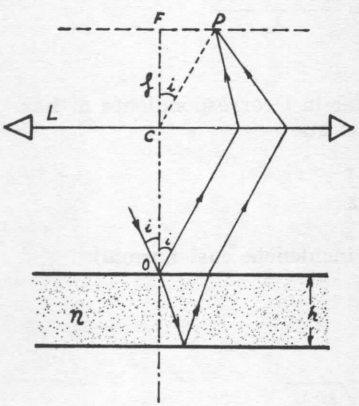


FIG. 17.7 Los rayos emergentes paralelos interfieren en el plano focal de la lente.

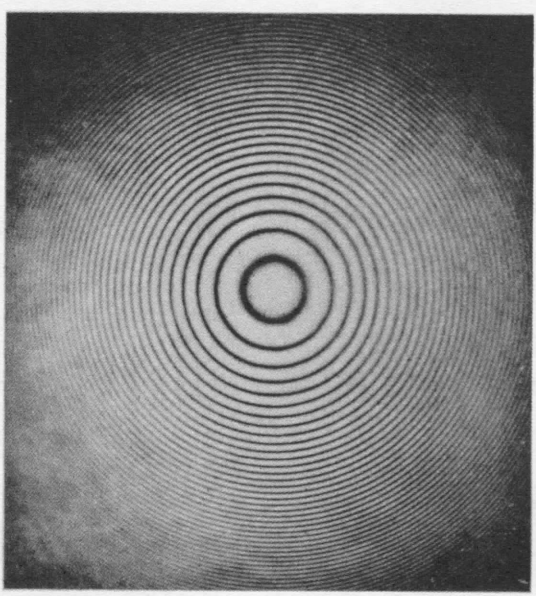


FIG. 17.7 bis Fotografía de los anillos de interferencia en una lámina de caras paralelas.

Si la lámina es delgada, pero sus caras no son paralelas, los rayos reflejado en O y refractado en A no son paralelos y pueden interferir en un punto del espacio. Si iluminamos la lámina con un foco luminoso extenso, el punto puede ser alcanzado por pares de rayos cuya diferencia de marcha sea distinta, pues proceden de puntos de distinto espesor de la lámina y, por tanto, no tendremos un efecto interferencial definido. Si consideramos los puntos de la superficie de la lámina, si es muy delgada, pueden producirse en ellos interferencias visibles definidas, al observar en dirección prácticamente normal, pues entonces no dependerá de cos r. Tenemos franjas localizadas en la superficie. Si iluminamos con luz blanca, en los mínimos tendremos extinción de un color determinado y en los máximos los colores correspondientes, con parte de los no extinguidos. Esto explica las irisaciones de las láminas delgadas (pompas de jabón, manchas de aceite sobre suelo mojado, etc.).

17.6 Anillos de Newton. Supongamos una lente planoconvexa que descansa sobre una lámina de vidrio plana y horizontal. El radio de la lente R es muy grande e iluminamos con luz monocromática normalmente a la cara plana. Un rayo, después de atravesar la lente, se refleja en la lámina y puede interferir con el rayo que sale de la lente. La diferencia de caminos ópticos es el doble de la distancia del punto de emergencia al plano. El lugar geométrico de los puntos en donde el estado interferencial es el mismo será el de los pun-

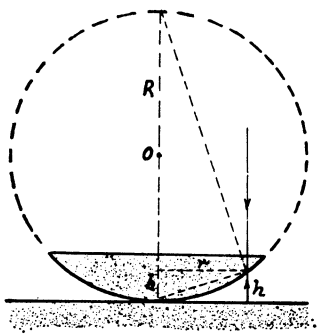


FIG. 17.8 Dispositivo para formar anillos de Newton.

tos que disten igualmente de la lámina, o sea una circunferencia de radio r igual a la distancia de dichos puntos al eje principal de la lente. Tendremos franjas circulares. Vamos a determinar el radio de las franjas o anillos claros y oscuros. En la figura 17.8 vemos que r es media proporcional entre h y $(2R - h)$, pero como h es muy pequeño frente a R, podemos despreciar h^2, frente a $2Rh$, y por tanto,

$$h = \frac{r^2}{2R}$$

Las condiciones de mínimo, teniendo en cuenta que en la reflexión en el vidrio ha habido inversión de fase, será

$$2h + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$$

de donde $2h = k\lambda$ y sustituyendo h por su valor

$$2\frac{r^2}{2R} = k\lambda \qquad r = \sqrt{kR\lambda} \tag{17.22}$$

Éste es el radio de los anillos oscuros, dando a k los valores 0, 1, ... y vemos que crecen como las raíces cuadradas de los números enteros, mientras que la distancia entre los mismos va disminuyendo a medida que se separan del vértice de la lente. Para los anillos brillantes, imponiendo la condición $2h + \lambda/2 = k\lambda$, hallamos que los radios de los mismos son proporcionales a las raíces cuadradas de las mitades de los números impares.

El anillo central ($k = 0$) es oscuro, lo cual es una comprobación del cambio de fase en la reflexión sobre el vidrio.

Si se ilumina con luz blanca, veremos anillos coloreados. En realidad veríamos coloreados los 5 ó 6 primeros anillos y a continuación observaríamos un blanco de orden superior (véase pág. 358).

El aspecto de los anillos es el mismo que el de la fotografía de la página 364.

17.7 Ondas estacionarias. En § 11.11, tomo I, vimos que dos ondas planas de la misma frecuencia y amplitud que se propagan en sentidos contrarios interfieren y dan lugar a ondas estacionarias, encontrando puntos en donde la amplitud es máxima (vientres) y otros donde es mínima (nodos). En las ondas luminosas ocurre lo mismo. Mandando un haz de rayos paralelos de luz monocromática normalmente a un espejo metálico, perfectamente reflector, las ondas incidentes interfieren con las reflejadas y dan lugar a ondas estacionarias. La distancia entre los planos ventrales y los nodales es de media longitud de onda. La teoría electromagnética de la luz explica completamente estos resultados, los cuales fueron comprobados experimentalmente en 1890 por WIENER, quien iluminó normalmente con luz violeta un espejo plateado, colocando frente a él una lámina de vidrio ligeramente inclinada, la cual soportaba una película sensible de colodión con bromuro de plata. Al revelar la película halló bandas ennegrecidas entre las cuales existían regiones transparentes, equidistantes unas y otras, siendo de media longitud de onda (unas 0,2 micras) la separación entre las zonas ennegrecidas (*máximos de* amplitud, que en Óptica electromagnética corresponde a máximos del campo eléctrico). La zona en contacto con el espejo no estaba ennegrecida, lo cual indica que corresponde a un plano nodal, que es lo que encontrábamos en § 11.11, tomo I, cuando había reflexión con inversión de fase, lo que también ocurre aquí. Basándose en lo dicho, GABRIEL LIPPMANN (1845-1921) ideó, en 1891, un método para obtener fotografías en color.

17.8 Películas antirreflectoras. Vamos a exponer una moderna aplicación de los fenómenos de interferencia. Cuando la luz penetra en un instrumento

óptico sufre diversas reflexiones en las superficies de entrada de los distintos dioptrios. Además de la pérdida correspondiente de la energía luminosa reflejada, existe otro inconveniente y es que la luz reflejada en la cara de entrada del segundo dioptrio puede reflejarse en la de salida del primero y esta luz multidireccional se suma a la incidente y perjudica a la nitidez de la imagen. La corrección de este inconveniente es muy interesante en los instrumentos ópticos, en particular en objetivos fotográficos. Para evitar esto se acostumbra recubrir la superficie del vidrio con una delgada capa de una sustancia cuyo índice de refracción esté comprendido entre el del aire y el del vidrio. De esta forma, la reflexión será con cambio de fase de π radianes tanto en la superficie de la película como en la del vidrio, con lo que si es igual a un cuarto de la longitud de onda, el camino óptico que recorre en el interior de la película la luz reflejada en el vidrio, la diferencia de caminos ópticos entre la luz que se refleja en la superficie de la película y la que lo hace en el vidrio es de media longitud de onda (la luz reflejada en el vidrio recorre dos veces el espesor de la película) y, por tanto, se destruyen por interferencia, si suponemos incidencia normal. Si llamamos d al espesor de la película y n a su índice de refracción, $n\,d = \lambda/4$. Como se comprende, la anulación será para una determinada longitud de onda. Si usamos luz blanca se toma el espesor de la lámina adecuado para la anulación de la luz amarillo-verdosa, para la cual el ojo es más sensible. Las restantes longitudes de onda son algo reflejadas, pues las interferencias pueden debilitar, pero no anular, a tales ondas y la luz reflejada, mezcla de aquéllas, se verá de un tono púrpura, algo azulado, complementario del verde-amarillo, como puede comprobarse observando la luz reflejada por ciertos objetivos fotográficos. Utilizando varias capas de espesores apropiados se pueden eliminar otros colores.

17.9 Refractometría interferencial. En el problema resuelto al final del § 17.3, vimos que los fenómenos de interferencia pueden utilizarse para la medida de índices de refracción, en particular del de los gases, para los cuales no sería posible hacerlo con los métodos de la refractometría basados en Óptica geométrica (ángulo límite, etc.).

El método se funda en el mismo experimento de Young, pero colocando un sistema óptico convergente con el foco luminoso F coincidente con el foco objeto del sistema. La luz atraviesa los orificios perpendicularmente al plano que los contiene y colocando otro sistema convergente, la luz interfiere en el plano focal imagen del mismo. Si las lentes no introducen diferencias en los caminos ópticos de los dos haces, éstos interfieren con el máximo principal en la intersección del plano focal con la dirección normal al plano de los orificios (las lentes están situadas paralelamente a este plano) y que pasa por el foco F. Si intercalamos una pequeña lámina en el trayecto de uno de los haces, la diferencia de caminos ópticos hace que el máximo principal se desplace. Si observamos este máximo con un anteojo dotado de retículo ocular, veremos pasar cierto número de franjas. Si el espesor de la lámina es d, el índice de refracción es n; colocando la lámina normalmente a la trayectoria del rayo la diferencia de caminos ópticos es $n\,d - d = (n-1)\,d$. En el punto donde antes teníamos el máximo principal ($k = 0$), ahora debe cumplirse que $(n-1)\,d = k\,\lambda_0$, hallando k, o sea, el orden de la franja correspondiente, podremos calcular n. Como es engorroso el contar las franjas, en la mayoría de refractómetros interferenciales se utilizan compensadores, que luego detallaremos.

Uno de los refractómetros interferenciales más conocido es el de *Rayleigh*,

que se utiliza para determinar índices de refracción de gases o su variación con la presión y la temperatura. En esquema está representado en la figura 17.9. Los tubos T y T', de igual longitud d, están colocados en la trayectoria de los haces. Uno contiene un gas de índice n, el otro contiene gas de índice n'. La diferencia de caminos ópticos es $(n' - n)\,d$, que será igual a la variación del orden (en este caso, si el orden era $k = 0$, será igual al orden de interferencia) por la longitud de onda λ_0. Pero ya hemos dicho que, en lugar de determinar k, pueden utilizarse compensadores adecuados. Éstos, indicados en

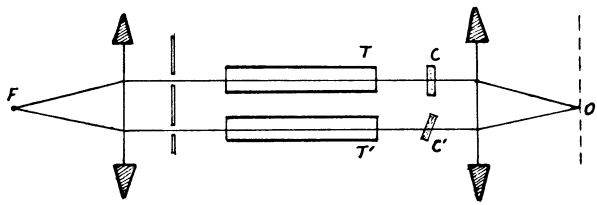


FIG. 17.9 Refractómetro interferencial de Rayleigh.

la figura 17.9 por C y C', son dos láminas de vidrio del mismo espesor y del mismo índice. Una de ellas, C, es fija y la otra, C', puede girar en torno a un eje perpendicular a la dirección de la luz. Para compensar la diferencia de caminos ópticos debidos a la diferencia de n' y n, giramos C' y con ello la luz recorre un camino mayor, igual al espesor de la lámina dividido por el coseno del ángulo girado, supuesto que las láminas inicialmente están situadas normalmente a la dirección de la luz. La compensación hace que el máximo principal vuelva a su primitiva posición. La rotación del compensador C' nos dará la diferencia de caminos ópticos. Algunos constructores de este tipo de interferómetros calibran el mismo con una longitud de onda determinada y podemos leer directamente uno de los índices, conocido el otro. El *interferómetro Zeiss* se basa en el mismo procedimiento. Este interferómetro es tan sensible que permite conocer variaciones pequeñísimas en la composición del aire. Por ejemplo, se llena uno de los tubos con aire a la presión ambiente, y el otro en comunicación con la atmósfera. Si, por ejemplo, lo tenemos en una mina de carbón y hay desprendimiento de grisú, el aparato lo detecta inmediatamente por el desplazamiento de las franjas. Existen grisúmetros basados en el aparato anterior, con ligeras modificaciones, para indicar cuándo puede ser peligrosa la proporción.

El valor de $n - 1$ para los gases corrientes, en condiciones normales de presión y temperatura, es del orden de 10^{-4} y con el refractómetro interferencial puede detectarse cambios de $n - 1$ del orden de 10^{-8}.

Otro tipo de refractómetro interferencial es el *Jamin*, que contiene el mismo sistema de tubos y compensador, pero en lugar de las ventanas de Young utiliza, para la coherencia, los dos rayos que se reflejan en las caras de entrada y salida de una lámina de vidrio, la última de las cuales está plateada. Colocando otra lámina idéntica después del compensador, paralela a la anterior, los dos rayos reflejados presentarán la diferencia de caminos ópticos que haya introducido la sustancia contenida en los tubos. Este método tiene la ventaja de que puede iluminarse con foco extenso. Las franjas son más destacadas, pero la precisión es menor por ser más sensible a variaciones de la posición de los elementos ópticos utilizados.

17.10 Interferómetro de Michelson. En la figura 17.10 representamos esquemáticamente el *interferómetro de Michelson*. De un foco luminoso F parte un haz de rayos que encuentra en A una lámina de caras paralelas y se refracta siguiendo el camino AB. Dicha lámina está semiplateada, de forma que refleja y transmite la luz por igual. Como la superficie semiespecular es la que contiene el punto B, al llegar a B la luz se refleja siguiendo el camino BC y se transmite siguiendo el camino BA'. El rayo incidente en A forma un ángulo de 45° con el plano de la lámina, con lo que el rayo emergente en C forma 45° con la normal a la lámina en este punto y, por tanto, es perpendicular a la dirección incidente. Este rayo se refleja en el espejo E y regresa hacia la lámina siguiendo el camino DG y emerge en G paralelamente a la dirección incidente en D. El rayo BA' se encuentra con una lámina de caras paralelas, idéntica y paralela a la anterior (sin semiplateado), siguiendo el camino $A'B'$, emerge en B' paralelamente a BA' y se refleja en el espejo fijo E' dirigiéndose de nuevo a la lámina siguiendo el camino $C'D'G'$. En G' se refleja y, lo mismo que el rayo emergente en G, se dirige hacia un sistema óptico S convergente, interfiriendo ambos en P. El espejo E puede desplazarse paralelamente a sí mismo, por medio de un tornillo micrométrico, en sentido de avance o retroceso. Si estuviese en la posición E_1, simétrica de E' respecto la cara semiplateada, los caminos ópticos recorridos por los dos rayos reflejados en los espejos E' y E_1 serían iguales. Efectivamente, basta observar en la figura 17.10 que los caminos BCE_1 y $BA'B'E'$ son iguales y que $E_1K'G'$ es igual al $E'C'D'G'$. Téngase en cuenta que los rayos reflejados en los espejos E' y E_1 atraviesan dos veces la lámina con la misma inclinación. Precisamente la misión de la segunda lámina no plateada es hacer que los caminos ópticos sean iguales, pues si no estuviese dicha lámina, el rayo reflejado en E_1 que atraviesa dos veces la primera lámina recorrería un camino óptico distinto del reflejado en E'. Si el espejo E está en una posición cualquiera, la diferencia de caminos ópticos es la que introduce la lámina de aire, de caras paralelas, limitada por E y E_1, luego estamos en el caso estudiado en § 17.5. Para la determinación de máximos y mínimos debe considerarse el cambio de fase en las reflexiones. El rayo reflejado en B no cambia de fase por ser vidrio-aire. En la reflexión en E cambia de fase, pues es reflexión aire-vidrio. El rayo que se refleja en E' cambia de fase y al reflejarse en G' cambia otra vez de fase, por ser aire-vidrio, así que en total hay un salto de fase de π radianes. Como en las interferencias en láminas de caras paralelas, tendremos anillos de igual intensidad.

Cuando el espejo está en E_1, la diferencia de caminos ópticos es nula, pero debido al salto de fase tendremos mínimo y el campo se ve uniformemente oscuro; se dice que existe contacto óptico entre las superficies reflectoras. Si E se desplaza paralelamente a sí mismo una distancia igual a un cuarto de longitud de onda, la diferencia de marcha varía en media longitud de onda, ya que recorre dos veces la lámina de aire, y pasamos de máximo a mínimo o viceversa. El círculo central pasa de claro a oscuro cuando E se desplaza en $\lambda/4$. Contando el número de veces que ocurre esto en cierto desplazamiento, tendremos la longitud recorrida por el espejo E, que será igual a dicho número por la cuarta parte de la longitud de onda. Esto permite determinar la longitud precisa de un patrón determinado. Se toman dos espejos paralelos que disten la longitud deseada. Colocando estos espejos en un interferómetro de Michelson podremos hallar esta distancia en longitudes de onda. Basta contar el número de veces que la zona central pasa de claro a oscuro al hacer coincidir la posición E_1 con uno u otro espejo. Para ello, si las posiciones de los espejos son dos posiciones sucesivas del E, basta desplazar el E' para lograr

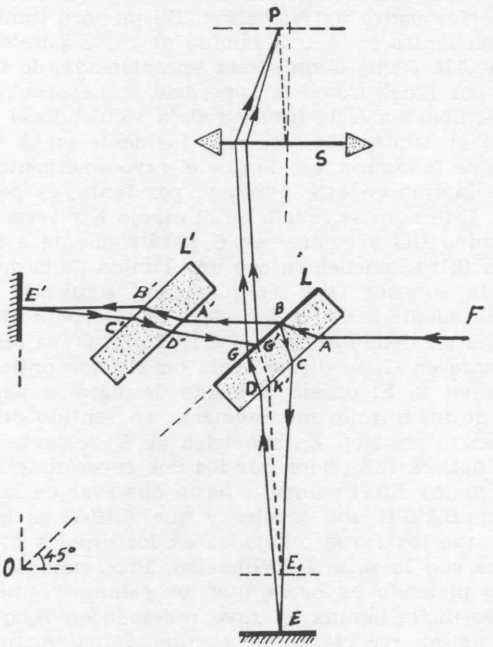


FIG. 17.10 Interferómetro de Michelson.

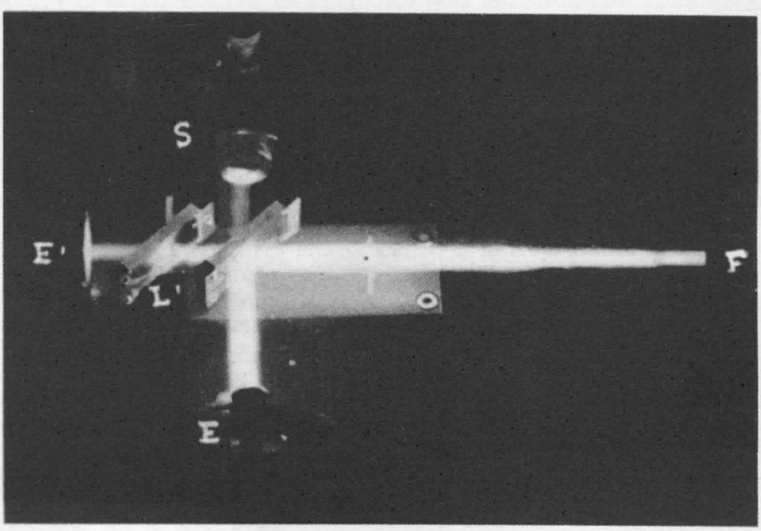


FIG. 17.10 bis Fotografía de un interferómetro de Michelson en funcionamiento

la coincidencia. Como el número de veces que cambia la zona central es grande para desplazamientos de centímetros, los patrones deben ser de pequeño espesor y si queremos una longitud más elevada se comparan entre sí patrones de longitudes crecientes, cada uno doble, aproximadamente, que el anterior y así puede calibrarse ópticamente el metro. MICHELSON y BENOIT, en 1892, calibraron el Metro Prototipo Internacional en comparación con la longitud de onda de la raya roja del cadmio. Posteriormente, en 1913, repitieron la medida BENOIT, FABRY y PEROT con mayor precisión, utilizando el *interferómetro de Fabry-Perot*, hallando que un metro es 1 553 164,1 veces mayor que la longitud de onda de la raya roja del cadmio, en el aire a 15°C, 1 atmósfera y exento de vapor de agua. La precisión es de 1 en 3 millones, lo que representa $3 \cdot 10^{-4}$ mm en un metro. De ahí que se propuso la definición del metro en función de determinada longtiud de onda. El Comité Internacional de Pesas y Medidas, en 1954, aceptó la proposición. En 1958 el Comité decidió que era más adecuada la raya del criptón de longitud de onda 6056 Å, correspondiente a la transición entre los niveles $2\,p_{10}$ y $5\,d_5$ del átomo de criptón de número de masa 86. Se propuso la definición de metro como 1 650 763,73 longitudes de onda, en el vacío, de la citada radiación. Esta definición se aprobó, en 1960, por la 11.ª Conferencia General de Pesas y Medidas. En España se aceptó al declarar de uso legal el Sistema Internacional de Unidades de Medida, en 1967.

El interferómetro de Michelson puede usarse como refractómetro interferencial, como veremos en el siguiente ejemplo.

Dos recipientes idénticos de caras paralelas perpendiculares a la dirección de la luz se colocan uno frente al espejo E y otro frente al E'. La distancia d entre las caras internas de las láminas paralelas es de 1,100 cm determinada con un error relativo inferior al $1/10^3$. Cada uno de los recipientes se llena con un mismo gas en las mismas condiciones de presión y temperatura. Practicando el vacío en uno de los recipientes, vemos que la zona central pasa de oscura a clara $N = 10$ veces. Sabiendo que la longitud de onda de la luz empleada es de 6328 Å, determínese el índice de refracción del gas utilizado, en las condiciones del experimento.

La diferencia de caminos ópticos es $(n - 1)\,d$, y debe cumplirse que $(n - 1)\,d = N\,\lambda/2$, de donde

$$n - 1 = \frac{N\,\lambda}{2\,d}$$

sustituyendo valores hallamos

$$n - 1 = \frac{10 \times 6328 \times 10^{-8}}{2 \times 1{,}1} = 2876 \times 10^{-7}$$

con la precisión de la medida de d podemos escribir

$$n - 1 = (2876 \pm 2{,}9) \times 10^{-7} \qquad \text{o sea} \qquad n = 1{,}0002876 \pm 0{,}00000029$$

17.11 Difracción. Los fenómenos de difracción, estudiados en § 11.12, tomo I, pueden extenderse a las ondas luminosas, como ya hicimos con los de interferencias. Cuando la luz se propaga a través de orificios o encuentra obstáculos en su camino, su propagación no es rectilínea y la intensidad de la onda presenta anomalías en determinadas regiones. Si los orificios, o bien los obstáculos, son peque-

ños, de dimensiones comparables con la longitud de onda de la luz empleada, el fenómeno es notable. Si las dimensiones son mayores, el fenómeno se presenta en los bordes. Pueden distinguirse dos tipos de fenómenos de difracción: Fenómenos de *difracción a distancia finita,* o de Fresnel, y fenómenos de *difracción para rayos paralelos,* también llamada difracción en el infinito o de Fraunhofer.

Para estudiar los fenómenos de difracción a distancia finita podemos aplicar el método de las *zonas de Fresnel* (cfr. § 11.12, tomo I). El radio de las zonas, dada la pequeñez de la longitud de onda de las ondas luminosas, a distancia finita es muy pequeño. Para luz de longitud de onda 6000 Å y para $b = 60$ cm, el radio de la primera zona de Fresnel (ec. 11.22, tomo I) es $R_1 = \sqrt{b\lambda} = \sqrt{600 \cdot 6000 \cdot 10^{-7}} = 0{,}6$ mm. Colocando una pantalla perpendicular a la dirección de la luz con un orificio circular de radio 0,6 mm (área igual a la primera zona), observando a una distancia de 60 cm de la pantalla, en un punto de la recta normal a ella y que pase por el centro del orificio, tendremos máximo de intensidad, tal como se indicaba en § 11.12, tomo I. La intensidad será $4\,I_0$, siendo I_0 la intensidad de la onda incidente en el orificio. El radio de la segunda zona, desde el mismo punto de observación es $\sqrt{2\,b\,\lambda} = 0{,}8484$ mm. Si el orificio fuese circular de radio 0,8484 mm, la intensidad sería prácticamente nula, pues las dos zonas oponen sus efectos. Manteniendo el orificio constante y moviendo el punto de observación a lo largo de la recta normal a la pantalla, encontraremos máximos y mínimos de intensidad. Si el orificio fuese grande, incluiría muchas zonas y no tendríamos variación. En el caso de un obstáculo circular podemos considerar el número de zonas de Fresnel que oculte. A lo largo de la normal al obstáculo no tendremos los máximos y mínimos que se presentaban en el orificio circular. La intensidad crece gradualmente al separarnos del obstáculo a lo largo de dicha recta, pues cada vez oculta menos zonas. A distancia infinita tendríamos la misma intensidad I_0, y tocando el obstáculo la intensidad es nula. Fuera de la recta tendremos distribución de intensidad anular con máximo en el punto de la recta que sería el centro de los anillos alternativamente claros y oscuros. Los anillos concéntricos también se presentan en el caso de un orificio, para puntos fuera del eje. Observando la imagen en una pantalla veríamos anillos claros y oscuros con centro en el eje normal que pasa por el centro del orificio. Esto es debido a la simetría axial que presenta el fenómeno.

En el caso de un borde rectilíneo (por ejemplo, sombra del filo de una navaja), se ven máximos y mínimos paralelos al borde con una distribución de intensidad en la que los máximos disminuyen en in-

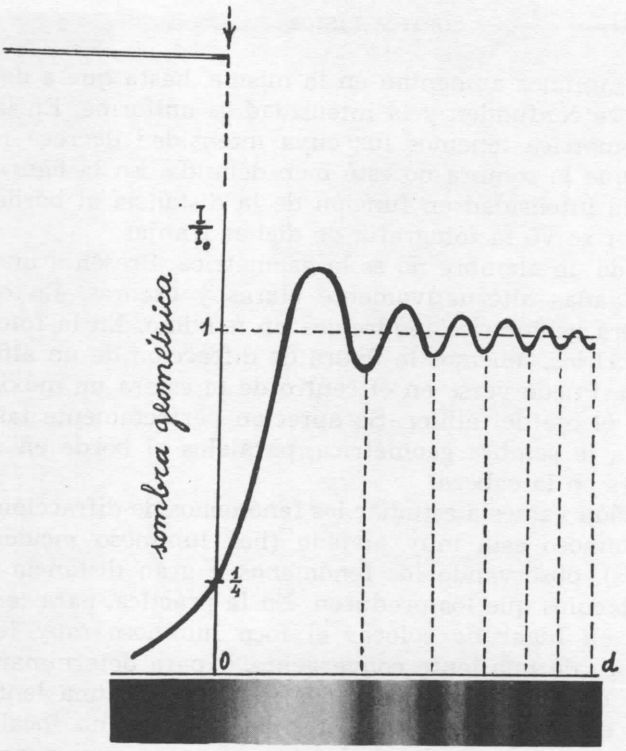


FIG. 17.11 Intensidad de las franjas de difracción de un borde rectilíneo.

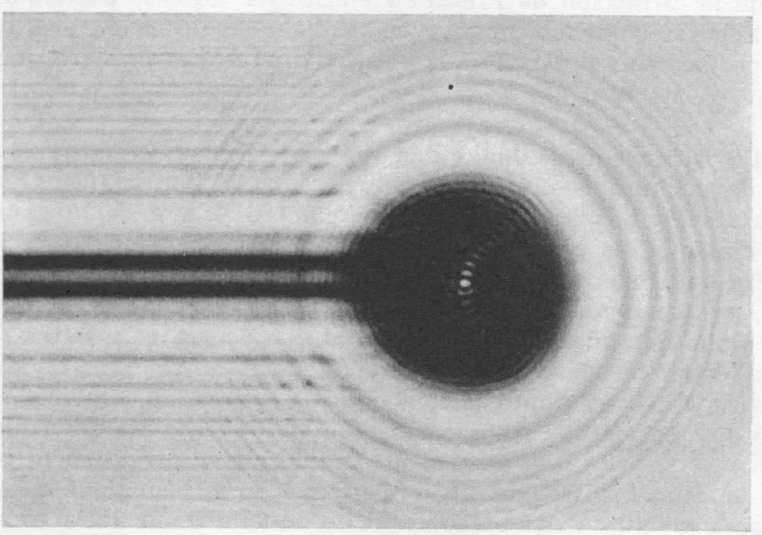


FIG. 17.11 bis Fotografía de las franjas de difracción de un alfiler de cabeza esférica.

tensidad y los mínimos aumentan en la misma, hasta que a determinada distancia se confunden y la intensidad es uniforme. En la zona de sombra geométrica tenemos luz cuya intensidad decrece rápidamente y hace que la sombra no esté bien definida. En la figura 17.11 se representa la intensidad en función de la distancia al borde y en la parte inferior se ve la fotografía de dichas franjas.

La sombra de un alambre no es la geométrica. Presenta una serie de franjas delgadas alternativamente claras y oscuras. En el centro de la sombra geométrica tendremos un máximo. En la fotografía de la figura 17.11 *bis*, tenemos la figura de difracción de un alfiler de cabeza esférica. Puede verse en el centro de la esfera un máximo, lo mismo que en el eje del alfiler. Se aprecian perfectamente las franjas exteriores a la sombra geométrica, paralelas al borde en el alfiler, y circulares en la cabeza.

A continuación vamos a estudiar los fenómenos de difracción cuando el foco luminoso está muy alejado (haz luminoso incidente de rayos paralelos), observando los fenómenos a gran distancia de los orificios u obstáculos que los producen. En la práctica, para tener rayos paralelos, en lugar de colocar el foco luminoso muy lejos se coloca en el foco de una lente convergente, y para determinar el estado luminoso en puntos muy alejados se interpone una lente convergente y el estudio se hace en los puntos del plano focal de la misma. En este caso, el estudio de los fenómenos es más simple que en el de la difracción de Fresnel y constituye un caso particular de éste. Dichos fenómenos constituyen la llamada *difracción de Fraunhofer* por ser JOSEPH VON FRAUNHOFER (1787-1826) el primero que los estudió.

17.12 Difracción debida a una rendija. Sea una rendija rectangular de anchura a y altura b, mucho mayor que a (fig. 17.12 *a*). Mandamos un haz luminoso perpendicular al plano de la pantalla opaca donde se ha practicado la rendija. Según el principio de Huygens-Fresnel, todo punto de la rendija será centro de ondas secundarias, ya que siendo la onda incidente plana, el plano de la rendija es un plano de onda. Para averiguar lo que ocurre a la salida de la rendija deberemos estudiar las interferencias entre estas ondas secundarias. De cada punto parten ondas y por tanto tenemos rayos en todas direcciones. Vamos a estudiar los que van en determinada dirección, o sea, los que forman un ángulo θ con la normal al plano de la rendija. Estos rayos atraviesan una lente convergente y van a parar a un punto del plano focal de aquella lente. Para estudiar el estado interferencial en este punto deberemos conocer la diferen-

cia de marcha de los rayos que parten de los puntos de la rendija. Trazando la perpendicular OH a los rayos difractados en la dirección θ (fig. 17.12 *b*) vemos que a partir de OH todos los rayos siguen el mismo camino óptico hasta llegar al punto del plano focal donde se reúnen. La lente no introduce diferencia de marcha si es estigmática. La única diferencia de marcha se debe al camino recorrido desde los puntos de OA a los correspondientes de OH. Dividimos la rendija (fig. 17.12 *a*) en elementos de anchura dx paralelos al borde. Todos los rayos que parten de los puntos de estos elementos, en la dirección θ, presentan la misma diferencia de marcha XP con respecto a los que parten del borde O (fig. 17.12 *b*). El estado luminoso de los puntos de la rendija lo podemos expresar por la variable luminosa $y = A \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{T}$, empezando a contar el tiempo en el instante en que llegue la onda a dicha rendija. El estado del punto P, de la recta OH, correspondiente al rayo que parte de X, formando el ángulo θ con la normal, será:

$$y_P = A \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{XP}{\lambda}\right)$$

como $XP = XO \operatorname{sen} \theta = x \operatorname{sen} \theta$ tendremos:

$$y_P = A \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{x \operatorname{sen} \theta}{\lambda}\right) \qquad (17.23)$$

Para hallar el estado luminoso en el punto del plano focal de la lente donde concurren estos rayos paralelos, deberemos calcular la suma de las distintas variables luminosas en dicho punto, que es como se hallan, en general, las interferencias (cfr. § 11.9, tomo I). Como a partir de OH ya no hay diferencia de marcha entre los rayos considerados, para hallar el estado luminoso en el punto de concurso bastará restar una constante C a la fase de la variable luminosa y_P en el punto P. Así pues, el estado luminoso vendrá dado por la variable

$$y = A \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{t}{T} - C - 2\pi \frac{x \operatorname{sen} \theta}{\lambda}\right) \qquad (17.24)$$

En lugar de considerar puntos, podemos considerar elementos de superficie infinitamente pequeños, hallar el estado luminoso en estas superficies elementales y luego sumar las variables luminosas correspondientes a los elementos en que se considera dividida la rendija (fig. 17.12 *a*). Teniendo en cuenta que el número de puntos conte-

nidos en el elemento será proporcional al valor de la superficie del mismo, $dS = b\,dx$, y que la diferencia de marcha entre los rayos que parten de un mismo elemento es la misma, la suma de las variables luminosas se convierte en la integral

$$Y = \int_0^a y\,b\,dx$$

extendida a toda la rendija.

Llamando p al coeficiente de proporcionalidad entre amplitud y área de la superficie difractante, y haciendo en la ecuación 17.24

$$u = 2\pi\frac{t}{T} - C \qquad \alpha = \frac{2\pi\ \text{sen}\ \theta}{\lambda}$$

tendremos:

$$Y = A\,p\,b\int_0^a \text{sen}\ (u - \alpha x)\,dx = A\,p\,b\,\frac{\cos\ (u - \alpha a) - \cos\ u}{\alpha} =$$

$$= \frac{A\,p\,b}{\alpha}\,2\ \text{sen}\ (u - \alpha a/2)\ \text{sen}\ (\alpha a/2) =$$

$$= p\,a\,b\,A\,\frac{\text{sen}\ \alpha a/2}{\alpha a/2}\ \text{sen}\ (u - \alpha a/2)$$

Recordando que

$$u = 2\pi\frac{t}{T} - C$$

el movimiento ondulatorio resultante tiene por amplitud (valor máximo de Y) el coeficiente de la función senoidal del tiempo. La intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, luego

$$I = K\,(p\,a\,b\,A)^2\,\frac{\text{sen}^2\ \alpha a/2}{(\alpha a/2)^2}$$

haciendo $I_m = K\,(p\,a\,b\,A)^2$ tendremos

$$I = I_m\left(\frac{\text{sen}\ \alpha a/2}{\alpha a/2}\right)^2 \qquad (17.25)$$

De la expresión de la intensidad deducimos que ésta se anula siempre que el numerador sea nulo sin serlo el denominador. Esto se verifica si

$$\frac{\alpha a}{2} = n\pi \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (17.26)$$

para $n = 0$ se anula simultáneamente numerador y denominador, pero su cociente tiende a la unidad, según enseña la Trigonometría. En tal caso $\alpha = 0$, $I = I_m$, es el valor máximo de la intensidad. Efectivamente, el numerador es siempre inferior al denominador excepto para $\alpha = 0$ en que son iguales. Para $\alpha = 0$, $\theta = 0$, luego el máximo principal se encuentra en la posición central, prolongación de los rayos incidentes. La condición de mínimo (17.26) nulo, nos da para θ:

$$\frac{2\pi \operatorname{sen} \theta}{2\lambda} a = n\pi \qquad \operatorname{sen} \theta = n\frac{\lambda}{a} \tag{17.27}$$

Cuanto mayor sea la longitud de onda y menor la anchura de la rendija, mayor será la separación angular de los mínimos. Entre cada dos mínimos tenemos un máximo secundario. Para hallarlos deberíamos encontrar los máximos de I en la ecuación 17.25, pero con mucha aproximación podemos tomar los valores que hacen máximo a sen $\alpha a/2$, que son

$$\frac{\alpha a}{2} = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \qquad (n \neq 0)$$

o sea

$$\operatorname{sen} \theta = (2n + 1)\frac{\lambda}{2a} \tag{17.28}$$

a los que corresponde la intensidad

$$I = \frac{I_m}{(2n + 1)^2 (\pi/2)^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{17.29}$$

lo que nos indica que los máximos secundarios tienen una intensidad *mucho menor* que la del máximo principal y disminuyen muy rápidamente. Los máximos secundarios prácticamente equidistan de los mínimos contiguos. La distancia angular entre máximos y entre mínimos es $\theta_m = \text{arc sen } \lambda/a$ y si θ es pequeño esta distancia angular es λ/a. Observando en el plano focal de una lente de distancia focal f, la distancia entre el centro del máximo principal y el primer mínimo es f tg θ, que para un ángulo pequeño es $f\lambda/a$. La anchura de este máximo principal es $2f\lambda/a$ (distancia entre mínimos a la izquierda y a la derecha). Si tenemos en cuenta que la distancia entre dos mínimos cualesquiera es $f\lambda/a$ resulta que la anchura del máximo principal es el doble que el de cualquiera de los máximos secundarios. En la figura 17.13 representamos gráficamente la intensidad que resulta en el plano focal de una lente de 1 m de distancia focal, por la

difracción en una rendija de 0,125 mm, utilizando luz de $\lambda = 6328$ Å. En la misma figura colocamos una fotografía del aspecto de las franjas de difracción debidas a la rendija indicada. Las intensida-

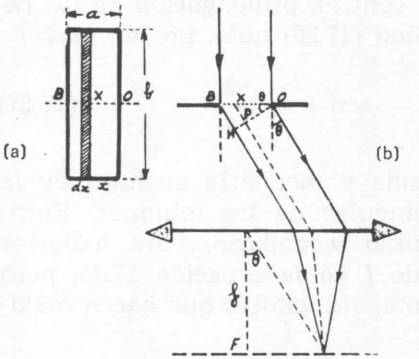


FIG. 17.12 Difracción por una rendija.

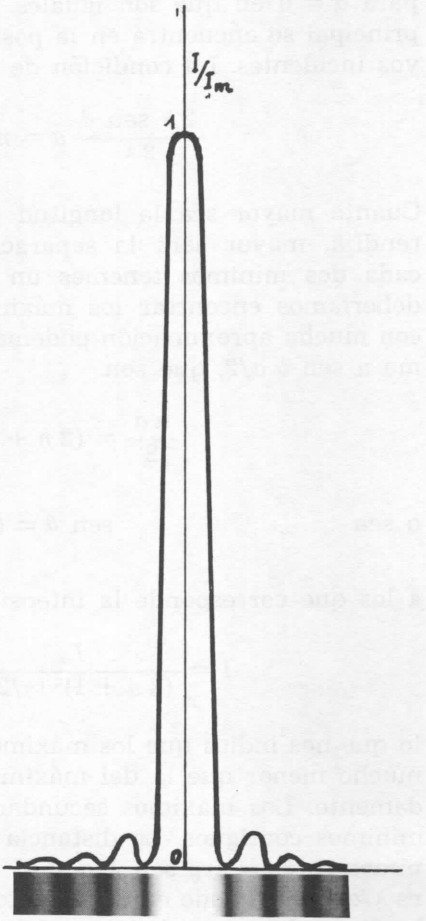
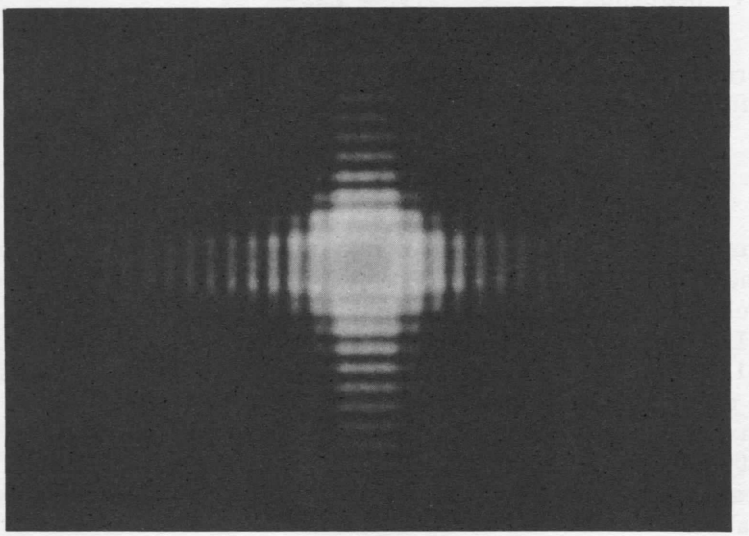


FIG. 17.13 Máximos y mínimos de intensidad en la difracción por una rendija.

des relativas de los máximos secundarios, con respecto al máximo principal I/I_m valen, sucesivamente, 0,047, 0,017, 0,008, 0,005. La separación entre mínimos es 5,06 mm y la anchura del máximo principal 10,12 mm. Puede observarse, tanto en la gráfica como en la fotografía, que casi toda la energía luminosa está concentrada en el máximo principal.

Si la rendija es rectangular de dimensiones parecidas, en la figura de difracción tendremos superpuestas las franjas debidas a los bordes horizontales y a los verticales de la figura 17.12 *a*. En la fotografía adjunta se ven las franjas de difracción debidas a una rendija cuadrada. Se ve aquí un máximo principal, cuadrado, en donde se



concentra casi toda la energía luminosa, y luego los máximos y mínimos secundarios, verticales y horizontales para los bordes respectivos. El lado del cuadrado central es igual a la anchura del máximo principal $2f\lambda/a$.

Observando un foco luminoso lejano a través de un tejido fino, por ejemplo, la luz de los faros de un coche a través de unas cortinas o de la tela de un paraguas, veremos unas figuras parecidas a las anteriores, pero como la luz es blanca los máximos son coloreados. Observando una luz roja lejana (por ejemplo, luz de posición de un coche) veremos franjas muy parecidas a las de la fotografía.

17.13 Difracción producida por una abertura circular. Para encontrar la difracción de Fraunhofer debida a una abertura circular de diámetro *a*, podríamos operar de manera parecida al caso anterior, pero los cálculos son mucho más complicados y nos limitaremos a dar los resultados. El máximo central que se obtenía en el caso de la rendija ahora es un círculo. Los mínimos nulos son franjas circu-

lares entre las cuales tenemos máximos secundarios, también circulares. El radio angular θ_1 del primer mínimo cumple la condición

$$\text{sen } \theta_1 = 1{,}22 \frac{\lambda}{a} \tag{17.30}$$

si θ_1 es pequeño, $$\theta_1 = 1{,}22 \frac{\lambda}{a}$$

Si formamos la imagen con una lente de distancia focal f, el radio del círculo central será, para θ_1 pequeño,

$$R_1 = 1{,}22 f \frac{\lambda}{a} \tag{17.31}$$

Las intensidades relativas de los máximos secundarios I/I_m son sucesivamente: 0,017, 0,0041, 0,0016, con lo que vemos que las intensidades relativas disminuyen más rápidamente que en el caso de la rendija. Los radios de los anillos oscuros y claros son alternativamente 1,22, 1,63, 2,23, 2,68, ..., multiplicado por $f\lambda/a$. No son equidistantes como en el caso anterior.

En un orificio de 1 mm de diámetro, iluminado con luz de $\lambda = 6000$ Å, el radio angular del primer mínimo es $\theta_1 = 7{,}32 \cdot 10^{-4}$ rad. Colocando una lente de 1 m de distancia focal, el radio del anillo central será

$$R_1 = f\theta_1 = 0{,}732 \text{ mm}$$

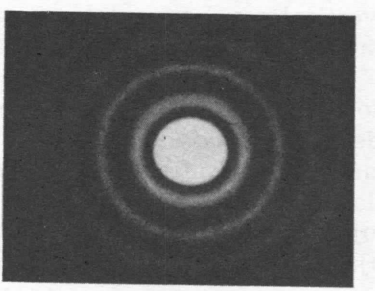


FIG. 17.14

17.14 Difracción por dos rendijas. En la fórmula 17.27, que nos da los mínimos para la difracción de una rendija, vemos que si $a < \lambda$ no tendremos ningún mínimo, pues el valor de sen θ sería superior a la unidad. En este caso, la rendija se comporta como un foco lumi-

noso que emite luz en todas direcciones; la pantalla quedaría iluminada prácticamente de manera uniforme. Si en el experimento de Young practicamos dos rendijas de anchura inferior a la longitud de onda, encontraremos el fenómeno de las interferencias descrito en § 17.3; pero es casi imposible lograr unas ranuras tan delgadas (del orden de $4 \cdot 10^{-4}$ mm), y por tanto tendremos superpuestos dos fenómenos, es decir, las interferencias entre los máximos de difracción. Siendo las rendijas iguales, iluminadas con luz de la misma longitud de onda perpendicularmente al plano de las rendijas, los máximos de difracción de cada una de ellas corresponden al mismo ángulo θ e interferirán en el plano focal de la lente convergente que coloquemos en su camino. Para hallar la intensidad aplicaremos la ecuación 17.13; pero teniendo en cuenta que I_M es la I de la difracción y que la diferencia de marcha es la que existe entre los rayos paralelos que forman el ángulo θ con la normal y vale h sen θ en lugar del valor dado por 17.7, y teniendo en cuenta lo dicho para el valor de I_M, la intensidad será

$$I = I_m \left(\frac{\text{sen } \alpha\, a/2}{\alpha\, a/2} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\pi h \text{ sen } \theta}{\lambda} \right) \qquad (17.32)$$

si el valor de a es muy pequeño, el término

$$\frac{\text{sen } \alpha\, a/2}{\alpha\, a/2}$$

casi valdrá la unidad e influirá poco en el resultado. Tendríamos el caso de interferencias con las franjas claras igualmente intensas, al menos las centrales, como se ve en la fotografía de tales franjas, en § 17.3. Tendremos mínimo nulo en los puntos donde

$$\cos \left(\frac{\pi h \text{ sen } \theta}{\lambda} \right) = 0$$

y esto ocurre para $\dfrac{\pi h \text{ sen } \theta}{\lambda} = (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$

despejando sen θ: $$\text{sen } \theta = \frac{2k + 1}{2} \frac{\lambda}{h} \qquad (17.33)$$

y los máximos para

$$\cos^2 \left(\frac{\pi h \text{ sen } \theta}{\lambda} \right) = 1 \qquad \frac{\pi h \text{ sen } \theta}{\lambda} = k\pi$$

o sea para $$\operatorname{sen}\theta = k\frac{\lambda}{h} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{17.34}$$

El máximo correspondiente a $k = 0$ lo es para todas las longitudes de onda y los demás dependen de la longitud de onda de la luz empleada. En la ecuación 17.32, a

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\ \alpha\, a/2}{\alpha\, a/2}\right)^2$$

se le llama *factor de difracción,* y a

$$\cos^2\left(\frac{\pi\, h\ \operatorname{sen}\ \theta}{\lambda}\right)$$

factor de interferencia.

Si el factor de difracción no es la unidad, como generalmente ocurre, las figuras de interferencia están *moduladas* por dicho factor y tendremos franjas claras, separadas por otras oscuras, en el máximo principal, que irán disminuyendo de intensidad a medida que se alejan de la posición central. En los máximos secundarios la disminución de intensidad es notable, como puede apreciarse en la figura 17.15.

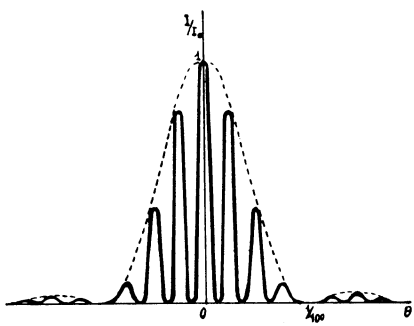


FIG. 17.15

Ejemplo. Tenemos dos rendijas paralelas e iguales de anchura $a = 0{,}06$ mm, cuyos centros distan $h = 4\,a = 0{,}24$ mm. Utilizamos luz de longitud de onda $\lambda = 6000$ Å. Determínese el factor de difracción, el factor de interferencia y el número de máximos de interferencia contenidos en el máximo principal de difracción y en el primer máximo secundario, así como las intensidades relativas al valor máximo I/I_m para cada caso.

Tenemos:

$$\alpha\, a\,/2 = \frac{\pi\, a \operatorname{sen}\theta}{\lambda} = 100\,\pi \operatorname{sen}\theta$$

$$\text{factor de difracción} = \frac{\operatorname{sen}^2 (100\,\pi \operatorname{sen}\theta)}{(100\,\pi \operatorname{sen}\theta)^2}$$

$$\text{factor de interferencia} = \cos^2 (400\,\pi \operatorname{sen}\theta)$$

El primer mínimo de difracción es para $\theta_1 = \frac{\lambda}{a} = \frac{1}{400}$.

Los máximos de interferencia son los correspondientes a los ángulos $\theta_1 = k\frac{\lambda}{h} = \frac{k}{400}$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$, hasta que encontremos el primer mínimo de difracción. Así que los máximos de interferencia serán los correspondientes a los ángulos 0, $\frac{1}{400}$, $\frac{1}{200}$, $\frac{3}{400}$; el siguiente es $\frac{4}{400} = \frac{1}{100}$, que corresponde al primer mínimo de difracción. En realidad son 7 los máximos de interferencia dentro del máximo principal de difracción, pues los ángulos θ pueden tomarse a la derecha o a la izquierda de la normal que pasa por el centro del máximo de difracción. Así que los máximos corresponden a los valores de θ, 0, $\pm 1/400$, $\pm 1/200$, $\pm 3/400$. El primer máximo secundario de difracción está comprendido entre los mínimos correspondientes a $\theta = \frac{\lambda}{a}$ y $2\frac{\lambda}{a}$, o sea entre 1/100 y 2/100. Dando a k los valores 5, 6 y 7 encontramos los valores de θ correspondientes a estos máximos, que son: 5/400, 6/400 y 7/400; el siguiente, $8/400 = 2/100$, corresponde al segundo mínimo de difracción. En la figura 17.15 puede verse perfectamente esta distribución. Las intensidades relativas (cfr. ec. 17.32) serán:

$$I/I_m = \frac{\operatorname{sen}^2 (100\,\pi \operatorname{sen}\theta)}{(100\,\pi \operatorname{sen}\theta)^2} \cos^2 (400\,\pi \operatorname{sen}\theta)$$

Como los valores de θ son pequeños, sustituiremos el seno por θ.

Sustituyendo los valores antes hallados para θ, y teniendo en cuenta que para estos valores $\cos^2 (400\,\pi \operatorname{sen}\theta) \approx 1$, encontramos:

$\theta = 0$	$I/I_m = 1$
$\theta = 1/400$	$I/I_m = 0{,}81$
$\theta = 1/200$	$I/I_m = 0{,}405$
$\theta = 3/400$	$I/I_m = 0{,}09$

Para el primer máximo secundario, las intensidades relativas:

$\theta = 5/400$	$I/I_m = 0{,}032$
$\theta = 6/400$	$I/I_m = 0{,}044$
$\theta = 7/400$	$I/I_m = 0{,}016$

17.15 Red de difracción. En principio, podemos considerar una red de difracción como un conjunto de rendijas iguales paralelas y equidistantes. La red es plana si todas las rendijas están situadas

en un plano. Se llama *constante de la red* a la distancia h entre dos puntos correspondientes a dos rendijas vecinas, por ejemplo, la distancia entre los primeros bordes de dos rendijas contiguas. Siendo las rendijas equidistantes y de la misma anchura, la constante de la red tiene el mismo valor para cualquier par de rendijas y el número de rendijas por unidad de longitud es igual a $1/h$.

El foco luminoso acostumbra ser una ventana rectangular estrecha iluminada intensamente. Por medio de un sistema óptico adecuado hacemos llegar a la red luz paralela y observamos las figuras de difracción en el plano focal de una lente convergente.

Con un razonamiento parecido al que hemos utilizado para el caso de dos rendijas hallaríamos que los máximos de intensidad aparecen para los rayos difractados que cumplen la misma condición que en aquel caso (ec. 17-34), o sea,

$$\text{sen } \theta = k\frac{\lambda}{h} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

Para $k = 0$ los caminos ópticos de los rayos difractados son iguales y por tanto hay refuerzo en sus intensidades. Para los otros valores de k podemos hacer el siguiente razonamiento elemental, para comprender que se cumple la condición de máximo. En la figura 17.16

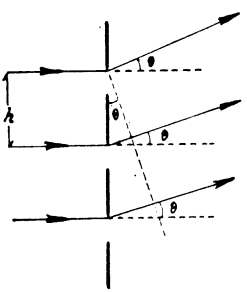


FIG. 17.16 Red de difracción.

hemos representado esquemáticamente una red que recibe luz paralela perpendicular al plano de la misma. De todos los puntos de las rendijas parte luz en todas direcciones y vamos a estudiar lo que ocurre en la dirección θ respecto a la normal al plano de la red. Consideremos los rayos que parten de puntos correspondientes de las rendijas (que distan h) y que forman el ángulo θ con la normal. Las diferencias de marcha entre estos rayos son:

$$h \text{ sen } \theta,\ 2h \text{ sen } \theta,\ \ldots,\ mh \text{ sen } \theta$$

si sustituimos sen θ por el valor que antes hemos indicado que correspondía a la condición de máximo

$$\text{sen } \theta = k \frac{\lambda}{h}$$

encontramos $\qquad k\lambda,\ 2k\lambda,\ 3k\lambda,\ \ldots,\ mk\lambda$

estos rayos llegan al mismo punto del plano focal de la lente de observación, con diferencias de marcha múltiplos de la longitud de onda, lo cual corresponde a la condición de máximo de las interferencias. Para $k = 0$ obtenemos el máximo central, independiente de la longitud de onda. Como los rayos son paralelos, si colocamos la lente paralela a la red, éstos se reúnen en el foco F de tal lente. Si el ángulo θ es pequeño, de manera que podamos tomar sen θ = tg θ, los máximos principales se forman en puntos M del plano focal, distantes de F:

$$FM = f k \frac{\lambda}{h} = C\lambda \qquad \left(C = k \frac{f}{h}\right) \tag{17.35}$$

o sea, que esta distancia, para cada valor de k, es proporcional a la longitud de onda. Si utilizamos luz policromática, veremos los máximos en el orden creciente de sus longitudes de onda.

Se demuestra que la intensidad en los máximos es m^2 veces mayor que los debidos a una sola rendija (m = número de rendijas), lo cual indica que para que los máximos principales destaquen bien debemos usar redes de gran número de rendijas.

Se demuestra que hay mínimo nulo cuando θ cumpla con la condición

$$\text{sen } \theta = k' \frac{\lambda}{m h} \tag{17.36}$$

siendo k' un número entero no nulo ni múltiplo de m. De ahí resulta que entre los máximos principales no solamente hay un mínimo nulo sino $m - 1$ mínimos nulos. Efectivamente, entre el máximo central $k = 0$ y el primer máximo principal $k = 1$, tenemos $m - 1$ valores de k' distintos de cero, enteros no múltiplos de m (1, 2, 3, ..., $m - 1$). Entre cada par de máximos principales consecutivos ocurre lo mismo. Entre dos mínimos consecutivos tendremos un máximo secundario, luego entre dos máximos principales tendremos $(m - 1) + 1$ máximos y descontando los dos principales en los extremos tendremos $m - 2$ máximos secundarios cuya intensidad es mucho menor que la de los principales y corrientemente no se observan.

Modernamente, las redes se construyen trazando rayas equidistantes, del mismo espesor, sobre una placa de vidrio, por medio de un diamante. Pueden usarse por transmisión o por reflexión. Si rayamos una superficie metálica se usa solamente como red por reflexión.

Cuando la red está trazada sobre vidrio, es transparente en todo punto; en cambio, cuando eran rendijas sobre una pantalla opaca, o hilos metálicos paralelos e iguales, la amplitud del vector luminoso variaba de manera periódica a lo largo de la red, normalmente a las rendijas, siendo nula en los puntos de las zonas opacas. Podríamos definir estas redes como dispositivos que imponen al vector luminoso incidente una variación periódica de amplitud y las llama-

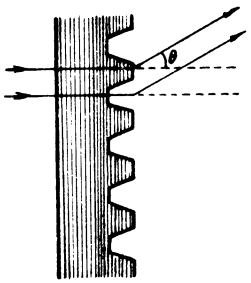


FIG. 17.17 Red de fase.

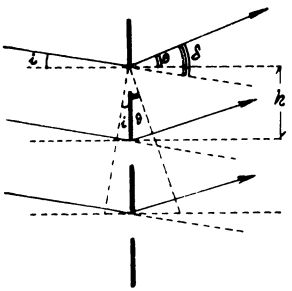


FIG. 17.18 Incidencia oblicua de la luz sobre una red de difracción.

ríamos *redes de amplitud.* La red transparente modifica poquísimo la amplitud a lo largo de la misma, pero sí cambia el camino óptico en la dirección normal al plano de la misma a intervalos regulares y por tanto produce una variación periódica de fase y por esto se llaman *redes de fase.* En la figura 17.17 representamos la sección de una red de fase.

Se demuestra que las fórmulas anteriores, para redes de amplitud, pueden aplicarse a las redes de fase que son las que se utilizan corrientemente.

En 1880, HENRY AUGUSTUS ROWLAND (1848-1901) construyó redes con 1700 trazos por milímetro. Generalmente se usan redes de unos 500 trazos por centímetro. Es natural que el trazado de una red requiera mucha precisión y debido a ello, una vez construida una red se sacan copias del modelo, lo cual se logra extendiendo uniformemente una película de colodión sobre el original. Una vez seca, se separa y se monta entre dos láminas delgadas de vidrio.

En la figura 17.16 hemos considerado que la incidencia era normal al plano de la red. Si la luz incide formando un ángulo i (figu-

ra 17.18), la diferencia de marcha entre los rayos difractados de ángulo θ es

$$h \text{ sen } i + h \text{ sen } \theta,\ 2h \text{ sen } i + 2h \text{ sen } \theta,\ \ldots$$

la condición de máximo ahora será:

$$\text{sen } i + \text{sen } \theta = k\frac{\lambda}{h} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (17.37)$$

Los máximos principales los observaremos en la dirección θ dada por la ecuación 17.37. Si hacemos girar ligeramente la red, alrededor de un eje perpendicular al plano del papel y que pase por el punto de intersección de la cara posterior de la red con el eje principal de la lente de observación, veremos que los máximos se desplazan. Efectivamente, al girar la red varían i y θ. Al ir girando lentamente la red, los máximos se desvían hasta que para cierto valor del ángulo girado por la red empiezan a retroceder. En aquella posición se dice que hay *mínima desviación*. La desviación es el ángulo que forma la dirección incidente con la de difracción, y vale (fig. 17.18) $\delta = i + \theta$. Si hallamos la condición de mínimo que cumpla con la ecuación 17.37 encontraremos que es cuando $i = \theta$, con lo que $\delta_m = 2i = 2\theta$. La ecuación 17.37 se convierte en

$$2 \text{ sen } \frac{\delta_m}{2} = k\frac{\lambda}{h} \qquad (17.38)$$

Con un goniómetro puede determinarse fácil y precisamente el valor δ_m y de aquí el valor de λ para $k = 1$ (primer orden), procedimiento este muy utilizado para determinar las longitudes de onda componentes de una luz policromática.

Ejemplo. Vamos a escoger una práctica realizada en el laboratorio por un alumno. Con una lámpara espectral que da luz policromática, un goniómetro que aprecia grados y minutos sexagesimales y una red de difracción de 5715 trazas por centímetro, hay que determinar el gas de la lámpara. Se observaron tres de las rayas del espectro de primer orden ($k = 1$): una amarilla, otra verde y finalmente una azul-violeta, correspondientes a tres máximos consecutivos. Como los máximos se observan a la derecha y a la izquierda, se halla la mínima desviación a la derecha y se anota la lectura en el nonius del goniómetro y luego la de la izquierda. La semidiferencia de estas lecturas nos dará la mínima desviación. Los valores hallados fueron:

	Lectura derecha	Lectura izquierda	δ_m	$\lambda = \frac{2}{5715} \text{ sen } \frac{\delta_m}{2}$
Amarilla	44° 15′	6° 19′	18° 58′	5770×10^{-8} cm = 5770 Å
Verde	43° 29′	7° 34′	17° 58′	5462×10^{-8} cm = 5462 Å
Azul-violeta	39° 52′	11° 16′	14° 18′	4356×10^{-8} cm = 4356 Å

En las tablas de las longitudes de onda encontramos que el mercurio tiene rayas que son las más aproximadas a las halladas. Son: amarilla, 5770 Å; verde, 5461 Å; azul, 4358 Å. Con un goniómetro de mayor precisión se podrían haber evitado los errores de 1 y 2 Å en las dos últimas rayas. La lámpara contiene, pues, vapor de mercurio.

Si la luz que incide en una red es policromática y en ella están presentes dos longitudes de onda muy próximas λ y $\lambda + d\lambda$, los máximos se presentarán con los ángulos θ y $\theta + d\theta$. Llamaremos dispersión D de la red a

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda}$$

que significa la variación de ángulo por unidad de longitud de onda y nos indica el poder de la red de patentizar dos radiaciones monocromáticas superpuestas cuando sus longitudes de onda son muy próximas. De la condición de máximo (ec. 17.37) diferenciando, teniendo en cuenta que i es constante, hallamos

$$\cos\theta\, d\theta = \frac{k}{h} d\lambda$$

de donde

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{k}{h\cos\theta} \qquad (17.39)$$

Para incidencia oblicua, observando normalmente a la red, $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$ y $D = k/h$, la dispersión es directamente proporcional a k (para $k = 0$ sería nula y todas las longitudes de onda estarían presentes en el mismo máximo), es inversamente proporcional a h, o sea directamente proporcional al número de rayas por unidad de longitud de onda.

Ejemplo. Vamos a calcular la dispersión de la red del ejemplo anterior, para la raya amarilla de 5770 Å.

Para esta raya, $\delta_m = 18° 58'$, como $\delta_m = 2\theta$, $\theta = 9° 29'$, así que la dispersión, para $k = 1$ vale

$$D = \frac{1}{h\cos\theta} = \frac{5715}{\cos 9° 29'} = 5783 \text{ rad/cm} = 5{,}783 \cdot 10^{-5} \text{ rad/Å}$$

(recordemos que en esta red $h = 1/5715$ cm).

En esta red supongamos que observamos luz de sodio y el máximo de la primera raya del doblete lo observamos bajo un ángulo $\theta = 9° 29'$ igual que antes. Sabiendo que las longitudes de onda de las rayas del doblete citado son 5890,0 y 5895,9 Å, determínese la variación de ángulo al pasar de una a otra raya

$$\Delta\theta = D\,\Delta\lambda$$

como θ es la misma y k el mismo que en el caso anterior

$$D = 5{,}783 \cdot 10^{-5} \text{ rad/Å}$$

y como $\Delta\lambda = 5{,}9$ Å

$$\Delta\theta = 5{,}783 \cdot 10^{-5} \cdot 5{,}9 = 3{,}41 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0{,}0195°$$

17.16 Poder separador de los instrumentos ópticos. Se llama *poder separador* de un instrumento óptico al recíproco del valor mínimo de la distancia entre dos puntos que al observarlos a través del instrumento se vean netamente separados. Como tales instrumentos contienen diafragmas que limitan el haz luminoso, para que sea paraxial, deberemos tener en cuenta los fenómenos de difracción que aparecerán por tal motivo.

La imagen de un punto, a pesar de ser el sistema estigmático, no será un punto, sino una mancha central de difracción, de intensidad máxima, rodeada de franjas de intensidad casi despreciable frente a la máxima, separadas entre sí por mínimos. Lo más corriente es que el diafragma sea circular, así que deberemos tener en cuenta la difracción por un orificio. La mancha central será circular y las franjas serán anillos alternativamente oscuros y claros, éstos de intensidad decreciente y mucho menor que la del central.

Si tenemos dos puntos luminosos próximos, puede que las manchas de difracción de sus respectivas imágenes se superpongan. Hay que establecer un criterio de separación. Se ha adoptado el criterio, deducido por LORD RAYLEIGH, de que dos puntos luminosos pueden verse separados a través de un instrumento óptico si el máximo central de la figura de difracción de un punto coincide con el primer mínimo de la del otro. Esto es lo mismo que decir, en el caso de orificio circular, que la distancia entre los centros de los círculos de los máximos centrales sea igual al radio de dichos círculos (fig. 17.19). Para distancias mayores quedan perfectamente separados; para distancias menores hay confusión.

En el caso del ojo humano, el haz queda limitado por la pupila, cuyo diámetro varía con la intensidad, la cual podemos considerar

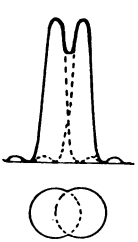


FIG. 17.19 Imágenes de difracción de dos puntos próximos.

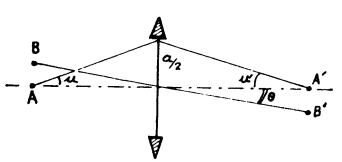


FIG. 17.20 Difracción en el objetivo de un microscopio.

como diafragma circular de 4 mm de diámetro. Según el criterio de separación, el mínimo valor del ángulo con que veamos dos puntos luminosos para distinguirlos debe ser el del radio angular del círculo central máximo, que es precisamente el del primer mínimo dado por la ecuación 17.30. Tomando $a = 4$ mm, la longitud de onda será λ/n, siendo λ la longitud de onda, en el aire, de la zona del espectro que más impresiona al ojo, la cual es 5500 Å; $n = 1{,}33$, y sustituyendo valores

$$\text{sen } \theta_1 \simeq \theta_1 = \frac{1{,}22 \cdot 5500 \cdot 10^{-7}}{4 \cdot 1{,}33} = 1{,}3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Pero hemos visto en § 16.3 que en el ojo el mínimo ángulo era de $3 \cdot 10^{-4}$ rad, lo que indica que la perturbación debida a la difracción es despreciable en este caso.

Para hallar el poder separador de un microscopio, consideremos dos puntos A y B cuyas imágenes dadas por el objetivo del microscopio son A' y B' (fig. 17.20). Si consideramos la difracción debida al borde del objetivo, los puntos A' y B' son los centros del círculo central de difracción. Se verán separados si θ_1 cumple la condición 17.30 y el ocular nos dará las imágenes separadas. Si el diámetro del borde del objetivo es a y la distancia OA' es d, tendremos

$$\text{sen } u' \simeq \frac{a/2}{d}$$

Como $A'B' \simeq \theta_1 d$, sustituyendo θ_1 por su valor dado por la ecuación 17.30, hallamos:

$$A'B' = 1{,}22 \frac{\lambda}{a} d = 1{,}22 \frac{\lambda}{2 \text{ sen } u'} \qquad (17.40)$$

Para que la imagen del segmento AB sea el segmento $A'B'$ debe cumplirse la condición de aplanetismo, o condición de Abbe, que se demuestra que puede expresarse por:

$$AB\, n \text{ sen } u = A'B'\, n' \text{ sen } u'$$

de donde

$$A'B' = \frac{AB\, n_r \text{ sen } u}{\text{sen } u'}$$

en donde n_r es el índice de refracción relativo del primer medio al segundo ($n_r = n/n'$). Sustituyendo $A'B'$ en la ecuación 17.40, hallamos:

$$\frac{AB\, n_r \text{ sen } u}{\text{sen } u'} = 1{,}22 \frac{\lambda}{2 \text{ sen } u'}$$

de donde $$AB = 1{,}22 \frac{\lambda}{2\, n_r \text{ sen } u}$$

que es la mínima distancia entre dos puntos para que sus imágenes se vean separadas al observarlos al microscopio. El poder separador P del microscopio será, pues:

$$P = \frac{1}{AB} = \frac{2\, n_r \text{ sen } u}{1{,}22\, \lambda} \tag{17.41}$$

Al valor n_r sen u se le llama *apertura numérica,* y vemos que el poder separador es directamente proporcional a la apertura numérica e inversamente proporcional a la longitud de onda. Como $n' = 1$, n_r coincide con el índice n del medio donde se halla el objeto.

En una red hallaremos el poder separador estableciendo el criterio de Rayleigh y según éste los máximos principales de determinada λ deben ser lo más estrechos posible para que no se superpongan a los máximos contiguos. Suponiendo dos longitudes de onda muy próximas de las cuales observamos los máximos, si $\Delta\lambda$ es la diferencia entre las mismas y λ el valor medio de ellas, se define como *poder separador de la red* al valor

$$s = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

s será tanto mayor cuanto menor sea la diferencia $\Delta\lambda$ entre las longitudes de onda que permita ver separados sus máximos.

Se demuestra que su valor

$$s = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m\, k \tag{17.42}$$

es directamente proporcional al número total de rayas de una red y al orden. Para órdenes elevados (k grande) tendríamos un gran poder separador, pero las intensidades van disminuyendo a medida que k aumenta. En este caso puede utilizarse un método fotográfico.

El valor del poder separador no coincide con el de la dispersión D (ec. 17.39), pues en ella aparece el ángulo θ, el número de rayas por *unidad de longitud* y el orden. En cambio, en el poder separador sólo figuran el orden y el número *total* de rayas de la red.

Ejemplo. La red citada en ejemplos anteriores de 5715 rayas/cm queremos saber si tiene poder separador suficiente para ver separadas las rayas del doblete de sodio, en el primer orden ($k = 1$).

Para $k = 1$, $s = m$, en esta red que tiene 2 cm de longitud, el número total de rayas es $m = 11\,430$, tomamos

$$\lambda = \frac{5890 + 5896}{2} = 5893 \text{ Å} \qquad \Delta\lambda = \frac{\lambda}{s} = \frac{5893}{11\,430} = 0{,}51 \text{ Å}$$

se verán separadas dos longitudes de onda que difieran en 0,51 Å, y como la diferencia entre las longitudes de onda del doblete de sodio es 5,9 Å, se verán perfectamente separadas.

17.17 Microscopio de contraste de fase. Cuando la luz atraviesa un objeto, la amplitud y la fase del vector luminoso varían. Las variaciones de amplitud dan lugar a variaciones de intensidad y pueden percibirse visualmente o por métodos fotográficos, ya que tanto el ojo como las emulsiones fotográficas son sensibles a las variaciones de intensidad. Al observar una preparación al microscopio, percibimos los detalles por las variaciones de intensidad correspondientes a las variaciones de amplitud del vector luminoso y dichas variaciones son debidas a la absorción luminosa, análoga a la absorción de las ondas, tratada en § 11.5, tomo I. Puede darse el caso de que el objeto sea casi uniformemente transparente y no tendremos variaciones de intensidad, o serán muy pequeñas, como ocurre con algunas preparaciones biológicas o cristalográficas. Pero si el índice de refracción es distinto en diversas partes del objeto, los caminos ópticos recorridos por el rayo luminoso serán distintos, y a pesar de que no existan variaciones de amplitud pueden existir variaciones de fase que no podremos percibir visual o fotográficamente. Éstos son *objetos de fase* y los métodos ordinarios de observación proporcionan poca información acerca de los mismos. Para solventar esto podemos transformar las variaciones de fase, no perceptibles, en variaciones de intensidad fácilmente observables. Uno de los métodos más usados es el de contraste de fase inventado en 1935 por FRITS ZERNICKE (n. 1888), y por el cual se le concedió el premio Nobel en 1953. A continuación describiremos brevemente el método de contraste de fase aplicado al microscopio.

Un foco luminoso puntiforme está situado en el foco F de la lente del condensador C del microscopio (fig. 17.21). El haz de rayos, limitado por el diafragma D, a la salida de C es paralelo al eje principal del sistema óptico del microscopio e ilumina a la preparación P, de la cual el objetivo O da la imagen P' que puede observarse con el ocular o puede fotografiarse. En el plano focal F' del objetivo tendremos la imagen de difracción debida al orificio del diafragma: un círculo central intenso y franjas anulares concéntricas de intensidad despreciable.

Un pequeño objeto de fase A en P, difracta la luz y de él sale

un haz que, después de atravesar el objetivo, forma la imagen A' de A situada en P'. Consideremos P uniforme y que el único objeto de fase es A, la variable luminosa en todos los puntos de P' tiene la

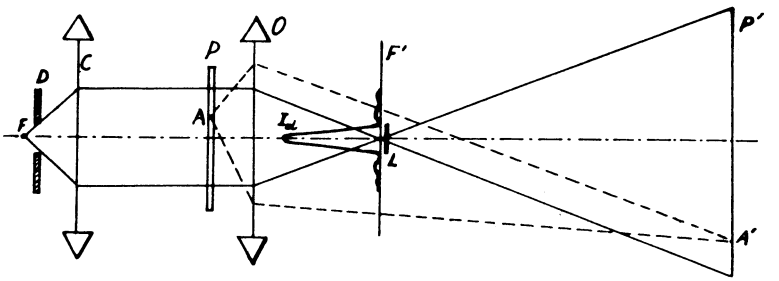


FIG. 17.21 Microscopio de contraste de fase.

misma amplitud y fase excepto en A', imagen de A. Podemos representar la amplitud del vector luminoso y en un punto de P (según el diagrama de Fresnel, § 10.7, tomo I) por el vector $(V - O)$ (figura 17.22) de fase $\theta = 0$ y el correspondiente a A' por $(V_A - O)$ de la misma amplitud y defasado en un ángulo θ. De la figura deducimos que $(V_A - O) = (V - O) + (V_A - V)$. El vector $(V_A - V)$, al cual llamaremos **u** está, prácticamente, defasado en 90° respecto al $(V - O)$.

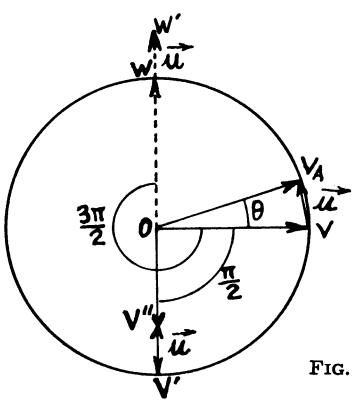


FIG. 17.22

Para que A' sea visible, colocamos en F' una lámina de fase L, transparente, y lo suficientemente pequeña para cubrir el círculo central de la imagen de difracción de D, cuyo índice de refracción sea tal que, teniendo un espesor pequeño a, la diferencia de marcha producida sea de $\lambda/4$, lo que equivale a un retardo de

$$2\pi \frac{\lambda/4}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

Con ello, la lámina modifica la fase del «fondo» y no la de la luz difractada por A, y el vector luminoso en el punto considerado de P' tiene una amplitud $|V' - O|$ y está retrasado en 90° respecto $(V - O)$. El vector **u** correspondiente a la luz difractada no varía y por tanto la amplitud en A' será la del vector

$$(V'' - O) = (V' - O) + \mathbf{u}$$

Como la intensidad es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud, tendremos:

$$I = K \cdot OV'^2 \qquad I_{A'} = K \cdot OV''^2$$

Si definimos el contraste c como la diferencia de intensidad relativa

$$c = \frac{I_{A'} - I}{I} = \frac{OV''^2 - OV'^2}{OV'^2}$$

el contraste es negativo, es decir, $I'_{A'} < I$, y la imagen del objeto de fase se ve más oscura sobre fondo claro (contraste de fase negativo). Como θ es pequeño podemos tomar $u = OV \cdot \theta$

$$OV'' = OV' - u = OV - OV \cdot \theta = OV\,(1 - \theta)$$

el contraste vale, pues,

$$c = \frac{OV'^2\,(1 - \theta)^2 - OV'}{OV'} = (1 - \theta)^2 - 1 = -2\,\theta + \theta^2 \simeq -2\,\theta$$

de donde deducimos que el contraste es directamente proporcional a la fase. Hemos transformado variaciones de fase en variaciones de intensidad relativa proporcionales a las variaciones de fase.

Si θ fuese negativo, el contraste sería positivo. Si en lugar de una lámina cuarto de onda colocamos una tres cuartos de onda (diferencia de marcha $3\lambda/4$) el retardo sería $3\lambda/2$, o sea un adelanto de $\pi/2$ rad. El vector representativo de la amplitud ahora sería $(W - O)$ y al sumar con **u** tendríamos $(W' - O)$ y el contraste sería

$$c' = \frac{OW'^2 - OW^2}{OW^2} > 0$$

y veríamos a A' más claro que el fondo. Si θ es pequeño

$$OW' = OW + u = OW\,(1 + u)$$

$$c' = \frac{OW^2\,(1 + u)^2 - OW^2}{OW^2} \simeq 2\,\theta$$

positivo y directamente proporcional a θ.

En el microscopio de contraste de fase, en lugar del orificio circular del diafragma se usa un orificio anular centrado en el eje, el cual proporciona más luminosidad que el circular.

18

Polarización de la luz

Los fenómenos ondulatorios (interferencias y difracción), estudiados en el capítulo anterior, se interpretan correctamente en la teoría ondulatoria prescindiendo del significado de la variable luminosa y de que ésta sea una magnitud escalar o vectorial. En la teoría electromagnética de la luz, la variable luminosa es una magnitud vectorial (intensidad del campo eléctrico) y su dirección es perpendicular a la de propagación. Por tanto, las ondas luminosas son *transversales* (cfr. cap. 11, tomo I) y a la variable luminosa se le llama *vector luminoso*. La ecuación de las ondas luminosas será análoga a la (17.1), pero tanto y como A serán vectores y escribiremos:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \operatorname{sen} \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \tag{18.1}$$

Antes de la teoría electromagnética ya se había encontrado que las ondas luminosas *debían* ser transversales. Esta evidencia se halla en los fenómenos de polarización, que estudiaremos seguidamente. Si las ondas fuesen longitudinales, existiría simetría de revolución en torno al rayo luminoso y no podrían producirse estos fenómenos.

18.1 Luz polarizada. En § 17.2 se decía que la luz está producida por la emisión de trenes de ondas por focos microscópicos. La luz natural está constituida por la superposición de trenes de ondas independientes, en cada uno de los cuales el vector luminoso **y** tiene una orientación que no será necesariamente la misma que en los demás. Como tiene que ser perpendicular a la dirección de propagación, estará contenido en un plano perpendicular a esta dirección, pero con orientaciones al azar (fig. 18.1 *a*). Todo plano que contenga a **y** y a la dirección de propagación se llama *plano de vibración* P_v. En la luz natural, los planos de vibración están orientados al azar con-

teniendo siempre a la dirección de propagación. Esta orientación al azar de los vectores luminosos no puede ponerse de manifiesto por observación directa, sino que se necesita experimentación adecuada.

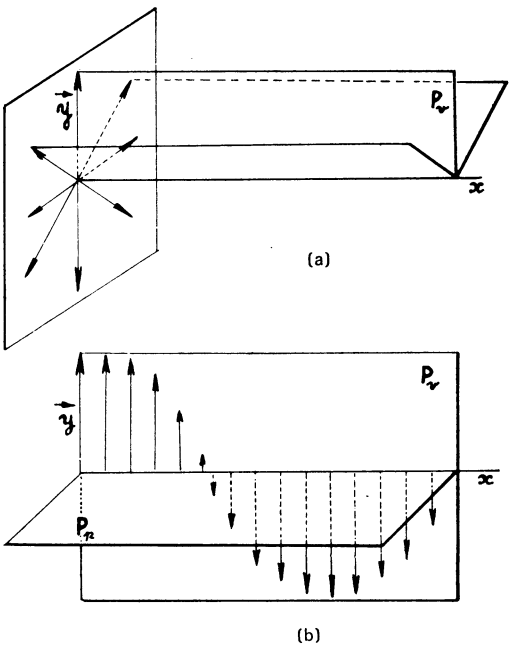


FIG. 18.1 *a*) Onda luminosa y plano de vibración. *b*) Plano de polarización y de vibración.

Si podemos lograr que en una onda luminosa la dirección del vector luminoso sea constante, diremos que la luz está *polarizada linealmente*. El plano que pasa por el rayo y es perpendicular a la dirección de y se llama plano de polarización P_p y es perpendicular al de vibración (fig. 18.1 *b*).

Los primeros fenómenos de polarización fueron observados por HUYGENS en 1690, observando la luz a través de un cristal de espato de Islandia, pero fueron interpretados por FRESNEL al cabo de más de cien años. A continuación estudiaremos distintos métodos de producción y análisis de luz polarizada.

18.2 Polarización por reflexión. Vamos a realizar el siguiente experimento. Sea un tubo T (fig. 18.2) con dos espejos de vidrio E y E' sujetos a las argollas a y a' del tubo que permiten girar los espejos

en torno al eje del tubo y además pueden girar en torno a los ejes e y e' contenidos en sus respectivos planos. Mandamos un rayo luminoso sobre el espejo E de forma que, después de reflejado, siga en la dirección del eje del tubo y se refleje de nuevo en el espejo E' encontrando una pantalla P, en donde se observa una mancha lumi-

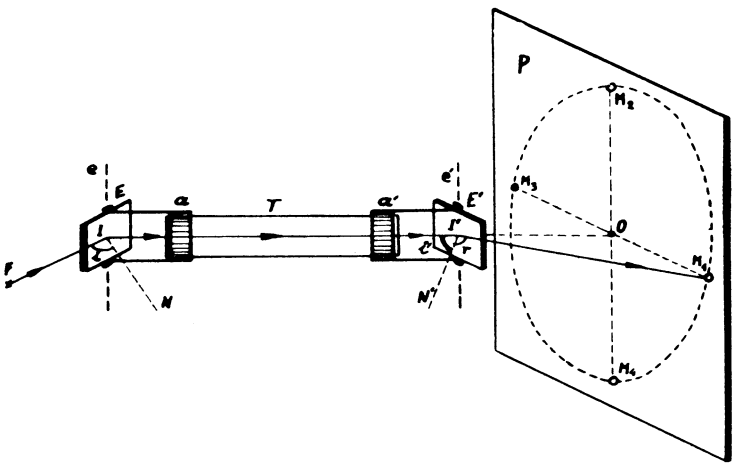


FIG. 18.2 Polarización por reflexión.

nosa M. Manteniendo fijo E, hacemos girar el espejo E' alrededor del eje del tubo, girando la argolla a'. El ángulo de incidencia es constante, pues la normal N' gira con inclinación constante respecto al eje del tubo. El ángulo de reflexión es también constante, pero el rayo reflejado, que debe estar contenido en el mismo plano que el incidente y la normal, va girando al girar el espejo. La mancha luminosa M va describiendo una circunferencia en la pantalla P, que es perpendicular al eje del tubo. Ahora bien, la intensidad en los puntos de la mancha luminosa varía de manera continua en sus distintas posiciones. [En realidad observamos variaciones de iluminación en los puntos de la pantalla ocupados por la mancha luminosa y por tanto variaciones de intensidad (véase § 21.2).] Se presentarán dos máximos en M_1 y M_3 y dos mínimos en M_2 y M_4 que corresponden a las posiciones en que los planos de incidencia FIN y $N'I'M$ son paralelos y perpendiculares respectivamente. Si en la posición de mínimo hacemos girar el espejo E alrededor del eje e, variando el ángulo de incidencia i, girando simultáneamente el E' en torno e' de manera que $i = i'$, llegará un momento en que el mínimo será nulo y en él desaparece la mancha luminosa.

Si quitamos el espejo E no encontraríamos las variaciones de intensidad. La reflexión de la luz en el primer espejo ha hecho desaparecer la simetría de revolución de la luz en torno a su dirección de propagación. Se dice que la luz se ha *polarizado parcialmente* y cuando el ángulo $i = i'$ es el que hace que desaparezca la mancha luminosa se dice que la incidencia es brewsteriana y la luz está *polarizada totalmente*. El nombre de la incidencia brewsteriana es debida a SIR DAVID BREWSTER (1781-1868), quien descubrió experimentalmente en 1812 el valor que debe tener este ángulo i. Halló que:

$$\text{tg } i = n \tag{18.2}$$

siendo n el índice de refracción del vidrio del espejo respecto al medio que le rodea (en nuestro caso el aire). Considerando vidrio de $n = 1{,}54$, el valor de i es aproximadamente 57°. Sabemos que el índice de refracción depende de la longitud de onda, pero para la polarización por reflexión el valor de la variación es tan pequeño, para las distintas longitudes de onda del espectro visible, que puede despreciarse y utilizar luz blanca en estas experiencias. Cuando la luz incide en la superficie de separación de dos medios, parte se refleja

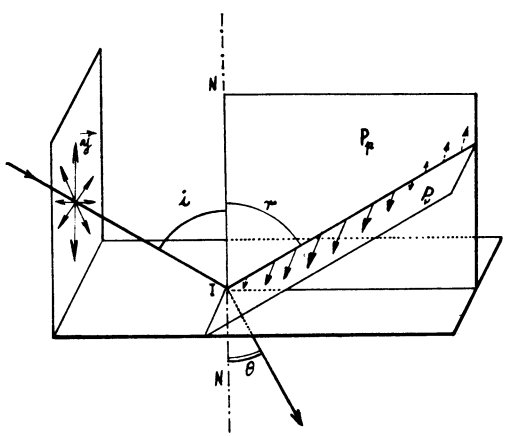


FIG. 18.3 Incidencia brewsteriana.

y parte se refracta. Si el ángulo de incidencia i es el dado por la relación 18.2, en donde n es el índice de refracción del segundo medio respecto al primero, la luz reflejada está polarizada totalmente y el rayo reflejado y el refractado son perpendiculares. Efectivamente: La ley de la refracción sen i/sen $\theta = n$ comparada con la de Brewster

sen $i/\cos i = n$ nos indica que sen $\theta = \cos i$, o bien $\theta = 90° - i$, pero $i = r$, luego $r + \theta = 90°$.

En la figura 18.3 se ha representado esquemáticamente el rayo incidente, el reflejado y el refractado. En la teoría electromagnética de la luz se demuestra que cuando la incidencia es brewsteriana y la luz reflejada está totalmente polarizada, el plano de polarización de este rayo es el plano de incidencia, determinado por el rayo y la

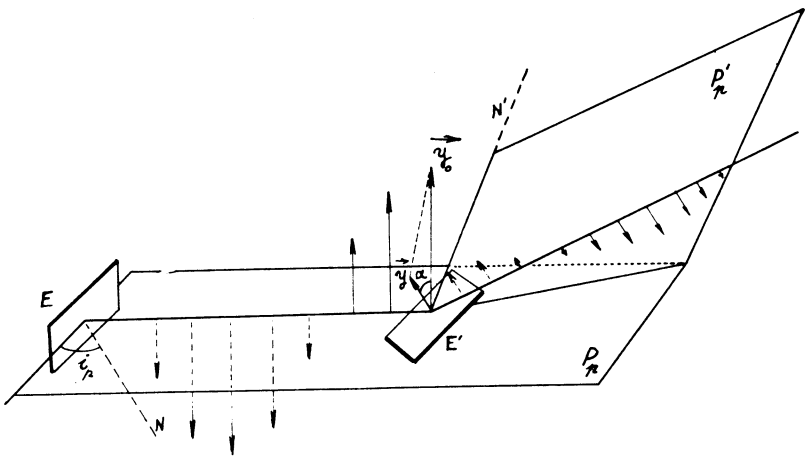


FIG. 18.4

normal a la superficie de separación de los dos medios, si se toma como vector luminoso la intensidad del campo eléctrico. En la figura 18.3 dicho plano se representa por P_p y los vectores luminosos están contenidos en el plano de vibración P_v. El rayo refractado está sólo parcialmente polarizado.

Para encontrar la ley de variación de la intensidad en la segunda reflexión, en la figura 18.4 representamos los vectores luminosos del rayo reflejado en el primer espejo E, perpendiculares al plano de polarización P_p, siendo $\mathbf{y}_0$ el vector luminoso del rayo incidente en el segundo espejo, en el punto de incidencia. El vector luminoso $\mathbf{y}$ del rayo reflejado en el espejo E' tiene que ser perpendicular al rayo y a la normal N' al segundo espejo E' (el plano de polarización P'_p es el determinado por estas dos rectas). Descompondremos el vector $\mathbf{y}_0$ en dos componentes, una $\mathbf{y}$ perpendicular a P'_p y otra paralela a dicho plano. El vector luminoso $\mathbf{y}$ del rayo reflejado en E' es la componente perpendicular y vale

$$y = y_0 \cos \alpha$$

siendo α el ángulo que forman P_p y P'_p (el mismo que sus dos normales y_0 e y). La intensidad del rayo incidente en E' es $I_0 = K y_0^2$ y la del reflejado $I = K y^2$, luego $I/I_0 = y^2/y_0^2 = \cos^2 \alpha$, de donde:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha \tag{18.3}$$

esta expresión se acostumbra llamar *ley de Malus.**

En el caso de que $\alpha = 90°$, $I = 0$, que es la intensidad correspondiente en los puntos M_2 y M_4 de la figura 18.2 que corresponden a la posición en que los planos de incidencia (los de polarización) son perpendiculares. Si $\alpha = 0$, $I = I_0$, la intensidad del rayo reflejado es máxima, correspondiente a los puntos M_1 y M_3 de la figura citada y esto ocurre cuando los planos de polarización son paralelos.

Con el segundo espejo E' podemos comprobar que la luz incidente está polarizada, por esto se le llama *analizador.*

18.3 Cristales anisótropos. Hasta ahora hemos considerado la propagación de la luz a través de medios isótropos. Existen medios en los que, a pesar de ser homogéneos, ciertas propiedades físicas dependen de la dirección en la cual los estudiamos. En particular, la celeridad de la luz no es la misma en direcciones distintas. Los medios cristalinos, debido a su estructura, son anisótropos si exceptuamos los que cristalizan en el sistema cúbico.

Los cristales anisótropos presentan la propiedad de que un rayo incidente en el interior del cristal se propaga con dos celeridades distintas que dependen de la dirección del rayo incidente. A la salida del cristal tendremos dos rayos. El fenómeno se llama *doble refracción* y a dichos cristales se les llama *birrefringentes.* El primero que observó tal fenómeno fue BARTHOLIN, en 1669, estudiando la propagación de la luz a través de un cristal de espato de Islandia (CO_3Ca cristalizado). Observando un objeto a través de este cristal veremos dos imágenes. Antes hemos indicado que las celeridades dependían de la dirección incidente. Si variamos dicha dirección, las dos imágenes se aproximan o se alejan. Variando de manera que se aproximen, llegaremos a lograr que coincidan. La dirección para la cual ocurre esto se dice que es la de un *eje óptico* del cristal y en tal dirección se comporta como si fuese isótropo, pues las celeridades son iguales y desaparece la doble refracción. Como máximo podemos hallar dos direcciones en las que ocurra la monorrefringencia. Los cris-

* Malus descubrió, en 1809, la polarización por reflexión al observar la luz solar reflejada en los cristales de los ventanales del palacio de Luxemburgo, en París, a través de un cristal de espato (véase § 18.4).

tales que posean estas dos direcciones privilegiadas, o sea dos ejes ópticos, se llaman *biáxicos*. Los que sólo presentan un eje óptico se les llama *uniáxicos*. Entre los primeros tenemos el aragonito, la mica, el yeso cristalizado, etc. Entre los segundos, el espato de Islandia, el cuarzo, la turmalina, etc. Tomando un cristal uniáxico en forma de lámina de caras paralelas y haciendo incidir un haz luminoso estrecho normalmente a las caras, a la salida veremos un rayo en la di-

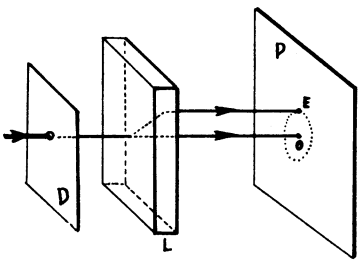


FIG. 18.5 Doble refracción.

rección incidente, que daría una mancha luminosa sobre una pantalla. El otro rayo emergente es paralelo al incidente pero está desviado lateralmente (fig. 18.5); el primero, llamado *rayo ordinario,* cumple con las leyes de la refracción, y el segundo, llamado *extraordinario,* no las cumple (para incidencia normal debería emerger en la misma dirección del rayo incidente, o sea, para $i = 0$ debe ser $r = 0$, además para incidencia oblicua podríamos comprobar que el rayo extraordinario no está contenido en el mismo plano que el incidente y la normal). El índice de refracción del rayo ordinario se mantiene constante para cualquier dirección incidente, pero el correspondiente al rayo extraordinario varía al variar el ángulo de incidencia. Si en un punto cualquiera tomamos sobre cada dirección de incidencia dos vectores de módulos respectivamente iguales a cada uno de los índices, el lugar geométrico de los extremos de los vectores del rayo ordinario es una esfera de radio igual a dicho índice n_0, mientras que el correspondiente a los índices n_e del rayo extraordinario es un elipsoide de revolución en torno al eje óptico. La esfera y el elipsoide son tangentes y los puntos de tangencia nos determinan el eje óptico, ya que en tal dirección $n_0 = n_e$. Puede darse el caso de que $n_0 > n_e$ (elipsoide tangente interiormente a la esfera) o bien $n_0 < n_e$ (esfera tangente interiormente al elipsoide). En el primer caso se dice que el cristal es negativo, y en el segundo caso, positivo (fig. 18.6).

Si analizamos los rayos ordinario y extraordinario, comprobaremos que están polarizados linealmente y que sus planos de polarización son perpendiculares. Podemos hacerlo mediante un espejo analizador, como el E' de la figura 18.4, haciendo incidir estos rayos con un ángulo i' correspondiente a la incidencia brewsteriana (para el vidrio unos 57°). Haciendo girar el espejo en torno a la dirección

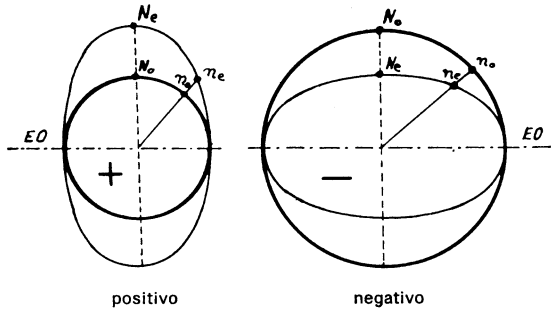


FIG. 18.6

incidente comprobaremos que varía la intensidad de cada uno de los rayos, presentando dos máximos y dos mínimos al girar E' 360°, como en el caso de la figura 18.4; y cuando el espejo tiene posición tal que uno de los rayos presenta intensidad máxima, la del otro es nula y recíprocamente. Girando el espejo 90°, el máximo se convierte en mínimo y el mínimo en máximo, lo que prueba que los planos de polarización son perpendiculares. Los dos vectores luminosos $\mathbf{y}_0$ e $\mathbf{y}_e$ son perpendiculares. Para determinar la dirección de estos vectores, definiremos la *sección principal* del cristal, que es la intersección del cristal con el plano determinado por el eje óptico y la normal a la cara de entrada de la luz en el cristal. Del experimento anterior podemos deducir, por el ángulo del espejo en la extinción de cada rayo, la posición de los planos de polarización y se comprueba que el plano de la sección principal es el plano de polarización del rayo ordinario; luego $\mathbf{y}_0$ es perpendicular a la sección principal e $\mathbf{y}_e$ es paralelo a tal sección. En la figura 18.7 representamos un cristal cuyo eje óptico es EO y la normal a la cara de entrada es N. La sección principal está rayada. En ella dibujamos el vector $\mathbf{y}_e$, contenido en el plano de la sección principal, y el $\mathbf{y}_0$ normal a dicho plano.

En un cristal uniáxico se llaman índices de refracción *principales* los correspondientes al eje mayor del elipsoide representativo de los índices de refracción en función de la dirección incidente (véase

fig. 18.6) y los designamos por N_e y N_0. En un cristal positivo N_e es el valor máximo y N_0 el mínimo. En un cristal negativo ocurre que el máximo es N_0 y el mínimo N_e.

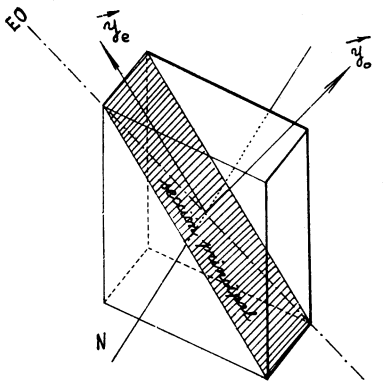


FIG. 18.7 Cristal uniáxico.

A continuación damos una tabla en la que se indican los índices de refracción principales de algunos cristales uniáxicos, para luz amarilla de sodio y a unos 15°C.

Cristal	*Sistema*	N_e	N_0	*Signo*
Espato de Islandia	Romboédrico	1,486	1,658	Negativo
Nitrato sódico	»	1,336	1,587	»
Esmeralda	»	1,576	1,582	»
Turmalina	»	1,620	1,639	»
Cuarzo	Hexagonal	1,553	1,544	Positivo
Carborundum	»	2,693	2,648	»
Rutilo	Tetragonal	2,903	2,616	»
Circonio	»	1,968	1,924	»
Calomel	»	2,656	1,973	»

Si el cristal es biáxico, repitiendo la experiencia esquematizada en la figura 18.5, también obtendremos doble refracción; pero si hacemos girar la lámina en torno de la dirección incidente, las dos manchas luminosas giran y ninguno de los dos rayos birrefractados cumple la ley de la refracción: *ambos son extraordinarios.* Los índices de refracción, excepto en las direcciones de los ejes ópticos, son distintos y, en general, dependen de la dirección incidente. Si represen-

tamos los valores de los índices a lo largo de cada dirección incidente encontraríamos dos superficies que se cortan en cuatro puntos, intersección de los dos ejes ópticos con las superficies, correspondientes a las dos direcciones incidentes para las cuales los dos índices de refracción coinciden. En este caso también están polarizados en ángulo recto los dos rayos, pero es más difícil encontrar los planos de polarización que en el caso de cristales uniáxicos. Se demuestra, en Óp-

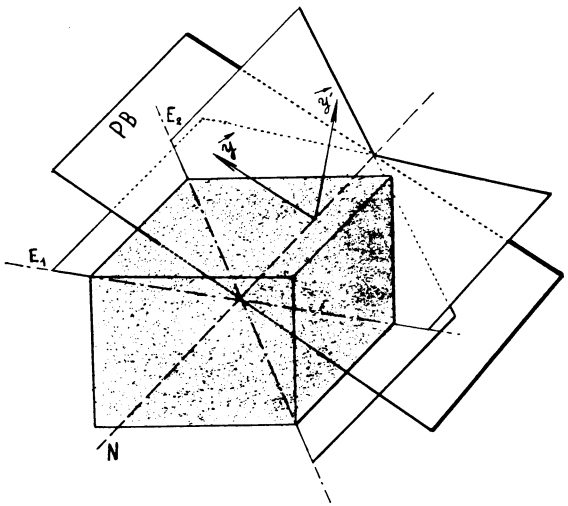


FIG. 18.8 Cristal biáxico.

tica electromagnética, que uno de ellos es el plano bisector del ángulo diedro formado por los planos determinados por la normal a la cara de entrada de la luz y cada uno de los ejes ópticos (la arista del diedro es la normal a la cara de entrada) y el otro es perpendicular a éste. Los vectores luminosos son perpendiculares a estos planos de polarización. En la figura 18-8 representamos esquemáticamente estos vectores luminosos y e y′ y el plano bisector *PB* en un cristal biáxico cuyos ejes ópticos son E_1 y E_2.

En lugar de representar los índices de refracción en función de la dirección incidente se puede hallar el índice correspondiente a una dirección determinada del vector luminoso. Para cada dirección del vector luminoso encontraremos un índice n. Se demuestra que si representamos los valores de n correspondientes a las direcciones del vector luminoso, encontramos un elipsoide cuyos semiejes N_1, N_2 y N_3 se llaman *índices principales*. Si conocemos el *elipsoide de ín-*

dices, podemos hallar los valores de los índices de los rayos birrefractados y las direcciones de los dos vectores luminosos. Para una dirección incidente determinada, trazaremos un plano normal a esta dirección, pues los vectores luminosos deben ser perpendiculares a la dirección de propagación, y obtendremos una elipse intersección con el elipsoide. Se demuestra que los índices correspondientes a los dos rayos birrefractados correspondientes a esta dirección son los semiejes de la elipse y las direcciones de los vectores luminosos son las de tales ejes. Si la dirección incidente coincide con uno de los ejes del elipsoide, los índices son los otros dos semiejes del elipsoide (los índices principales N_2 y N_3 si la incidencia es a lo largo del eje 1).

A continuación daremos una tabla en la que se indican los índices principales de diversos cristales biáxicos, para luz amarilla de sodio y a unos 15°C.

Cristal	*Sistema*	N_1	N_2	N_3
Aragonito	Ortorrómbico	1,686	1,682	1,531
Mica moscovita	Monoclínico	1,597	1,593	1,560
Yeso	»	1,529	1,522	1,520
Ácido tartárico	»	1,604	1,535	1,495
Azufre	Ortorrómbico	2,240	2,043	1,950
Topacio	»	1,625	1,618	1,615

De la tabla puede deducirse que el N_1 es el índice máximo y el N_3 el mínimo.

18.4 Prisma polarizador de Nicol. Exfoliando convenientemente un cristal de espato de Islandia puede obtenerse un romboedro, como el representado en la figura 18.9, y hacer que el ángulo *ADC* sea de 68° (en vez de 71° que es el que presenta después de la exfoliación) al pulir las caras terminales. Si la luz incide, como en la figura citada, paralelamente a las caras superior e inferior, que son paralelas, la sección principal es la *ABCD.* El eje óptico, contenido en dicha sección, forma unos 45° con *AD.* Una vez obtenido este cristal se corta según un plano perpendicular a la sección principal y que pasa por *AC,* como se indica en la figura 18.9, se pulen las caras del corte y se pegan con bálsamo del Canadá cuyo índice de refracción tiene el valor 1,55, que está comprendido entre los valores de los índices correspondientes a los rayos ordinario y extraordinario. El vector luminoso $\mathbf{y}_0$ del rayo ordinario es perpendicular a la sección principal y el $\mathbf{y}_e$ del extraordinario está contenido en tal sección, siendo

cada uno perpendicular a la dirección del rayo correspondiente. Este prisma, llamado de *Nicol*, lo esquematizamos en la figura 18.10, cortado según *AC*, representando la sección principal *ABCD*. El ángulo *DAC* es recto y el rayo incide paralelamente a los lados *AB*

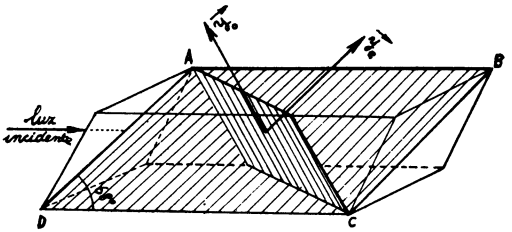


FIG. 18.9 Prisma de Nicol.

y *CD* formando un ángulo de incidencia $i = 90° - 68° = 22°$ con la normal *N* a la cara de entrada. El índice de refracción del rayo ordinario es constante y vale $n_0 = 1{,}658$; el del rayo extraordinario depende del ángulo de incidencia y puede hallarse a partir de la elipse representativa (sección del elipsoide de índices con el plano de inci-

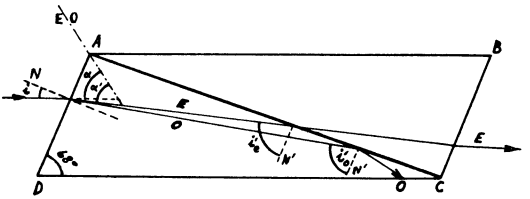


FIG. 18.10 Sección principal de un prisma de Nicol.

dencia) de la cual dibujamos en la figura 18.11 la parte superior comprendida entre los ejes principales. El ángulo que forma la dirección incidente con el eje óptico *EO* es $\alpha = 180 - 68 - 45 = 67°$ y de la figura deducimos que el índice correspondiente al rayo extraordinario para tal incidencia es $n_e = 1{,}51$. El ángulo de refracción del ordinario lo hallamos de sen 22°/sen $r_0 = 1{,}658$ y vale $r_0 = 13° 3' 29''$. De sen 22°/sen $r_e = 1{,}51$ hallamos el ángulo de refracción del rayo extraordinario, $r_e = 14° 21' 50''$. El ángulo de incidencia del ordinario en la sección *AC* es $i_0' = 90° - 13° 3' 29'' = 76° 56' 31''$, que es superior al ángulo límite en la capa vidrio-bálsamo del Canadá. Efectivamente, el seno del ángulo límite L_0 vale sen $L_0 = n/n_0 = 1{,}55/1{,}658$, de donde $L_0 = 69° 12' 20''$ superior a i_0'. Luego este rayo sufre reflexión

total y se pierde a través de la cara *DC*, absorbido a la salida de ella por una capa ennegrecida. El ángulo que forma el rayo extraordinario, refractado al atravesar la cara de entrada, con el eje óptico es $\alpha = 68° - 22° + 14° 21' 50'' = 60° 21' 50''$, para el cual el índice $n'_e = 1{,}52$ es inferior al del bálsamo y se refracta. La capa del bálsamo puede considerarse como lámina de caras paralelas. El ángulo de incidencia en esta lámina es $i_e' = 90° - 14° 21' 50'' = 75° 38' 10''$ y el de refracción lo hallamos de sen i_e'/sen $r_e' = 1{,}55/1{,}52$ y vale $r_e' = 71° 48' 12''$, que es igual al incidente en la cara de salida del bálsamo. El ángulo límite en la capa bálsamo-vidrio lo hallamos de sen $L_e = 1{,}52/1{,}55$ y su valor es $L_e = 78° 42' 35''$ superior al incidente y por tanto se refracta y emerge del bálsamo con el mismo ángulo i_e'.

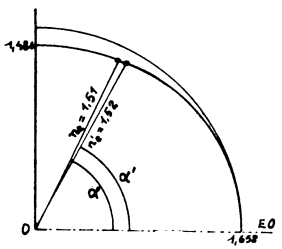


FIG. 18.11 Cuadrante de la elipse de índices.

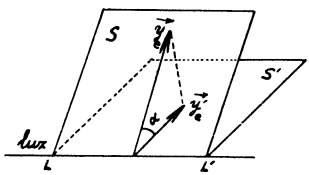


FIG. 18.12 *S* es la sección principal del nicol polarizador y *S'* la del analizador.

El ángulo de incidencia en la cara de salida es de $90° - 75° 38' 10'' = 14° 21' 50''$, el mismo que el de refracción al atravesar la cara de entrada, con lo que el de emergencia del cristal sería el mismo que el de incidencia en la cara de entrada, pero el índice de refracción entonces era 1,51 y ahora es 1,52. Aplicando la ley de la refracción para $n_e' = 1{,}52$ obtenemos para el ángulo de emergencia $r_e'' = 22° 9' 12''$, que difiere muy poco del de incidencia y podemos considerar que emerge del cristal en dirección prácticamente igual a la incidente, siendo despreciable también el desplazamiento lateral propio de las láminas de caras paralelas, dado que los nicoles son siempre de pequeño espesor (del orden del centímetro) (véase figura 14.9 *a*). A la salida del nicol tenemos luz polarizada linealmente: el rayo extraordinario cuyo vector luminoso $\mathbf{y}_e$ está contenido en el plano de la sección principal, siendo el plano de polarización uno que pasa por dicho rayo y es normal a la sección principal.

Si a continuación colocamos otro nicol cuya sección principal *S'* forma un ángulo α con la del primero *S* (fig. 18.12), como el vector

luminoso debe estar contenido en la sección principal, por ser extraordinario, descompondremos el vector $\mathbf{y}_e$ en dos, tales que uno, $\mathbf{y}_e'$, esté contenido en el plano de S' y el otro sea normal a este plano. El vector $\mathbf{y}_e'$ será el vector luminoso de la luz que atraviesa el segundo nicol. Si la intensidad a la salida del primero es I_1, se cumple $I_1 = K y_e^2$; la intensidad I a la salida del segundo será $I = K y_e'^2$. Como $y_e' = y_e \cos \alpha$, $I = I_1 \cos^2 \alpha$, que no es sino la ley de Malus (ec. 18.3). La luz polarizada por reflexión tiene un vector luminoso perpendicular al plano determinado por la normal al espejo y la dirección del rayo. Observando dicha luz con un nicol, al girar el nicol en torno a la dirección del rayo encontraremos la variación de intensidad que sigue la ley de Malus, siendo α el ángulo que forma el vector luminoso de la luz reflejada con el plano de la sección principal del nicol.

Si los nicoles de la figura 18.12 están *cruzados* (S y S' perpendiculares), $\alpha = 90°$ e $I = 0$ y tenemos extinción. Si los nicoles están paralelos (S paralela a S'), $\alpha = 0$, $I = I_1$. En la figura 18.13 representamos dos nicoles cruzados. En la figura 18.14 representamos esquemáticamente dos nicoles paralelos y dos cruzados. El nicol puede utilizarse como analizador de la luz polarizada, tanto si está producida por un primer nicol como si lo está por reflexión u otros métodos que veremos más adelante. Si analizando cierta luz logramos extinción al girar convenientemente el nicol, estará totalmente polarizada linealmente. Si la polarización es parcial, al ir girando el nicol observaremos máximos y mínimos, sin lograr la extinción.

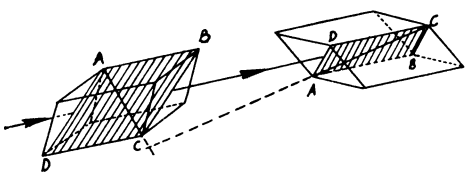


FIG. 18.13 Nicoles cruzados.

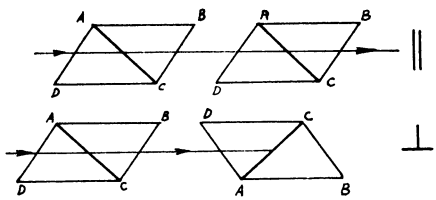


FIG. 18.14 Representación de dos nicoles *a*) paralelos, y b) cruzados.

El prisma de Glazebrook es un prisma de espato tallado en la forma de paralelepípedo rectángulo, como se indica en la figura 18.15. Se corta paralelamente al eje óptico y se vuelve a pegar con bálsamo del Canadá. Si la luz incide normalmente a la cara de entrada, el rayo ordinario y el extraordinario siguen en la misma dirección hasta que encuentran la capa de bálsamo en donde el rayo ordinario sufre

reflexión total y el extraordinario no. Ambos inciden en la sección AC con el mismo ángulo de 70°, pero el ángulo límite para el ordinario es 69° 12′ 20″ y para el extraordinario, que por formar 90° con el eje óptico le corresponde el índice mínimo 1,486, es de 73° 28′ 39″, superior al incidente y por tanto no sufre la reflexión total, se refracta en la misma dirección y emerge en la misma dirección de incidencia. La sección principal es perpendicular al plano del dibujo y por tanto el vector luminoso de la luz emergente es perpendicular al plano del dibujo, siendo este plano el de polarización del rayo extraordinario emergente.

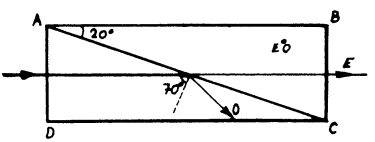


FIG. 18.15 Prisma de Glazebrook.

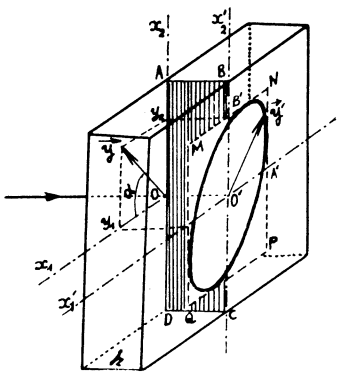


FIG. 18.16 Producción de luz polarizada elípticamente.

18.5 Polarización elíptica. Cortemos un cristal uniáxico paralelamente al eje óptico obteniendo una lámina delgada sobre la que haremos incidir luz monocromática, polarizada linealmente, perpendicular a la cara de entrada de la lámina. El vector luminoso y de la luz incidente forma un cierto ángulo con la sección principal, que es la $ABCD$ (fig. 18.16). A la entrada de la lámina tomamos dos ejes, uno x_1 perpendicular a la sección principal y otro x_2 contenido en la sección principal y normal a la dirección de propagación del rayo. Descomponemos el vector luminoso y en dos componentes, $\mathbf{y}_1$ según Ox_1 e $\mathbf{y}_2$ según Ox_2, que serán los vectores luminosos de los dos rayos que se propagan a través del cristal anisótropo con dos celeridades distintas $v_1 = c/n_1$ y $v_2 = c/n_2$, siendo n_1 y n_2 los índices de refracción correspondientes al rayo ordinario y al extraordinario, respectivamente (dirección del vector luminoso $\mathbf{y}_1$ perpendicular a la sección principal y del $\mathbf{y}_2$ contenido en esta sección). Hay que advertir que si el vector y tuviese la dirección 1, o bien la 2, la luz atravesaría el cristal sin modificación alguna.

Si empezamos a contar el tiempo en el instante en que la luz llega a O, el módulo del vector luminoso puede expresarse, en dicho punto, por $y = A \operatorname{sen} \omega t$. Sus componentes serán

$$y_1 = A \operatorname{sen} \omega t \cos \alpha \qquad y_2 = A \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \alpha \tag{18.4}$$

siendo α el ángulo que forma y con el eje Ox_1.

Teniendo en cuenta que estas componentes corresponden a los vectores luminosos de las dos ondas que se propagan en el cristal con las celeridades v_1 y v_2, antes citadas, a la salida de la lámina sus valores serán:

$$\begin{aligned} y_1' &= A \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{h}{v_1}\right) \cos \alpha = A \operatorname{sen} \left(\omega t - 2\pi \frac{n_1 h}{\lambda_0}\right) \cos \alpha \\ y_2' &= A \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{h}{v_2}\right) \operatorname{sen} \alpha = A \operatorname{sen} \left(\omega t - 2\pi \frac{n_2 h}{\lambda_0}\right) \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \tag{18.5}$$

siendo h el espesor de la lámina y λ_0 la longitud de onda, en el vacío, de la luz incidente. Recomponiendo estas y_1' e y_2' hallaremos la y' de la luz que sale de la lámina. Formalmente esta composición es la misma que la tratada en § 10.6, tomo I, y allí se demostraba que el movimiento resultante describía una trayectoria elíptica de ecuación 10.15. En nuestro caso, el extremo del vector luminoso y' describirá una elipse de ecuación

$$\frac{x_1'^2}{A'^2} + \frac{x_2'^2}{B'^2} - \frac{2 x_1' x_2'}{A'B'} \cos \theta = \operatorname{sen}^2 \theta \tag{18.6}$$

en donde $A' = A \cos \alpha$, $B' = A \operatorname{sen} \alpha$;

$$\theta = 2\pi \frac{(n_2 - n_1) h}{\lambda_0} \tag{18.7}$$

es la diferencia de fase. A la salida de la lámina tendremos, en general, luz polarizada elípticamente. Según lo indicado en § 10.6, tomo I, el sentido de recorrido de esta elipse será levogiro (contrario a las agujas de un reloj) si θ está comprendida entre 0 y π, será dextrogiro (el mismo sentido de las agujas de un reloj) si θ está comprendida entre π y 2π. El extremo del vector y' recorre la elipse periódicamente, siendo el período T el mismo de la vibración

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda_0}{c}$$

La elipse está inscrita en el rectángulo $MNPQ$ de base $2A'$ y altura $2B'$ (el doble de los semiejes de la elipse) y vamos a considerar los casos particulares siguientes:

1.° $\theta = k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ con lo que

$$\frac{2\pi h (n_2 - n_1)}{\lambda_0} = k\pi$$

si k es par $(k = 2k')$

$$h (n_2 - n_1) = k' \lambda_0 \qquad \cos\theta = 1 \qquad \text{sen}\ \theta = 0$$

la elipse degenera en la recta $x_1'/A' = x_2'/B'$ que es la diagonal MP del rectángulo $MNPQ$. Si $k = 2k' + 1$ es impar

$$h (n_2 - n_1) = (2k' + 1)\frac{\lambda_0}{2} \qquad \cos\theta = -1 \qquad \text{sen}\ \theta = 0$$

la elipse degenera en la recta NQ, que es la otra diagonal del rectángulo. En el primer caso, el vector luminoso y' a la salida es el mismo que a la entrada y la luz sale polarizada como la incidente; la lámina se dice que es de *onda entera*. En el segundo caso, el vector luminoso ha girado un ángulo 2α respecto el eje Ox_2'; la lámina se dice que es *semionda*. En ambos casos tenemos luz polarizada rectilíneamente, y son los únicos casos en que esto ocurre a la salida de tal lámina. En el caso del cuarzo, de la tabla de la página 403 hallamos que $n_2 - n_1 = 0{,}009$; para luz de longitud de onda $\lambda = 5800$ Å, hallamos

$$h = k' \frac{58 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^{-3}} = k'\, 6{,}44 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

que debe ser el espesor necesario para que sea una lámina de onda entera, y la mitad de este valor multiplicado por un número impar para que sea lámina semionda.

2.° $\theta = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, la elipse se convierte en

$$\frac{x_1^{\,2}}{A'^2} + \frac{x_2'^2}{B'^2} = 1$$

Si, además, $A'^2 = B'^2$, la elipse pasa a ser una circunferencia de radio $R = A' = B'$. Para que ocurra lo dicho debe ser $\text{sen}^2\,\alpha = \cos^2\alpha$, o sea $\alpha = \pm\,\pi/4$. De la condición $\theta = (2k + 1)\,\pi/2$ deducimos

$$h (n_2 - n_1) = (2k + 1)\frac{\lambda_0}{4}$$

La diferencia de caminos ópticos es múltiplo impar de un cuarto de longitud de onda; por esto, a la lámina se le llama *cuarto de onda.* Si a una lámina cuarto de onda llega luz polarizada rectilíneamente y el vector luminoso y forma 45° con los ejes x_1 y x_2, la luz a la salida está polarizada circularmente.

Si observamos luz polarizada elípticamente, después de atravesar un nicol, al girar el nicol en torno a la dirección del rayo incidente en él podremos constatar que la intensidad pasa por dos máximos y por dos mínimos en una vuelta completa, pero no se anula. El máximo se observa cuando el eje mayor es paralelo a la sección principal y el mínimo cuando lo es el eje menor. Si la luz es circular, la intensidad es la misma para cualquier orientación de la sección principal del nicol.

Podemos analizar la luz polarizada elípticamente, determinando la dirección de los ejes de la elipse, girando el nicol analizador hasta hallar un máximo o un mínimo. El eje mayor es paralelo a la sección principal del analizador en el primer caso y lo es al menor en el segundo. Coloquemos una lámina cuarto de onda antes del analizador de manera que los ejes x_1 y x_2 sean paralelos a los de la elipse. La luz polarizada elípticamente puede considerarse en este caso como la composición de dos vectores luminosos perpendiculares defasados en 90° y cuyas amplitudes son iguales a los semiejes de la elipse (véase fig. 10.9, tomo I, y 18.16).

18.6 Observación, a través de un analizador, de la luz que ha atravesado una lámina cristalina. Consideremos la lámina de la figura 18.16, sobre la que incide luz monocromática, polarizada linealmente, perpendicular a la cara de entrada. Colocamos un analizador que solamente dejará pasar la luz cuyo vector luminoso esté contenido en su sección principal. En la figura 18.17 representamos esquemáticamente las direcciones principales Ox_1 y Ox_2 de la lámina de

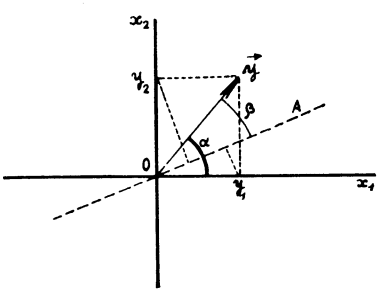


FIG. 18.17 Direcciones principales de la lámina de figura 18.16.

la figura 18.16, así como el vector luminoso **y** y la dirección *OA* de la sección principal del analizador. Podemos considerar que la luz polarizada incidente se ha obtenido con un nicol cuya sección principal es paralela al vector **y**. El ángulo β que forma **y** con *OA* es el mismo que el de las secciones principales de los dos nicoles. Al descomponer **y** en las dos componentes y_1 e y_2 dadas en las ecuaciones 18.4 vemos que las amplitudes de estas componentes son:

$$A_1 = A \cos \alpha \qquad A_2 = A \operatorname{sen} \alpha$$

y su defasaje (ec. 18.7)

$$\theta = 2\pi \frac{(n_2 - n_1)\, h}{\lambda_0}$$

Como sólo puede pasar a través del analizador la luz luminoso esté contenido en *OA*, hallaremos las compone... e $\mathbf{y}_2$ según la dirección *OA* y las amplitudes correspondientes se...

$$A_1' = A \cos \alpha \cos (\alpha - \beta)$$
$$A_2' = A \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} (\alpha - \beta)$$

la amplitud resultante, según la composición de Fresnel (§ 10.7, tomo I), será

$$A'^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos \theta =$$
$$= A^2 [\cos^2 \alpha \cos^2 (\alpha - \beta) + \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 (\alpha - \beta) +$$
$$+ 2 \cos \alpha \cos (\alpha - \beta) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} (\alpha - \beta) \cos \theta]$$

sustituyendo

$$\cos \theta = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}$$

y efectuando operaciones obtenemos:

$$A'^2 = A^2 \left[\cos^2 \beta - \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen} 2(\alpha - \beta) \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

pero sabemos que la intensidad a la entrada de la lámina es $I = K A^2$, luego

$$I' = I \left[\cos^2 \beta - \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen} 2(\alpha - \beta) \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right] \qquad (18.8)$$

siendo I' la intensidad a la salida del analizador.

Vamos a considerar los casos particulares siguientes:

1.° *Nicoles paralelos.* En este caso, $\beta = 0$, cos $\beta = 1$, y la ecuación 18.8 se convierte en

$$I' = I\left(1 - \text{sen}^2\ 2\alpha\ \text{sen}^2\ \frac{\theta}{2}\right) \tag{18.9}$$

si hacemos girar la lámina, variamos el ángulo α y obtendremos $I' = I$ en cuatro posiciones (las que anulan a sen 2α) $\alpha = 0$; 90°; 180°; 270°, o sea, cuando uno de los ejes principales Ox_1 u Ox_2 sean paralelos a la sección principal de los nicoles. Si $\alpha = 45°$

$$I' = I\left(1 - \text{sen}^2\ \frac{\theta}{2}\right) = I\ \cos^2\ \frac{\theta}{2} \tag{18.10}$$

la intensidad dependerá del coseno de θ, es decir, del espesor de la lámina y de la diferencia de índices $n_2 - n_1$. Si la lámina tuviese espesor variable, a la salida del analizador veríamos franjas negras para los espesores en que se cumpla:

$$\cos\ \frac{\theta}{2} = \cos\ \pi\frac{(n_2 - n_1)\,h}{\lambda_0} = 0 \quad \text{o sea} \quad h = \frac{(2k+1)}{n_2 - n_1}\frac{\lambda_0}{2}$$

2.° *Nicoles cruzados.* Ahora $\beta = 90°$, cos $\beta = 0$, y tenemos

$$I' = I\ \text{sen}^2\ 2\alpha\ \text{sen}^2\ \frac{\theta}{2} \tag{18.11}$$

para los valores de $\alpha = 0$; 90°; 180°; 270°, que antes nos daban $I' = I$, ahora ocurre que $I' = 0$ y tenemos extinción sea cual fuere el espesor de la lámina. Para valores de α distintos de aquéllos, obtendremos extinción cuando sen $\theta/2 = 0$, o sea cuando

$$\pi\frac{(n_2 - n_1)\,h}{\lambda_0} = k\,\pi$$

o sea

$$h = \frac{k\,\lambda_0}{n_2 - n_1} \tag{18.12}$$

Una lámina cristalina en forma de cuña colocada entre nicoles cruzados la veremos con franjas negras paralelas a la arista de la cuña. La distancia de las franjas al vértice será

$$d = \frac{h}{b}\,l$$

en donde h es el valor dado por (18.12), b es la base de la cuña y l la distancia de tal base a la arista.

Para $\alpha = 45°$

$$I' = I \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \tag{18.13}$$

Si iluminamos con luz blanca, como θ depende de la longitud de onda, la intensidad dependerá de ésta y al girar la lámina aparecerá coloreada excepto para los valores que hacen máximo a I' para nicoles paralelos y nula para los cruzados, que según hemos indicado, es cuando uno de los ejes principales de la lámina es paralelo a la secsección principal de los nicoles, pues en este caso I' no depende de θ por lo que veremos luz blanca en el primer caso y extinción en el segundo.

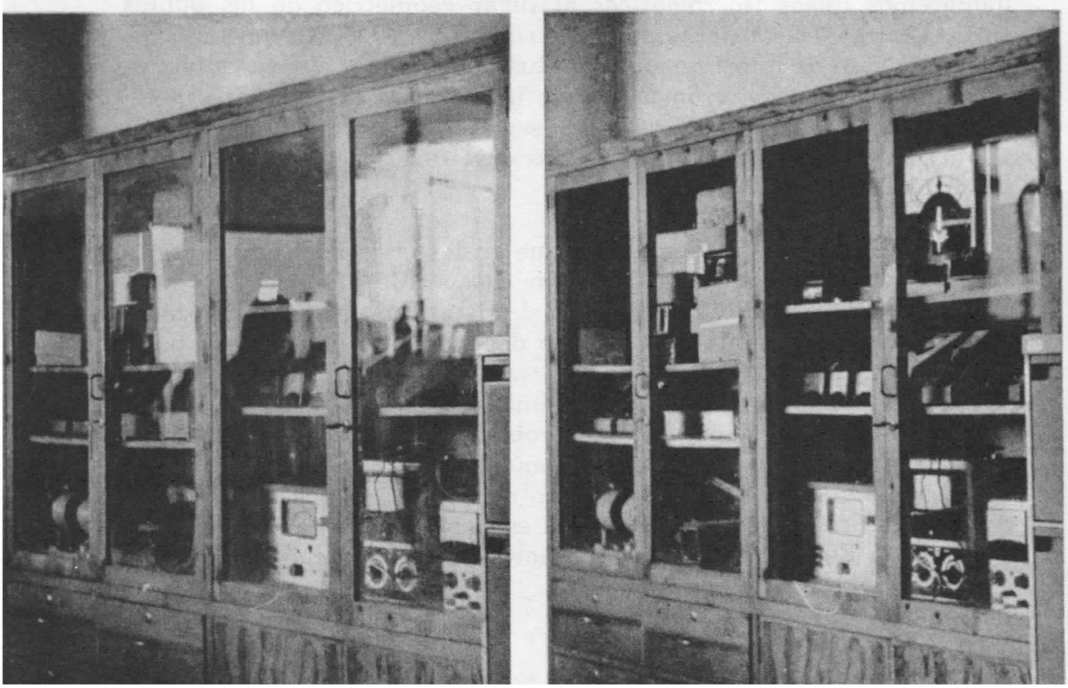
De las ecuaciones 18.10 y 18.13 se deduce que cuando I' es máxima para cierta longitud de onda, para nicoles paralelos, será nula para la misma longitud de onda en nicoles cruzados. En nicoles paralelos dominará esta longitud de onda sobre las demás y en nicoles cruzados faltará. Los colores en un caso y en otro son complementarios (véase pág. 463). Esto lo hemos visto para $\alpha = 45°$, pero se cumple para cualquier valor de α. Si la lámina no es uniforme, por variaciones de espesor o de índice de refracción (esto último, por ejemplo, debido a anisotropía accidental) aparecen franjas coloreadas y llamaremos *líneas isocromáticas* al lugar geométrico de los puntos en los cuales θ es constante para determinada λ_0. Este fenómeno constituye un caso de interferencias con luz polarizada y si ésta es blanca se llama *polarización cromática* y se utiliza para determinar espesores de láminas cristalinas delgadas según el color que presenten al ser observadas con luz polarizada, lo cual tiene gran interés en Petrografía.

18.7 Dicroísmo. Se demuestra que en los cristales anisótropos la absorción es función de la dirección del vector luminoso; el rayo ordinario y el extraordinario salen del cristal con distinta intensidad. Si utilizamos luz blanca, la absorción depende de la longitud de onda y veremos estos cristales coloreados, cambiando el color al variar la dirección del haz luminoso. El fenómeno se llama *pleocroísmo*. En los cristales biáxicos aparece el *tricroísmo*, y en los uniáxicos, el *dicroísmo*. En muchos cristales, este fenómeno es inapreciable, pero en algunos es notable. El cristal dicroico más conocido es la *turmalina*; en él la absorción del rayo ordinario es muy grande y prácticamente desaparece. En cambio, la del extraordinario es mucho menor, con

lo que a la salida de una lámina de turmalina tenemos luz polarizada linealmente cuyo vector luminoso está contenido en la sección principal. Esta lámina juega el mismo papel que el nicol polarizador. Con otra lámina de turmalina podemos actuar igual que con el nicol analizador. En mineralogía se utilizan *pinzas de turmalina* para el examen de cristales anisótropos. Tiene el inconveniente de que la absorción del extraordinario no es despreciable y depende de la longitud de onda. Con luz blanca se ve de color azul verdoso.

Hoy día se producen cristales dicroicos artificiales en los cuales la absorción de uno de los rayos es casi total y la del otro es pequeña, dependiendo poco de la longitud de onda. Son muy conocidas unas láminas polarizantes, que llevan el nombre comercial de *polaroid*, hechas de un plástico estirado con el fin de alinear las moléculas en una dirección. Añadiendo iodo adquiere la propiedad del dicroísmo. Se utilizan como analizadores y polarizadores, con la ventaja sobre el nicol de que tiene gran superficie, y sobre la turmalina, de ser casi transparente para el rayo no absorbido, y de ser prácticamente útil en todo el espectro visible. Dos láminas polaroid superpuestas, con los lados paralelos, dejan pasar la luz o la absorben completamente. Girando una de ellas en torno a la dirección de la luz incidente,

FIG. 18.18 Eliminación de reflejos con un polaroid.



manteniendo la otra fija, la intensidad varía, y al girar 90°, la luz se extingue o es máxima. Como en el caso de los nicoles, diremos que están paralelas cuando la intensidad es máxima y cruzadas cuando es nula. Puede analizarse luz polarizada por otros métodos. Por ejemplo, si observamos luz polarizada por reflexión, girando el polaroid llegaremos a la extinción si estaba totalmente polarizada y disminuiremos los reflejos si lo estaba parcialmente.

En la figura 18.18 vemos dos fotografías de un armario. En una de ellas (*a*) se ve el reflejo de la luz en los vidrios de tal manera que apenas vemos lo que hay en el interior; en la otra (*b*), tomada a través de un polaroid convenientemente orientado, han desaparecido los reflejos. Puede verse lo que hay en el interior. Obsérvese que en la parte superior, a la derecha, hay un reflejo que no desaparece totalmente; es debido a que la incidencia no es brewsteriana y la luz reflejada no está polarizada totalmente. Existen gafas con polaroid para evitar reflejos en la carretera y en las playas. Pueden utilizarse para tener luz de intensidad variable a voluntad; basta girar el analizador manteniendo el polarizador fijo para tener luz cuya intensidad varía según la ley de Malus (ec. 18.3). Aquí α es el ángulo girado por el analizador a partir de la posición de intensidad máxima.

18.8 Anisotropía accidental. En algunos casos, medios isótropos sometidos a diversos agentes físicos pueden presentar anisotropía. Distinguiremos los siguientes casos más importantes.

1.° ANISOTROPÍA POR DEFORMACIÓN. Los medios anisótropos son generalmente medios cristalinos cuya anisotropía proviene de su propia estructura. Si en un medio normalmente isótropo se produce una asimetría por la acción de fuerzas exteriores, podrá presentar anisotropía accidental. Consideremos un prisma de vidrio o de plástico, normalmente isótropos, y efectuemos una compresión uniforme en una de sus caras, siendo normal a la cara la dirección del esfuerzo. Desde el punto de vista óptico, la dirección del esfuerzo presenta propiedades distintas de otras direcciones. Se demuestra que el vidrio se comporta como un cristal uniáxico cuyo eje óptico es la dirección del esfuerzo. Sus propiedades ópticas quedarán definidas si conocemos los índices ordinario n_o y extraordinario n_e. El vidrio ordinario se convierte, por compresión uniforme en una cara, en un cristal uniáxico negativo ($n_o > n_e$). Si se invierte el sentido del esfuerzo, se invierte el fenómeno óptico; el vidrio, por tracción, se convierte en uniáxico positivo. Experimentalmente se demuestra que la diferencia de índices es directamente proporcional al esfuerzo y a la longitud de

onda, incidiendo la luz perpendicularmente a la dirección del esfuerzo, o sea

$$n_e - n_o = k\frac{F}{S}\lambda$$

El retardo óptico (diferencia de caminos ópticos) será

$$h\,(n_e - n_o) = k\frac{F}{b}\lambda$$

siendo h el espesor atravesado por la luz (normal a la cara) y b la otra dimensión de la sección ($S = h\,b$). Para el vidrio ordinario, $k = 5 \cdot 10^{-6}$ m/N para luz amarilla.

La sección principal está determinada por la dirección del esfuerzo y la dirección del rayo. Las direcciones del vector luminoso del rayo ordinario y del extraordinario son normal y paralela, respectivamente, a dicho plano. Si la muestra es plana y se aplican esfuerzos contenidos en su plano, la tensión en un punto queda determinada por dos tensiones perpendiculares, situadas en el plano, llamadas *tensiones principales*, y se demuestra que las direcciones de los vectores luminosos $\mathbf{y}_o$ e $\mathbf{y}_e$ son paralelas a dichas tensiones principales.

Si una lámina sometida a esfuerzos se ilumina con luz blanca polarizada y se observa a través de un nicol cruzado con el polarizador, observaremos líneas *isocromáticas* (§ 18.6), lugar geométrico de los puntos para los cuales la diferencia entre las tensiones principales es constante, y líneas *isoclinas*, lugar geométrico de los puntos en los cuales las tensiones principales son paralelas a las secciones principales de los dos nicoles. La diferencia entre los índices de refracción correspondientes a los vectores luminosos paralelos a las direcciones de las tensiones principales es directamente proporcional a la diferencia entre las tensiones principales, para determinada longitud de onda. La observación de las líneas isocromáticas permite conocer la diferencia entre las tensiones principales en cada punto y la observación de las isoclinas, las direcciones de tales tensiones. Estos hechos se utilizan en la resistencia de materiales en un capítulo denominado *fotoelasticidad*. Para estudiar la distribución de tensiones en un sólido deformado se construye un modelo de plástico transparente y se estudian las líneas isocromáticas e isoclinas para deducir las tensiones en el modelo sometido a los esfuerzos semejantes mecánicamente a los de la pieza real. De aquí se pueden encontrar las tensiones en el cuerpo estudiado.

2.° BIRREFRINGENCIA ELÉCTRICA. En 1875, JOHN KERR (1824-1901) descubrió que cuando una placa de vidrio se coloca en un campo eléc-

trico intenso adquiere birrefringencia. Este fenómeno aparece también en los líquidos y éstos se comportan como un cristal uniáxico cuyo eje óptico tenga la dirección del campo eléctrico. A este fenómeno se le llama *efecto Kerr* en honor a su descubridor. La experiencia demuestra que la diferencia entre los índices de refracción extraordinario y ordinario es directamente proporcional al cuadrado de la intensidad del campo eléctrico y a la longitud de onda de la luz empleada. La constante de proporcionalidad, que recibe el nombre de *constante de Kerr,* depende de la temperatura y del líquido en estudio. El nitrobenceno es el líquido de mayor constante de Kerr. Colocando una cubeta con nitrobenceno entre nicoles cruzados no percibimos luz, pero si aplicamos un campo eléctrico perpendicular a la dirección de la luz, veremos luz cuya intensidad depende del campo eléctrico. Si el campo varía, también varía la intensidad luminosa y por tanto podemos lograr luz de intensidad «modulada» por un campo eléctrico. Por ejemplo, las ondas sonoras que llegan a un micrófono producen una tensión eléctrica que, después de ser convenientemente amplificada, se aplica a una célula Kerr. El campo eléctrico aplicado al líquido varía según la intensidad de las ondas y por tanto la intensidad luminosa es proporcional a la intensidad del sonido. Si la luz va a parar a una emulsión fotográfica, el ennegrecimiento será función de la intensidad. Este método es el fundamento de una aplicación al registro sonoro de las películas cinematográficas.

Existe también la *birrefringencia magnética,* que origina un efecto parecido al anterior sustituyendo el campo eléctrico por uno magnético, siendo la diferencia de índices directamente proporcional al cuadrado de la intensidad del campo magnético, incidiendo la luz perpendicularmente a la dirección de dicho campo.

18.9 Polarización rotatoria. Si un haz de rayos paralelos incide en un nicol, sabemos que a la salida existe luz polarizada y el vector luminoso de la misma es paralelo a la sección principal del polarizador. Colocando una lámina de un cristal uniáxico tallada perpendicularmente al eje óptico, el vector luminoso debería tener la misma dirección a la salida de la lámina que a la entrada, lo cual puede comprobarse colocando un nicol analizador y observar la extinción si éste está cruzado con el polarizador. Pero en algunos cristales, como el cuarzo, se comprueba que el vector luminoso ha girado cierto ángulo en determinado sentido, lo cual puede comprobarse al ver que con nicoles cruzados no se presenta la extinción y que para lograrla se debe girar el nicol un ángulo tal, que el vector luminoso sea normal a la sección principal del analizador. Por tanto, este ángulo será

el mismo que el girado por el vector luminoso o, lo que es lo mismo, por el plano de polarización de la luz. Estas substancias se llaman *ópticamente activas* y al fenómeno se le llama *polarización rotatoria.* Experimentalmente se comprueba que el ángulo girado por el vector luminoso es directamente proporcional al espesor de la lámina

$$\alpha = C\,h$$

si la luz es monocromática. La constante C depende de la longitud de onda de la luz empleada y depende poco de la temperatura. En los cristales se caracteriza la actividad óptica por su *poder rotatorio,* que es el ángulo girado por el vector luminoso por unidad de longitud

$$[\alpha_0] = \frac{\alpha}{h} \quad \text{con lo que} \quad \alpha = [\alpha_0]\,h$$

En los fluidos se expresa el *poder rotatorio específico* como el cociente entre el ángulo girado y la distancia recorrida por la luz en el fluido multiplicada por la densidad

$$[\alpha] = \frac{\alpha}{h\,d} \qquad \alpha = [\alpha]\,h\,d$$

Una sustancia ópticamente activa disuelta en un líquido no activo posee un poder rotatorio específico $[\alpha]$, y el ángulo girado será directamente proporcional a la concentración, al espesor atravesado y al poder rotatorio específico

$$\alpha = [\alpha]\,c\,h$$

Esta es la *ley de Biot* relativa a las disoluciones.

Si la rotación es en el mismo sentido que las agujas de un reloj, para un observador que percibe la luz a la salida, la sustancia se dice que es *dextrogira* y si ocurre lo contrario, *levogira.* Existe cuarzo dextrogiro y levogiro. Una lámina de cuarzo de 3,75 mm de espesor produce un giro de 90° en la luz amarilla de sodio. Si unimos dos láminas de cuarzo del mismo espesor, una dextrogira y la otra levogira, tenemos cuarzo inactivo. Hay que tener en cuenta que si el cuarzo no está tallado perpendicularmente al eje óptico, se superpondrá la birrefringencia a la rotación, complicando el fenómeno.

Para explicar la polarización rotatoria, FRESNEL ideó una teoría cinemática en la cual considera que la onda incidente polarizada linealmente se descompone en dos ondas polarizadas circularmente, una dextrorsum y otra sinixtrorsum, que se propagan con distinta celeridad por el interior del cristal. Al componerse a la salida dan

otra vez luz polarizada linealmente, pero el vector luminoso no tiene la misma dirección que a la entrada. Con esta teoría se demuestra que el ángulo girado es directamente proporcional al espesor e inversamente proporcional a la longitud de onda.

18.10 Dispersión rotatoria. Hemos indicado que el ángulo depende de la longitud de onda. BIOT halló en el cuarzo que el poder rotatorio es muy aproximadamente

$$[\alpha] = \frac{K}{\lambda^2}$$

siendo K una constante. Muchas sustancias siguen una ley análoga y, en partciular, las disoluciones de sacarosa siguen prácticamente la misma ley.

Operando con luz blanca, la luz que atraviesa la sustancia activa a la salida del nicol analizador se ve coloreada. La coloración no cambia si se gira la lámina en torno a la dirección de la luz, pero sí al girar el analizador, y nunca podremos lograr la extinción.

Colocando dos láminas, una al lado de otra, una de cuarzo dextrogiro y la otra levogiro (fig. 18.19), obtenemos un bicuarzo. Si el espesor de ambas láminas es de 3,75 mm, el vector luminoso de la luz amarilla gira 90° en una lámina y 90° en sentido contrario en la otra. Si el vector luminoso y de la luz incidente es paralelo a la recta de unión de las láminas tendremos que, si la luz es blanca, los vectores luminosos de las luces roja R, amarilla A y azul B a la salida, tendrán el aspecto indicado en la figura 18.19. Si colocamos la

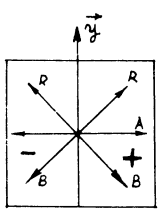


FIG. 18.19 Bicuarzo.

sección principal del analizador perpendicular a A, eliminamos la luz amarilla y parcialmente las demás, dominando los colores rojo y violeta (los más alejados de A) y se percibe una coloración uniforme llamada tinte sensible, pues al girar a la derecha el analizador vemos luz roja y al girar a la izquierda, luz azul, y con ello pueden determinarse pequeñas variaciones de ángulo.

18.11 Polarimetría. Si tenemos una sustancia ópticamente activa en disolución, conociendo el poder rotatorio específico $[\alpha]$ podemos hallar la concentración midiendo el ángulo α. Se llena un tubo polarimétrico, de longitud h constante (generalmente de 20 cm) con la disolución activa. Si conocemos $[\alpha]$ y medimos α podemos hallar la concentración c. Si tuviésemos varias sustancias activas en disolución, el giro total sería la suma algebraica de los giros debidos a cada uno de las sustancias

$$\alpha = ([\alpha_1]\, c_1 + [\alpha_2]\, c_2 + \ldots)\, h$$

(Recordemos que los valores de $[\alpha]$ pueden ser positivos o negativos según que la sustancia sea dextrogira o levogira.) En este caso tendríamos que conocer las concentraciones de todas menos una, o ir eliminando sucesivamente cada una de ellas midiendo en cada caso el ángulo girado. Por ejemplo, tenemos en disolución dos sustancias activas, una de poder rotatorio específico $[\alpha_1]$ y la otra $[\alpha_2]$. Midiendo el ángulo girado resulta ser α. Eliminamos una de las sustancias (por métodos químicos, por ejemplo) y midiendo el ángulo resulta α'. Tenemos

$$\alpha' = [\alpha_1]\, c_1\, h$$
$$\alpha = ([\alpha_1]\, c_1 + [\alpha_2]\, c_2)\, h$$

de la primera hallamos c_1; restando

$$\alpha - \alpha' = [\alpha_2]\, c_2\, h \quad \text{de donde} \quad c_2 = \frac{\alpha - \alpha'}{[\alpha_2]\, h}$$

Los poderes rotatorios $[\alpha]$ en el sistema giorgi vienen dados en m^2/kg y en el cgs en cm^2/g.

Para medir α se utilizan los *polarímetros*. El polarímetro simple consta (fig. 18.20) de un analizador A y un polarizador P entre los

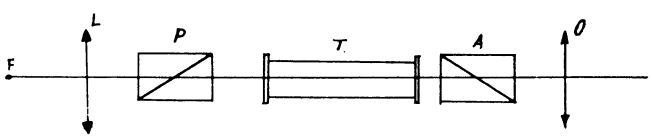


FIG. 18.20 Polarímetro simple.

que se coloca el tubo T en el que introduciremos el líquido. El analizador puede girar en torno al eje principal del sistema óptico que consta de una lente L en cuyo foco F colocamos el foco luminoso monocromático, y un ocular O tras el analizador. Teniendo los nico-

les cruzados, al colocar el líquido en el tubo vemos luz y habría que girar el analizador para restablecer la extinción. El giro se mide en un limbo graduado que está en la posición del analizador. Este método tiene el inconveniente que es difícil precisar si la extinción es completa, pues girando ligeramente el analizador observamos el mismo aspecto.

Este inconveniente se solventa en los *polarímetros de penumbra,* llamados también *de Laurent,* los cuales se componen de un polarímetro simple en el que se intercala una lámina semionda (§ 15.8) que divide el campo de visión en dos mitades, siendo una de las direcciones principales paralela al borde de la lámina. Si el vector lumi-

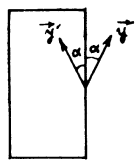


FIG. 18.21 Acción de una lámina semionda en un polarímetro de Laurent.

noso de la luz a la salida de *P,* y antes de la lámina, forma un pequeño ángulo α con el borde (fig. 18.21) la luz que ha atravesado la lámina forma el mismo ángulo simétricamente con el borde. Si colocamos el analizador con la sección principal perpendicular al borde tendremos luz de la misma intensidad en las dos mitades del campo de visión, cuya intensidad depende de α y será pequeña. La posición inicial será ésta y por tanto en el campo de visión percibiremos cierta penumbra, sin distinguir las dos mitades. Si la sustancia activa hace que gire el vector luminoso, en una mitad veremos luz más intensa y en la otra casi oscuridad y girando el analizador podemos lograr de nuevo la penumbra. Midiendo el ángulo girado por el analizador tendremos α y podremos hallar la concentración.

Una de las aplicaciones más importantes es la determinación de la concentración de sacarosa en una disolución azucarada. Se llama *grado sacarimétrico* al tanto por ciento en masa de sacarosa en una disolución deducida de medidas polarimétricas y con luz amarilla de sodio. Algunos polarímetros, que llevan una escala graduada en grados sacarimétricos, nos dan rápidamente la concentración de sacarosa.

18.12 Polarización rotatoria magnética. Colocando un cuerpo isótropo transparente en un campo magnético y mandando un haz de luz monocromática, polarizada paralelamente al campo, tiene lugar

el fenómeno de la polarización rotatoria. El fenómeno fue observado por primera vez por FARADAY y estudiado por VERDET, el cual halló que el ángulo girado es directamente proporcional a la intensidad del campo y al espesor atravesado. En los cuerpos ferromagnéticos la rotación es muy grande. Hay que observar a través de láminas muy delgadas para que la luz no sea totalmente absorbida. Se encuentra que la rotación es proporcional a la intensidad de imanación.

El poder rotatorio magnético (ángulo girado por unidad de longitud en un campo unidad) depende de la longitud de onda, por lo que aparece el fenómeno de la dispersión rotatoria magnética.

19

Espectros

Hemos visto en § 12.4 que la luz ocupa una región muy reducida del espectro electromagnético. A continuación estudiaremos el espectro visible, o sea, radiaciones de longitud de onda comprendida entre los 4000 Å y 7500 Å, que percibimos con una gradación de colores que empieza con el violado y finaliza con el rojo. Las radiaciones de longitud de onda desde unos centenares de angström hasta 3900 Å se llaman ultravioleta y las de longitud de onda desde 7500 Å hasta unas décimas de milímetro se llaman infrarrojas. Estas radiaciones no visibles se estudian por métodos parecidos a las de la luz visible y pueden considerarse como una prolongación del espectro visible y en conjunto se considera su espectro como espectro óptico. Los aparatos utilizados para el estudio de los espectros se llaman espectroscopios, si bien se prefiere llamarlos espectrómetros si permiten la medida directa de las longitudes de onda o espectrógrafos si registran tales longitudes de onda.

19.1 Espectroscopio de prisma. El índice de refracción de una sustancia depende de la longitud de onda utilizada para su medida. Generalmente, aumenta al disminuir la longitud de onda y esta variación depende de la sustancia. Este fenómeno recibe el nombre de *dispersión*. Para estudiar la dispersión en un medio determinado, se miden los índices de refracción n_F, para la luz de longitud de onda 4861 Å, n_C para la de 6563 Å, y n_D el índice «medio» en el aire para la longitud de onda 5893 Å. La dispersión se caracteriza por el poder dispersivo D:

$$D = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \tag{19.1}$$

o por su recíproco $v = 1/D$, que se llama *constringencia* o número de Abbe. Para los vidrios ópticos corrientes, v oscila entre 60 y 25,

para vidrios muy dispersivos llega a valer 20 y para los poco dispersivos alcanza el valor 100 ($D = 0{,}01$).

Si un haz de luz policromática incide en un prisma, la desviación (véase § 14.5) será distinta para cada haz monocromático y tendremos separados los haces luminosos integrantes de aquella luz y que constituyen su espectro. Éste es el fundamento de los espectroscopios de prisma, que representamos esquemáticamente en la figura 19.1. Se compone esencialmente de un colimador C, un prisma P y un anteojo A. El colimador es un tubo que tiene una rendija R en un

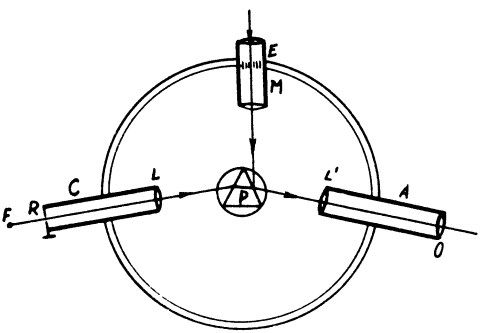


FIG. 19.1 Espectroscopio de prisma.

extremo y una lente L en el otro. El foco de la lente coincide con R de manera que a la salida de L tenemos un estrecho haz de luz paralela que, procedente del foco luminoso F, llega a la rendija. De esta forma todos los rayos del haz inciden en el prisma con el mismo ángulo. El prisma P está situado de manera que su arista sea paralela a la rendija R y perpendicular al eje del colimador. El anteojo A consta de un objetivo L' que forma una imagen real del espectro en su plano focal y un ocular O que permite al observador observar la imagen del espectro (virtual y mayor como en una lupa). Muchos espectroscopios tienen una escala transparente E en el tubo M con un sistema óptico adecuado para que, iluminando la escala, la luz transmitida se refleje en el prisma y forme su imagen en la misma posición que la del espectro y así podamos situar las posiciones de las rayas del espectro (imágenes de la rendija para cada haz dispersado) en tal escala. Con el ocular vemos simultáneamente la escala y el espectro. Para convertir el espectroscopio en espectrógrafo sustituimos el anteojo por una cámara fotográfica, en donde la película está colocada en el plano focal del objetivo, que es donde se forma la imagen real.

Si la luz que llega al colimador contiene radiaciones monocromáticas de longitudes de onda muy próximas, la rendija tendrá que ser muy estrecha para poderlas distinguir y nos aparecerán fenómenos de difracción. Tendremos que establecer un criterio de resolución como se hizo al hablar del poder separador de los instrumentos ópticos en § 17.15 y, como allí se hizo en la red de difracción, se toma como poder separador de dos longitudes de onda muy próximas $s = \lambda/\Delta\lambda$, donde $\Delta\lambda$ es la diferencia entre tales longitudes de onda y λ es el valor medio de ellas. Se demuestra que tal valor en el prisma es

$$s = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = b\frac{\Delta n}{\Delta\lambda} \tag{19.2}$$

en donde b es el espesor de la base del prisma y Δn es la variación del índice de refracción al variar λ en $\Delta\lambda$.

Ejemplo. Disponemos de un prisma de índice $n = 1{,}63$ para el cual la variación del índice en función de la longitud de onda es $\Delta n/\Delta\lambda = 10^{-5}$ Å^{-1} en las proximidades de la raya amarilla del sodio. Vamos a determinar el poder separador, el valor más pequeño de la diferencia entre dos longitudes de onda que podamos observar (en la región amarilla del sodio) y el poder separador s' de un prisma que permita distinguir las dos rayas amarillas del sodio (5890 y 5896 Å). El valor de b es 6 cm.

El poder separador es

$$s = 6 \text{ cm} \times \frac{10^{-5}}{10^{-8}} \text{ cm}^{-1} = 6000$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{s} = \frac{5893}{6000} \simeq 1 \text{ Å} \qquad s' = \frac{5893}{5896 - 5890} = 982$$

Para tener gran poder separador se necesitaría un prisma en el cual b fuese grande, además de un gran poder dispersivo. En la práctica es difícil hacer b muy grande y entonces se recurre a colocar varios prismas uno a continuación del otro. No pueden colocarse muchos, pues además de las pérdidas de intensidad luminosa, el aparato se haría excesivamente grande. Para aumentar el poder separador se recurre a la *autocolimación*, lo cual consiste en situar un espejo a la salida del último prisma para que la luz recorra otra vez los prismas en sentido contrario, duplicando así el poder separador.

Para estudiar el espectro infrarrojo podemos utilizar un espectrógrafo con prisma de vidrio hasta longitudes de onda del orden de $3 \cdot 10^{-6}$ m $= 3 \cdot 10^{4}$ Å utilizando como detectores emulsiones fotográficas sensibles al infrarrojo o células fotoeléctricas o fotoconductoras de sulfuro de plomo. Para longitudes de onda mayores debe sustituirse el prisma de vidrio por otro de bromuro de cesio (hasta longitudes de onda del orden de 0,05 mm); para estas longitudes de

onda deben utilizarse receptores térmicos, por ejemplo pares termoeléctricos.

Si se trata del espectro ultravioleta ,se sustituye el prisma de vidrio por otro de cuarzo o de fluorina utilizando el sistema fotográfico para el registro de este espectro no visible.

19.2 Espectroscopio de red. Al estudiar la red de difracción en § 17.14, indicábamos que por medio de la ecuación 17.38 podíamos determinar las longitudes de onda componentes de una luz policromática. El espectroscopio de red es análogo al de prisma sustituyendo éste por una red de difracción. Un artificio ideado por ROWLAND permite suprimir todos los objetivos y evitar las pérdidas luminosas por absorción, especialmente para el espectro ultravioleta. El fundamento del dispositivo es el siguiente:

Se trazan rayas equidistantes y muy delgadas, como en las redes planas, sobre una superficie esférica cóncava de radio r (fig. 19.2);

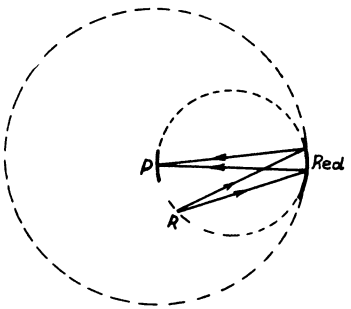


FIG. 19.2 Espectrógrafo de red.

colocando la rendija R en una circunferencia de diámetro r, se demuestra * que si tal circunferencia es tangente a la red, las diferentes ondas difractadas forman su imagen en puntos de esta misma circunferencia. Situando una placa fotográfica P tangente a esta circunferencia, o bien dándole forma cilíndrica del mismo radio y colocándola en el sitio indicado, tendremos el espectro deseado.

El poder separador de la red es el dado en la ecuación 17.42. Se ve que el poder separador de una red que tenga un número de trazos por unidad de longitud bastante elevado será superior al del prisma. Estas redes cóncavas trabajan por reflexión, con lo que se evitan absorciones selectivas, en especial en el espectro ultravioleta.

* Véase BORN-WOLF, *Principles of Optics*, pág. 412. Ed. Pergamon Press (1966).

A pesar de que la red es cóncava, como r es grande, puede aplicarse la ecuación 17.39 para la dispersión en las redes planas. Observando normalmente a la red, cos $\theta = 1$ y la ecuación 17.39 se convierte en

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{k}{h}$$

de donde

$$d\theta = \frac{k}{h} d\lambda \tag{19.3}$$

La variación de ángulo es directamente proporcional a la variación de la longitud de onda. Esta característica es la de los espectros llamados *normales* y en ellos la distancia entre dos rayas es directamente proporcional a la diferencia entre sus longitudes de onda, lo que permite la determinación de una raya intermedia por interpolación. En este espectro, las radiaciones más desviadas son las de mayor longitud de onda, al contrario de lo que sucede en el prisma, pues en él, según hemos dicho, la dispersión y la desviación aumentan al disminuir la longitud de onda. Además, en el espectro de prisma las rayas de mayor longitud de onda están menos separadas que las de longitud de onda menor. Sin embargo, tiene la ventaja de que el espectro de prisma es más luminoso y por esto se utiliza en Astrofísica. Para el estudio del infrarrojo puede utilizarse el espectrógrafo de red y en tal caso los trazos no es necesario que sean tan próximos como en los utilizados para el visible y ultravioleta y es, por tanto, de más fácil construcción.

19.3 Espectros de emisión. Para que una substancia emita radiación debe someterse a *excitaciones* adecuadas: temperaturas elevadas, descargas eléctricas o absorción de otras radiaciones electromagnéticas. Elevando la temperatura de un cuerpo, éste emite radiaciones cuya longitud de onda va disminuyendo al aumentar la temperatura. Si un sólido o un líquido se calienta hasta la incandescencia, emite un espectro continuo, es decir, un espectro que contiene radiaciones con todas las longitudes de onda comprendidas entre dos límites extremos. Observando con un espectroscopio la luz emitida por un filamento incandescente, vemos una sucesión de colores desde el rojo al violeta variando de manera continua, extendiéndose dicho espectro en las regiones anterior y posterior al espectro visible con límites determinados. Este tipo de excitación produce una radiación de origen puramente térmico. En los gases, la radiación de origen térmico da lugar a un espectro discontinuo constituido por radiaciones mono-

cromáticas de longitud de onda perfectamente determinada y característica del gas.

Algunos cuerpos emiten luz visible a temperatura inferior a la necesaria para la incandescencia; a este fenómeno se le llama *termoluminiscencia.*

Para que los sólidos y los líquidos puedan producir un espectro de rayas discontinuas deben vaporizarse antes de producir la emisión.

Una sal metálica calentada por medio de una llama puede volatilizarse y la agitación térmica de las moléculas contenidas en la llama provocan la excitación térmica de la sustancia. Si la temperatura de la llama es elevada y según sea la sustancia, las moléculas se disocian y tenemos un espectro de rayas característico del metal. Esto es lo que ocurre con el cloruro sódico, que comunica a la llama un color amarillo y da un espectro constituido por dos rayas muy próximas que constituyen el llamado doblete del sodio, característico de este elemento, y lo mismo sucedería con otra sal de sodio.

Si las moléculas no se disocian, el espectro molecular es más complicado y está constituido por numerosas rayas muy próximas, sólo visibles con espectroscopios de gran poder separador, formando una banda luminosa cuyas rayas se van aproximando cada vez más hasta el límite de la banda. El espectro está constituido por un conjunto de bandas.

Otro procedimiento de excitación es el arco eléctrico. Cuando salta el arco entre dos electrodos metálicos, éstos se calientan y la parte superficial enfrentada de los mismos se volatiliza. En la parte central del arco la temperatura es mucho más elevada que en una llama y se producirá un espectro de rayas de los átomos excitados. Este espectro se llama *espectro de arco* y corresponde al de los átomos neutros, y aunque en algunas ocasiones se pueden ionizar algunos átomos por choque con electrones emitidos por el cátodo, dominará el de los que están en estado neutro. Para estudiar el espectro de arco de una sustancia cualquiera, se puede colocar ésta en un hueco del electrodo positivo colocado verticalmente en la parte inferior. Los electrodos son, generalmente, de carbón. Al saltar el arco se volatiliza la sustancia y obtenemos su espectro de arco.

Otro tipo de excitación es el de chispa. Se hace saltar la chispa eléctrica entre dos electrodos metálicos, utilizando la descarga de un condensador que se carga por medio de un carrete de Ruhmkorff o un transformador de alta tensión con tensión alterna de alta frecuencia. En este caso el campo eléctrico es bastante mayor que en el caso del arco. Los electrones adquieren una celeridad suficiente para ionizar por choque a los átomos y se obtiene el espectro de los

átomos ionizados. Por eso, los espectros de arco y de chispa de un mismo elemento son diferentes. El de llama sólo contiene algunas rayas del espectro de arco.

En el caso de gases o de sustancias fácilmente volatilizables, se encierran en un tubo y se someten a una descarga eléctrica. Si se trata de un gas, debe estar a poca presión y si es una sustancia fácilmente volatilizable, la descarga la volatiliza y el espectro obtenido será el del gas o el del vapor de la sustancia. Según sea el campo eléctrico en la descarga, podemos obtener espectro molecular, atómico o mezcla de ambos, según que la energía sea suficiente o no para disociar las moléculas.

19.4 Espectros de absorción. Si entre la rendija de un espectroscopio y un foco luminoso incandescente que da un espectro continuo intercalamos una sustancia, el espectro observado contiene bandas o rayas oscuras que constituyen el espectro de absorción de la sustancia en estudio. Las rayas negras son debidas a la ausencia de la radiación correspondiente y que ha sido absorbida por la sustancia y las bandas negras se deben a la absorción de un conjunto de radiaciones comprendidas entre determinados límites.

Los sólidos, líquidos y sustancias disueltas a la temperatura ambiente dan, generalmente, espectro de absorción de bandas que pueden ser muy anchas. Los gases producen, corrientemente, espectros de absorción de rayas. En general, los gases y los vapores producen un espectro de absorción en el cual las rayas oscuras corresponden a las rayas luminosas de su espectro de emisión y lo mismo podemos decir del espectro de bandas, correspondiente a un sólido o líquido. Esta ley de reciprocidad es muy importante, pues permite estudiar el espectro de un átomo o de una molécula tanto por emisión como por absorción. Observando la luz solar con un espectroscopio se ponen de manifiesto unas rayas negras, llamadas *rayas de Fraunhofer,* debidas a la absorción de ciertas radiaciones por la atmósfera solar. Estudiando las longitudes de onda de estas rayas oscuras se puede saber las sustancias presentes en dicha atmósfera solar, pues si la raya oscura corresponde a una longitud de onda de la raya de emisión de cierto átomo, éste está contenido en la masa absorbente.

19.5 Análisis espectral. El espectro de emisión (y por tanto el de absorción) es característico del átomo o molécula que lo ha producido. El espectro es una especie de ficha de identificación de átomos o moléculas. El análisis espectral o espectroquímico se basa en el estudio de los espectros para identificar los elementos que componen una sustancia determinada. Para el análisis cualitativo basta determinar los elementos presentes y para el análisis cuantitativo

hay que obtener los porcentajes de tales elementos en los compuestos o en las aleaciones. Para el análisis cualitativo se acostumbra utilizar un espectrógrafo fotografiando en el mismo cliché el espectro que estudiamos y otro conocido (de hierro o mercurio, etc.) cuyas rayas principales se tienen catalogadas y ordenadas por sus longitudes de onda. Se puede determinar la longitud de onda de una raya incógnita comprendida entre dos conocidas, midiendo las distancias, en el espectro, de ésta a las conocidas y por interpolación se halla la longitud de onda deseada. De este modo podemos identificar cualquier elemento aunque esté presente en tan escasa proporción que el análisis químico ordinario sería incapaz de poner de manifiesto. Para el análisis cuantitativo se tiene que comparar la intensidad de una raya del espectro con otra del espectro de la misma sustancia de la cual conocemos la cantidad presente en el compuesto o en la aleación. La comparación de intensidades se realiza con células fotoeléctricas que reciben la radiación a través de una rendija estrecha que limita la raya que nos interesa.

19.6 Espectroscopía de microondas. Las ondas electromagnéticas de longitudes de onda entre 1 mm y 30 cm se llaman *microondas*. En la actualidad se ha desarrollado una técnica de estudio de los espectros de absorción de las microondas para su aplicación a la determinación de la estructura molecular, fenómenos de resonancia eléctrica o magnética, enlaces químicos, etc. Se inició el estudio en 1934 por CLEETON y WILLIAMS, pero durante la Segunda Guerra Mundial los investigadores de microondas se dedicaron al desarrollo de las técnicas de *radar* y no se empezó a publicar trabajos de espectroscopía hasta 1946.

El espectrómetro de microondas difiere considerablemente del utilizado en espectros ópticos. La parte fundamental del espectroscopio óptico es el elemento dispersivo (prisma o red), el de microondas no necesita elemento dispersivo ya que las radiaciones son esencialmente monocromáticas y la frecuencia se puede variar y medir con toda precisión por métodos electrónicos. Lo que interesa es determinar la absorción de una radiación de determinada frecuencia por una sustancia determinada y conocer la variación de la misma al variar la frecuencia. El primer espectrómetro, usado por los autores citados, era en parte electrónico y en parte óptico. La medida de la longitud de onda se verificaba por métodos similares a los utilizados en óptica con la red de difracción y la detección se realizaba con un cristal. Los actuales constan de un generador, una cuba de absorción y un receptor. En el generador está conectado un ondámetro para medir la longitud de onda, que podemos variar a voluntad; el receptor puede ser un osciloscopio con un detector de cristal o un registrador a pluma. Al variar la frecuencia del generador podemos determinar los máximos y mínimos de absorción en función de la longitud de onda y ello nos dará la información buscada de la sustancia en estudio.

19.7 Espectrografía de rayos X. En § 12.6 hemos estudiado la producción de los rayos X e indicábamos que la radiación de enfrenamiento daba un espectro continuo, superpuesto al cual destacan las rayas características de la sustancia que constituye el anticátodo. Aun cuando se consideraron desde su descubrimiento como radiaciones electromagnéticas, se tardó cerca de 20 años en poder medir su longitud de onda. Los elementos dispersivos utilizados para la pro-

ducción y estudio de los espectros ópticos no pueden aplicarse con éxito en los espectros de rayos X. Los prismas no producen dispersión suficiente y las redes de difracción construidas por el rayado de una superficie producen desviaciones inapreciables dada la pequeñez de la longitud de onda; sin embargo, se ha logrado obtener un espectro de difracción de rayos X utilizando una red ordinaria con incidencia rasante y operando por reflexión. El espectro de difracción de tales radiaciones se obtuvo por primera vez usando los cristales como redes naturales. En 1912, MAX VON LAUE tuvo la acertada idea de que una red cristalina puede sustituir a una red de difracción artificial, cuando se trata de ondas electromagnéticas de tan pequeña longitud de onda como los rayos X, ya que el espaciado de los retículos de la red cristalina es del orden de magnitud de la λ de los rayos X. Antes de estudiar el método de Laue vamos a recordar unas ligeras nociones de cristalografía:

La mayoría de sólidos están constituidos por *cristales*, es decir, conjuntos de átomos o de iones distribuidos regularmente en los vértices de un paralelepípedo que se va repitiendo en el espacio. El conjunto de paralelepípedos iguales constituye una *red cristalina*. Los vértices de los paralelepípedos, donde están situados los átomos, constituyen los *nudos* de la red. Cada tres nudos determinan un plano que contiene multitud de nudos y que recibe el nombre de *plano reticular*. Todos los planos reticulares forman una misma familia y se suceden a intervalos iguales. El paralelepípedo más simple de los que constituyen la red se llama *celda fundamental* y puede determinarse por tres vectores **a**, **b** y **c** de direcciones y longitudes coincidentes con las de tres aristas concurrentes. Tomando estos vectores como ejes básicos, puede referirse a ellos la posición de los nudos y la de los planos reticulares. Conociendo las intersecciones de un plano reticular con dichos ejes, tomando sus valores recíprocos y multiplicando por el mínimo común múltiplo, se encuentran tres números enteros que se llaman *índices de Miller* y nos fijan la posición de cualquier plano reticular. En la figura 19.3 representamos la red cúbica del ClNa con algunos planos reticulares con sus correspondientes índices de Miller. (Obsérvese que cuando la intersección se realiza en el infinito, el índice de Miller es nulo.)

Plano $AA'DD'$ (100)

$A'B'BA$ (110)

ABC (111)

Los índices de Miller designan la posición de un plano reticular y la de su familia de planos paralelos.

Vamos a demostrar la ley de Laue. Sean dos nudos N_1 y N_2 de una red cristalina (fig. 19.4) que, alcanzados por un haz de rayos X, se convierten en sendos centros de ondas secundarias y vamos a determinar la difracción producida por los mismos. Definimos la direc-

ción incidente por el versor $\mathbf{u}_0$ y una dirección de difracción cualquiera por el versor $\mathbf{u}$. Si el haz es paralelo, la diferencia de marcha

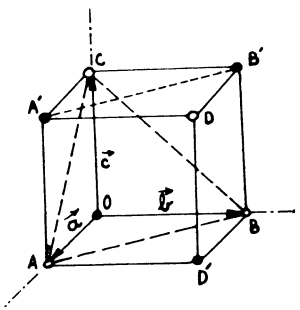


FIG. 19.3 Índices de Miller en algunos planos reticulares de una celda cúbica.

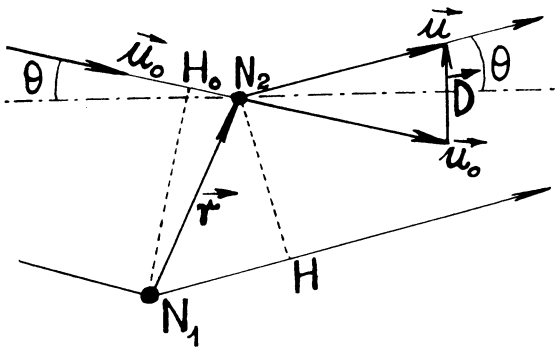


FIG. 19.4 Difracción en dos nudos de una red.

entre los rayos del haz incidente y los que tienen la dirección de difracción definida por $\mathbf{u}$, es

$$N_2H_0 - N_1H = \mathbf{r}\cdot\mathbf{u}_0 - \mathbf{r}\cdot\mathbf{u} \tag{19.4}$$

en donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición de un nudo referido al otro. Llamando $\mathbf{D}$ a la diferencia entre los versores, $\mathbf{D} = \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}$, escribimos

$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}) = \mathbf{r}\cdot\mathbf{D}$$

El plano que pasando por N_2 es perpendicular a $\mathbf{D}$ puede considerarse como un *plano de reflexión* (*PR*), que forma el ángulo θ con la dirección incidente $\mathbf{u}_0$ y el mismo con la de difracción $\mathbf{u}$. El rayo incidente reflejado en el plano citado seguiría la dirección definida por $\mathbf{u}$, por lo que podemos sustituir la difracción por la reflexión en planos de reflexión determinados.

Para que en la dirección $\mathbf{u}$ tengamos un máximo, la diferencia de marcha debe ser múltiplo de la longitud de onda (véase § 17.2), así que la condición de máximo de difracción será

$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}) = \mathbf{r}\cdot\mathbf{D} = k\,\lambda \tag{19.5}$$

Si se produce difracción en los diversos nudos de la red, en la dirección $\mathbf{u}$ tendremos máximo si la condición (19.5) se cumple para cada par de nudos, con lo que podemos extender lo dicho a una red tridimensional. Sean $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ los vectores que determinan la celda fundamental. El vector $\mathbf{r}$ de (19.4) deberá sustituirse por $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ o $\mathbf{c}$ y ten-

dremos tres relaciones similares a la (19.5) para definir la condición de máximo:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot\mathbf{D} &= n_1\lambda \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{D} &= n_2\lambda \\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{D} &= n_3\lambda \end{aligned} \tag{19.6}$$

en donde n_1, n_2 y n_3 son números enteros. Éstas son las llamadas *ecuaciones de Laue* y pueden escribirse de otra manera. Si llamamos α_1, α_2, α_3 a los cosenos de los ángulos que forma **D** con los vectores **a**, **b** y **c** respectivamente, las ecuaciones (19.6) pueden escribirse

$$\begin{aligned} 2a\,\alpha_1 \operatorname{sen}\theta &= n_1\lambda \\ 2b\,\alpha_2 \operatorname{sen}\theta &= n_2\lambda \\ 2c\,\alpha_3 \operatorname{sen}\theta &= n_3\lambda \end{aligned} \tag{19.7}$$

ya que siendo **D** la diferencia entre dos vectores iguales, de módulo unidad y que forman el ángulo 2θ entre sí, $D = 2 \operatorname{sen}\theta$.

Las ecuaciones (19.7) deben cumplirse simultáneamente, luego sólo existen soluciones para determinados valores de θ y de λ. Si la celda elemental es ortorrómbica, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, y de 19.7 deducimos que deberá cumplirse

$$\frac{\lambda^2}{4\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2}\right) = 1 \tag{19.8}$$

Las redes cristalinas se diferencian de las redes usadas en espectros ópticos en que en aquéllas podíamos obtener series completas de espectros que contenían cualquier longitud de onda entre límites determinados, mientras que la red cristalina tridimensional es *selectiva*, es decir, para determinada λ tendrá máximo en una dirección θ si se cumplen ciertas condiciones dependientes de la estructura cristalina. Al pasar de un cristal a otro, varían **a**, **b** y **c** y los máximos serán en otra dirección. El espectro depende de la estructura cristalina y puede usarse para su determinación.

Vamos a relacionar los planos de reflexión con los planos reticulares. Supongamos un plano reticular que pase por los nudos cuya posición está definida por los vectores **a**, **b** y **c**. Tomando estos vectores para definir un sistema de ejes coordenados, los puntos de intersección del plano con los ejes distan del origen a, b y c respectivamente. Las intersecciones de las familias de planos reticulares paralelos distan valores múltiplos de los anteriores. Los cosenos directores de la normal a estos planos son proporcionales a $1/a$, $1/b$ y $1/c$. De

las ecuaciones 19.7 deducimos que los cosenos directores de **D** son proporcionales a $1/a$, $1/b$ y $1/c$; como **D** es normal al plano de reflexión, resulta que los planos reticulares y los planos de reflexión deben ser paralelos. La difracción será máxima en una dirección cuando se pueda considerar que el haz incidente, reflejado por un plano reticular (coincidente con un plano de reflexión) tiene la dirección citada.

De la regularidad en la distribución de los nudos en la red cristalina se deduce que una familia de planos reticulares paralelos está constituida por planos equidistantes. A la distancia entre ellos, *d*, se le llama *espaciado de la red* y su valor lo podemos hallar en función

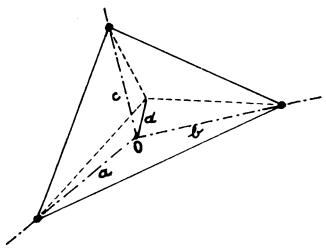


FIG. 19.5 Determinación del espaciado *d*.

de *a*, de *b* o de *c*. Efectivamente, considerando el plano reticular que pasa por el origen del sistema coordenado, la distancia entre planos será igual a la distancia del origen al plano que pasa por los puntos definidos por los vectores **a**, **b** y **c**. Así pues, se verifica (fig. 19.5)

$$d = a\,\alpha_1 = b\,\alpha_2 = c\,\alpha_3 \tag{19.9}$$

con lo que las ecuaciones de Laue se reducen a

$$2\,d\ \text{sen}\ \theta = n\,\lambda \tag{19.10}$$

siendo n un número entero llamado *orden de reflexión*. Esta ecuación recibe el nombre de *ley de Bragg*, descubierta por WILLIAM LAWRENCE BRAGG en colaboración con su padre, WILLIAM HENRY, en 1913, los cuales crearon un nuevo procedimiento científico para el estudio de estructuras cristalinas por medio de los rayos X, por lo que compartieron el premio Nobel de Física en 1915. El año anterior, dicho premio fue concedido a MAX VON LAUE por sus estudios acerca de la difracción de los rayos X por los cristales.

A continuación vamos a examinar algunos métodos experimentales de obtención de espectros de rayos X que se aplican al estudio de estructuras cristalinas.

El *método de Laue* utiliza un generador de rayos X que produce un espectro continuo (por ejemplo, de longitudes de onda comprendidas entre 0,2 y 2 Å). Se selecciona un haz estrecho intercalando una pantalla opaca a tales rayos en la cual existe un pequeño orificio. A continuación se colocan la muestra cristalina y dos películas sensibles, una en la parte anterior a la muestra y otra en la posterior. El cristal selecciona y difracta los valores de las longitudes de onda que satisfacen a la ley de Bragg (19.10). Debido al amplio margen de longitudes de onda, es posible que una misma familia de planos difracte diversas de ellas, en distintos órdenes de reflexión, las cuales van a parar al mismo punto del diagrama. Ello dificulta la determinación de intensidades difractadas en una dirección.

El método del cristal giratorio se basa en hacer girar el cristal que recibe el haz de rayos X. De esta forma varía θ y las reflexiones que cumplen con la ley de Bragg corresponden a longitudes de onda distintas. Si el haz es estrecho, colimado por una rendija estrecha, cada una de las radiaciones correspondientes a la λ adecuada ennegrecen una película sensible dando una raya negra cuya posición depende de la longitud de onda. El cristal giratorio juega, respecto a los rayos X, el mismo papel que el prisma respecto a la luz.

El método de la muestra pulverizada, muy utilizado en el análisis de metales y aleaciones, se basa en irradiar con un haz monocromático de rayos X la muestra pulverizada finamente. Considerando en todos los pequeños cristales una misma familia de planos reticulares, cada familia tendrá, en el conjunto, todas las orientaciones posibles. Las que formen con el rayo incidente un ángulo θ que cumpla con la ley de Bragg, darán un rayo reflejado que forma con el incidente un ángulo de $180° - 2\theta$. Todos los rayos reflejados por estas familias constituyen un cono de semiángulo $\pi - 2\theta$. Colocando una placa fotográfica a una distancia b de la muestra, se formarán anillos negros de radio

$$R = b \operatorname{tg} (\pi - 2\theta) \qquad (19.11)$$

En la práctica se registran solamente porciones de anillo. Estos anillos se acostumbran llamar *anillos de Debye-Scherrer*.

Utilizando cristales de estructura conocida podremos hallar las longitudes de onda de los rayos X, por ejemplo usando cristales de sal gema.

El espectro característico es, en general, más simple que el de los espectros ópticos y puede utilizarse para el análisis químico como los espectros ópticos. Puede utilizarse también en el estudio de los espectros de absorción. Basta analizar un haz policromático de rayos X, por ejemplo por medio de un cristal giratorio, después de que tal haz haya atravesado una lámina delgada de la muestra a estudiar. En el espectro registrado en la película sensible se observará la ausencia de las radiaciones absorbidas.

20

Energía radiante

Desde los experimentos de Hertz (§ 12.3) se aceptó que la luz formaba parte del espectro electromagnético, ya que los fenómenos de propagación se interpretaban con las mismas leyes. Se pretendió estudiar la radiación mediante las leyes de la Electrodinámica, según las cuales una carga acelerada radía energía electromagnética. Se quiso extender estas leyes a la emisión de energía electromagnética por las partículas cargadas que estaban en movimiento en el interior de la materia, y cuyo movimiento, al igual que la radiación emitida, estaba afectado por la temperatura. Los resultados previstos por esta teoría no concordaban con los hechos observados, y a finales del siglo XIX no se había logrado dar una explicación satisfactoria a la emisión de energía radiante. A principios del siglo XX, MAX PLANCK, para lograr dar una explicación correcta, tuvo que renovar los conceptos tradicionales y con ello abrió el camino al conocimiento de la estructura de la materia. En este capítulo y en los siguientes daremos una visión general de estas nuevas ideas y de los cambios que introdujeron en el pensamiento científico.

20.1 Radiación térmica. Se dice que un cuerpo emite radiación puramente térmica cuando la energía emitida por el mismo depende solamente de su temperatura. La radiación emitida está constituida por ondas electromagnéticas cuya intensidad y longitudes de onda presentes dependen de la temperatura; así, por ejemplo, si el cuerpo está incandescente, el espectro de emisión es continuo, conteniendo todas las longitudes de onda comprendidas entre ciertos límites. Si modificamos la temperatura del cuerpo, variamos la energía emitida y los citados límites, lo que podemos poner de manifiesto con la resistencia de un hornillo por la que hacemos circular una corriente eléctrica cuya intensidad podamos variar a voluntad. Para bajas intensidades, la energía emitida es pequeña, y absorbida por nuestra piel producirá una cantidad de calor que apenas podremos poner de ma-

nifiesto. Si aumentamos la intensidad de la corriente de manera continua, la sensación térmica irá en aumento y al mismo tiempo podremos observar que a partir de cierto valor (cuando alcanza unos 500°C) la resistencia empieza a emitir radiación visible, que al principio es roja, y luego se irán superponiendo las radiaciones de longitud de onda menor, hasta que, cuando esté incandescente, la veríamos «blanca» (si antes no se ha fundido).

Por el contrario, si un cuerpo recibe una radiación electromagnética cualquiera, parte es reflejada y parte absorbida. La energía electromagnética absorbida se convierte en calor y aumenta la temperatura del mismo, pero la radiación que se absorbe no tiene por qué ser térmica, a pesar de que el resultado sea una variación de temperatura del cuerpo absorbente. Si en un recinto vacío colocamos dos cuerpos a distinta temperatura, la energía emitida por uno de ellos es absorbida por las paredes del recinto y por el otro cuerpo. El cuerpo de mayor temperatura emite más energía que la que absorbe, hasta que se igualen las temperaturas de los cuerpos y la de las paredes. En § 16.21 (tomo I) hablamos de la ley de Newton del enfriamiento, la cual puede explicarse perfectamente estudiando la emisión térmica del mismo, cuyas leyes estudiaremos más adelante.

La emisión de radiación térmica no debe confundirse con emisión de *calor,* ya que la radiación es electromagnética y el calor se pondrá de manifiesto si un cuerpo absorbe tal radiación.

20.2 Magnitudes características de la radiación térmica. Llamemos Q a la cantidad de energía radiante emitida por un cuerpo, la cual se mide en joule.

El *flujo radiante,* $\Phi = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$, es la cantidad de energía emitida por unidad de tiempo. Se mide en watt. Dicho flujo depende de la temperatura del cuerpo y de la superficie del mismo.

Poder emisivo total o *emitancia,* $M = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}S$, es el flujo radiante total (sin hacer distinción en las longitudes de onda) emitido por unidad de superficie del cuerpo radiante. Se mide en $\mathrm{W/m^2}$. En ocasiones interesa distinguir la radiación según la longitud de onda de las distintas radiaciones monocromáticas integrantes de la radiación total. En tal caso se define la *emitancia monocromática,* $m_\lambda = \mathrm{d}M/\mathrm{d}\lambda$, para determinada λ, que es el flujo radiante emitido en el intervalo espectral entre λ y $\lambda + \mathrm{d}\lambda$, por unidad de superficie y de longitud de onda. La emitancia o poder emisivo total será

$$M = \int_0^\infty m_\lambda \, \mathrm{d}\lambda \qquad (20.1)$$

La *intensidad radiante*, $I = d\Phi/d\Omega$, de un foco emisor puntiforme en determinada dirección, es el flujo radiante emitido por el foco, por unidad de ángulo sólido, en aquella dirección, coincidiendo el vértice del ángulo sólido con el foco. Se mide en watt/estereorradián. La intensidad monocromática, $i_\lambda = dI/d\lambda$, es el flujo radiante por unidad de ángulo sólido y de longitud de onda en determinada dirección y en el intervalo λ, $\lambda + d\lambda$. La intensidad total es

$$I = \int_0^\infty i_\lambda \, d\lambda \tag{20.2}$$

Si el cuerpo emisor no es puntiforme, consideremos en su superficie un elemento dS asimilable a un punto. Éste, en una dirección que forme un ángulo θ con la normal, emitirá una cierta intensidad (flujo por unidad de ángulo sólido) dI y se define entonces la *radiancia* L de dS en esa dirección por

$$L = \frac{dI}{dS \cos \theta} \tag{20.3}$$

Obsérvese que la proyección de dS sobre un plano normal a la dirección citada determina un área $dS_n = dS \cos \theta$, con lo que la radiancia queda definida como el flujo radiante por unidad de ángulo sólido y unidad de superficie normal a la dirección considerada

$$L = \frac{dI}{dS_n} \tag{20.3 \textit{bis}}$$

Se mide en $W/m^2 \cdot sr$. La radiancia monocromática, $l_\lambda = dL/d\lambda$, se define en el intervalo espectral λ, $\lambda + d\lambda$ y la radiancia total vale

$$L = \int_0^\infty l_\lambda \, d\lambda \tag{20.4}$$

Si L tiene el mismo valor en todas direcciones, se demuestra que

$$M = \pi L \tag{20.5}$$

La *absorbancia* o *poder absorbente*, $\alpha = d\Phi_a/d\Phi$, es la relación entre el flujo radiante Φ_a absorbido por el cuerpo y el que llega a la superficie del mismo; es, pues, un número abstracto no superior a la unidad. Si se considera el flujo, tanto el absorbido como el que llega, en un intervalo espectral λ, $\lambda + d\lambda$, podemos definir la absorbancia monocromática α_λ.

La *reflectancia* o *poder reflector*, $r = d\Phi_r/d\Phi$, es la relación entre el flujo Φ_r reflejado por la superficie de un cuerpo y el que llega a la misma. Es un número abstracto que cumple con $r \leqslant 1$. Generalmente el flujo radiante que llega a la superficie de un cuerpo, parte se refleja en la misma y parte se absorbe en el cuerpo, pudiéndose transmitir una fracción de este último después de haber atravesado tal cuerpo. Si el flujo transmitido es nulo (por ejemplo un cuerpo muy absorbente de grandes dimensiones) todo el flujo radiante no reflejado es absorbido y, en este caso, debe cumplirse

$$\alpha + r = 1 \tag{20.6}$$

La *densidad de energía*, $U = dQ/dV$, es la energía radiante contenida en la unidad de volumen; se mide en J/m³. La densidad de energía monocromática, $u_\lambda = dU/d\lambda$, definida en el intervalo espectral λ, $\lambda + d\lambda$ es la densidad de energía, en aquel intervalo, por unidad de longitud de onda. La densidad de energía total, para todas las longitudes de onda, es

$$U = \int_0^\infty u_\lambda \, d\lambda \tag{20.7}$$

Considerando la radiación en el vacío, se demuestra que la relación entre la densidad de energía y la radiancia es

$$U = \frac{4\pi}{c} L \tag{20.7 \textit{bis}}$$

siendo c la celeridad de las ondas en el vacío.

Ejemplo. La constante solar (cantidad de radiación solar por unidad de superficie y de tiempo, normalmente a la superficie terrestre) es de 1,94 calorías/cm²·min; vamos a determinar la densidad de energía en J/m³.

$$\text{Constante solar} = 1{,}94 \text{ cal/cm}^2\cdot\text{min} = 1300 \text{ J/m}^2\cdot\text{seg}$$

Esta energía es la contenida en un cilindro de 1 m² de base y $c = 3\cdot10^8$ m de altura, ya que toda ella atravesará la base en un segundo. Así pues,

$$U = \frac{1300}{3\cdot10^8} = 4{,}3\cdot10^{-6} \text{ J/m}^3$$

20.3 Ley de Kirchhoff. La emitancia monocromática m_λ y la absorbancia monocromática α_λ dependen de la temperatura, de la superficie del cuerpo y de la longitud de onda. En 1859, GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF, por consideraciones teóricas, demostró que la relación

entre la emitancia monocromática y la absorbancia es igual a la radiancia monocromática. O sea

$$m_\lambda/\alpha_\lambda = l_\lambda \tag{20.8}$$

Como consecuencia, si m_λ es grande, deberá serlo también α_λ; los cuerpos buenos emisores deben ser muy absorbentes. Por ejemplo, al poner a la llama de un mechero un trozo de porcelana blanca con manchas negras, éstas destacan sobre fondo más oscuro. La emitancia de las zonas negras es superior a la de la parte blanca, luego la absorbancia debe ser mayor y lo podemos comprobar colocando la misma porcelana al sol. Al cabo de cierto tiempo las zonas negras están a temperatura superior a la de las blancas, pues siendo su absorbancia mayor, la elevación de temperatura también lo es.

20.4 Cuerpo negro. Las magnitudes características de la radiación térmica dependen, además de la longitud de onda y de la temperatura, de la naturaleza de la superficie emisora (o receptora) del cuerpo radiante emisor (o absorbente). Para simplificar el estudio de las leyes de la radiación o absorción, podemos imaginar un cuerpo ideal, al que llamaremos *cuerpo negro,* que presenta determinadas propiedades. Puede definirse como el cuerpo que absorbe completamente todo flujo de energía que llega a su superficie. De donde se deduce que la absorbancia monocromática debe ser igual a la unidad, para cualquier longitud de onda. Aplicando la ley de Kirchhoff (20.8) a un cuerpo negro, como $\alpha = 1$, debe ser

$$(m_\lambda)_n = l_\lambda \tag{20.9}$$

para determinada λ y la radiancia monocromática de un cuerpo es igual a la emitancia monocromática $(m_\lambda)_n$ de un cuerpo negro que se halle a la misma temperatura que el cuerpo. La ley de Kirchhoff puede expresarse diciendo que la relación entre la emitancia monocromática y la absorbancia monocromática de un cuerpo es igual a la emitancia de un cuerpo negro a la misma temperatura y para la misma λ

$$m_\lambda/\alpha_\lambda = (m_\lambda)_n \tag{20.10}$$

De donde se deduce que a una temperatura dada y para determinada longitud de onda la relación entre la emitancia monocromática y la absorbancia monocromática de un mismo cuerpo es la misma para todos los cuerpos.

También se deduce que, como $(m_\lambda)_n$ no puede ser nula, si m_λ es nula deberá serlo α_λ: si un cuerpo no puede emitir determinada longitud de onda, tampoco la puede absorber. Los cuerpos absorben las mismas radiaciones que pueden emitir. Esto explica la identidad de los espectros de emisión y de absorción.

Un cuerpo recubierto de negro de humo es una aproximación de un cuerpo negro. El hecho de que se vea negro por la absorción no quiere decir que siempre sea negro, pues si lo calentamos podemos llegar a verlo «blanco», como ocurre con los carbones de un arco eléctrico. La realización de un cuerpo negro, de manera más precisa, puede lograrse por medio de un cuerpo hueco, una cavidad, con un

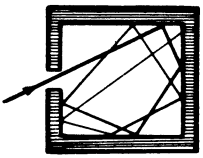


FIG. 20.1 Cavidad comparable a un cuerpo negro.

pequeño orificio en la superficie (fig. 20.1). Toda radiación que penetra por el orificio se refleja sucesivamente en las paredes, y en cada reflexión es absorbida parcialmente. Si el orificio es pequeño, el número de reflexiones puede llegar a ser muy grande y la radiación no sale, sino que queda completamente absorbida. La superficie del orificio se comporta como la superficie de un cuerpo negro ($\alpha = 1$). Esto explica por qué una ventana abierta en un edificio se ve negra mirando desde el exterior.

20.5 Espectro del cuerpo negro. La radiación emitida por un cuerpo depende de su naturaleza; pero si es un cuerpo negro, la radiación emitida a una temperatura dada es independiente de la naturaleza y de la forma del mismo. Analizada la radiación emitida con un espectroscopio observaríamos un espectro continuo. Puede determinarse la intensidad para cada longitud de onda, manteniendo constante la temperatura, y encontraremos siempre un máximo para determinada longitud de onda, decreciendo la intensidad a un lado y otro de este máximo. Variando la temperatura hallaríamos otra gráfica, en función de la longitud de onda, que presentaría un máximo para determinado valor de λ y cuya intensidad sería mayor para temperaturas más elevadas. En la fig. 20.2 (*a*) representamos las curvas experimentales que dan la densidad de energía en función de la lon-

gitud de onda, para varias temperaturas. Siendo la radiación electromagnética, es natural pensar que tales ondas se deben a la agitación térmica de las cargas eléctricas contenidas en la materia que constituye el cuerpo emisor.

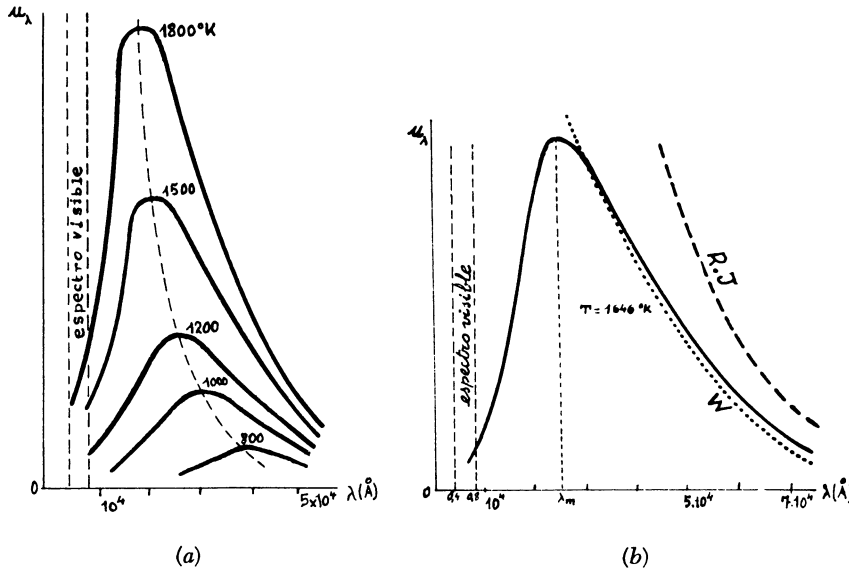


FIG. 20.2 Densidad de energía en el espectro de un cuerpo negro, en función de la longitud de onda.

Al intentar encontrar una ley para el espectro del cuerpo negro partiendo de la Mecánica y la Electrodinámica clásicas se llega a un resultado que no concuerda con el hallado experimentalmente. La fórmula de Rayleigh-Jeans da para la densidad de energía

$$u_\lambda = 8\,\pi\,k\,T\,\lambda^{-4} \tag{20.11}$$

que solamente está de acuerdo con los resultados experimentales en la región de las longitudes de onda largas. En la figura 20.2 (*b*) se ha representado para la curva correspondiente a $T = 1646$ K con el símbolo *R-J* y de trazos. En la fórmula (20.11), k es la constante de Boltzmann y la fórmula fue deducida aplicando el principio de equipartición de la energía a los posibles modos de vibración de las ondas estacionarias en un recinto. Esta fórmula implica el resultado absurdo de que, al disminuir la longitud de onda, la densidad de energía aumenta, tendiendo a infinito al tender a cero la longitud de onda. Debería presentar un máximo en el origen, cosa que en la práctica no

ocurre, sino que, al contrario, tiende a cero con la longitud de onda y para temperaturas no demasiado altas se anula antes de llegar a la región del espectro visible, como puede comprobarse en la figura 20.2 (*b*) y según sabemos de la vida cotidiana que un cuerpo (aproximado a uno negro) no emite radiación visible si su temperatura no supera cierto valor.

Por otro lado, WIEN, aplicando las leyes de la Termodinámica a la radiación y formulando ciertas hipótesis acerca de la emisión, encontró la fórmula.

$$u_\lambda = A\,\lambda^{-5}\,e^{-B/\lambda T} \tag{20.12}$$

en la cual A y B son constantes y e la base de los logaritmos neperianos. En la figura 20.2 se ha representado esta fórmula para $T = 1646$ K, punteada y simbolizada por W. Está de acuerdo con la experimental mejor que la de Rayleigh-Jeans, pero no lo estaría al aumentar indefinidamente la temperatura, pues $u_\lambda \to A\,\lambda^{-5}$, cuando $T \to \infty$.

20.6 Ley de Planck; hipótesis cuántica. Para evitar las dificultades de la interpretación cuantitativa de la ley de la radiación del cuerpo negro, se hicieron diversos intentos que conducían siempre a la ley de Rayleigh-Jeans, si se empleaba la Mecánica y la Electrodinámica clásicas, incluso modificando de maneras diversas el mecanismo de la emisión. En una de estas tentativas, en 1899, el físico alemán MAX PLANCK descubrió dónde era preciso separarse de los puntos de vista clásicos para llegar a un resultado concordante con la experiencia. Consideró que en la materia existían diminutos «osciladores» de todas las frecuencias posibles en perpetua vibración, cada uno con su período propio, que emitían y absorbían energía en forma de ondas electromagnéticas. PLANCK resolvió el problema suponiendo que la energía de cada oscilador no varía de manera continua, sino por saltos de cierto valor ε que se reservaba para hacerlo tender a cero. Comprobó que si ε tendía a cero resultaba la misma fórmula de Rayleigh-Jeans, mientras que si mantenía un valor finito, precisamente proporcional a la frecuencia del oscilador, se hallaba una fórmula que concordaba con los resultados experimentales. Así pues, $\varepsilon = h\,f$, siendo la constante h una constante de proporcionalidad con un valor numérico adecuado, que PLANCK calculó para que su fórmula concordase con los resultados experimentales. Con ello, la representación gráfica de la densidad de energía hallada por él coincidía con las gráficas experimentales (fig. 20.2) para las mismas temperaturas. Evidentemente la concordancia se tiene a cualquier temperatura.

El éxito de esta hipótesis para la explicación de la emisión en el cuerpo negro indujo a PLANCK a proponer la atrevida hipótesis de que la energía, como la materia, tiene una estructura discreta, es decir, que dicha energía se presenta siempre en cantidades múltiplos de una cantidad elemental ε que llamó *quantum* de valor proporcional a la frecuencia con que es capaz de oscilar el sistema considerado, o sea, $\varepsilon = h f$. Las dimensiones de la constante h son energía·tiempo = acción. El valor calculado por PLANCK en 1901 fue $h = 6{,}55 \cdot 10^{-27}$ erg·s. Actualmente el valor aceptado, determinado en diversos experimentos en donde interviene, es

$$h = 6{,}62517 \cdot 10^{-27} \text{ erg·s} = 6{,}62517 \cdot 10^{-34} \text{ J·s}$$

Dada la pequeñez de esta constante, en los sistemas macroscópicos la variación de energía por múltiplos de $h f$ es prácticamente como si la variación fuese continua, algo parecido a lo que ocurre con la carga eléctrica que es múltiplo de la carga del electrón y para cuerpos cargados macroscópicos las variaciones de carga son prácticamente continuas. En cambio en el mundo microscópico la constante de Planck y la variación discreta de la energía juegan un papel tan importante que ha surgido una teoría, llamada cuántica, que es la única que interpreta las leyes del mundo microscópico.

Las hipótesis de PLANCK eran tan renovadoras que los científicos se mostraban reacios a aceptarlas, pues no tenían cabida en la estructura tradicional de la Física. Pero hubo un joven físico con ideas científicamente avanzadas que no temió apartarse de los conceptos tradicionales. Este científico fue ALBERT EINSTEIN (1879-1955) (que más adelante creó la teoría de la Relatividad); usó las nuevas ideas en dos problemas: uno, el efecto fotoeléctrico (§ 12.5), y otro era el del calor específico de los cuerpos sólidos. La teoría tradicional conducía a valores del calor específico que se ajustaba a los valores experimentales a temperaturas elevadas, pero no a temperaturas bajas. EINSTEIN demostró que se podía explicar el comportamiento de los sólidos aplicando la hipótesis cuántica a las vibraciones elásticas de los átomos. La aplicación de estas teorías a los casos citados reveló la existencia del *quantum* de acción en fenómenos distintos de los de la radiación del cuerpo negro.

Volvamos a la ley de Planck para la radiación del cuerpo negro. Sea N el número de osciladores por unidad de volumen. Habrá n_0 de energía nula, n_1 de energía ε, n_2 de energía 2ε y así sucesivamente, siendo $N = n_0 + n_1 + \ldots$ La energía total por unidad de volumen será

$$U = n_1 \varepsilon + 2 n_2 \varepsilon + \ldots \qquad (20.13)$$

No puede haber energías intermedias. Según la estadística de Boltzmann, el número de partículas de energía E es

$$n = A\, e^{-E/kT} \qquad (k = \text{C}^{\text{te}} \text{ de Boltzmann})$$

para el oscilador de energía $r\,\varepsilon$ el número será

$$n_r = A\, e^{-r\epsilon/kT} \tag{20.14}$$

para $r = 0$, $n_0 = A$, así que

$$n_r = n_0\, e^{-r\epsilon/kT} \tag{20.15}$$

sustituyendo en el valor de N tenemos

$$N = n_0\,(1 + e^{-\epsilon/kT} + e^{-2\epsilon/kT} + \ldots) = \frac{n_0}{1 - e^{-\epsilon/kT}} \tag{20.16}$$

y sustituyendo en (20.13)

$$U = n_0\,\varepsilon\, e^{-\epsilon/kT}\,(1 + 2\,e^{-\epsilon/kT} + \ldots) = \frac{n_0\,\varepsilon\, e^{-\epsilon/kT}}{(1 - e^{-\epsilon/kT})^2}$$

pero de (20.16) $n_0 = N\,(1 - e^{-\epsilon/kT})$, por tanto

$$U = \frac{N\,\varepsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1} \tag{20.17}$$

Ésta es la densidad de energía total. Si queremos determinar la densidad de energía monocromática u_λ, deberemos hallar el número de modos posibles de vibración por unidad de volumen, que resulta ser

$$N = 8\,\pi\,\lambda^{-4}\,\Delta\lambda$$

para longitudes de onda comprendidas entre $\lambda + \frac{1}{2}\Delta\lambda$ y $\lambda - \frac{1}{2}\Delta\lambda$; sustituyendo en (20.17) y sustituyendo por su valor $h\,f = h\,c/\lambda$, teniendo en cuenta que ahora U es $\Delta U = u_\lambda\,\Delta\lambda$, hallamos

$$u_\lambda = \frac{8\,\pi\,h\,c}{\lambda^5\,(e^{hc/kT\lambda} - 1)} \tag{20.18}$$

ésta es la fórmula hallada por PLANCK. Representando gráficamente esta densidad de energía en función de la longitud de onda, para una temperatura T determinada, hallaríamos una de la curva de la figura 20.2 correspondiente a tal temperatura.

20.7 Consecuencias de la ley de Planck. Para λ grandes, $e^{hc/kT\lambda}$ puede sustituirse por $1 + \frac{h\,c}{k\,T\,\lambda}$, pues el exponente es pequeño, cón lo que

$$u_\lambda \simeq \frac{8\,\pi\,h\,c}{\lambda^5\,h\,c/k\,T\,\lambda} = \frac{8\,\pi\,k\,T}{\lambda^4}$$

que es la fórmula de Rayleig-Jeans (20.11).

Para λ pequeñas, y T no demasiado elevadas, puede considerarse la exponencial $e^{hc/kT\lambda}$ mucho mayor que la unidad, con lo que

$$e^{hc/kT\lambda} - 1 \simeq e^{hc/kT\lambda}$$

y (20.18) se convierte en

$$u_\lambda \simeq \frac{8\,\pi\,h\,c}{\lambda^5}\,e^{-hc/kT\lambda}$$

que es la fórmula de Wien (20.12), en donde $A = 8\,\pi\,h\,c$ y $B = h\,c/k$.

El mismo WIEN había encontrado una ley, llamada *ley del desplazamiento de Wien*, que expresaba que al aumentar la temperatura del cuerpo negro, la longitud de onda correspondiente al máximo de la densidad de energía se desplaza hacia las longitudes de onda pequeñas, siendo su valor inversamente proporcional a la temperatura absoluta. Podemos deducirla de la fórmula de Planck, derivando (20.18) respecto a λ para hallar la longitud de onda que hace máxima a la densidad de energía. Derivando e igualando a cero hallamos una ecuación trascendente, que puede resolverse gráficamente, obteniendo que debe cumplirse que

$$\frac{h\,c}{k\,T\,\lambda_m} = 496{,}5 \qquad (20.19)$$

de donde $T\,\lambda_m = h\,c/496{,}5\,k = 2{,}896 \cdot 10^{-3}$ cm·°K, de donde

$$\lambda_m = \frac{2{,}896 \cdot 10^{-3}}{T} \qquad (20.20)$$

expresando T en K, λ viene dada en m (véase fig. 20.2 *a*, en donde puede observarse que $\lambda_m\,T = C^{te}$).

Si aplicamos la fórmula (20.20) a un cuerpo negro a distintas temperaturas, hallamos:

$T =$	100 K	1 000 K	2 000 K	5 000 K	10 000 K
$\lambda =$	289 600 Å	28 960 Å	14 480 Å	5 792 Å	2 896 Å

Obsérvese que la longitud de onda que hace máxima la densidad de energía está en la zona del infrarrojo hasta los 2000 K inclusive, que para los 5000 K está en el espectro visible (amarillo) y para los 10 000 K en el ultravioleta.

El desplazamiento del máximo hacia las longitudes de onda cortas al aumentar la temperatura del cuerpo negro, explica el porqué es posible juzgar «a ojo» la temperatura de un horno y el porqué a veces se califica con los términos «rojo oscuro», «rojo cereza», «rojo blanco», etc.

Si deseamos calcular la densidad de energía para todas las longitudes de onda hallaremos

$$U = \int_0^\infty u_\lambda\,d\lambda = \int_0^\infty \frac{8\,\pi\,h\,c\,d\lambda}{\lambda^5\,(e^{hc/kT\lambda} - 1)}$$

resuelta la integral se halla

$$U = \frac{8\,\pi^5\,k^4}{15\,h^3\,c^3}\,T^4 \tag{20.21}$$

La emitancia M según (20.5) vale $M = \pi L$ y como según (20.7) $L = \frac{c}{4\pi}U$, tenemos $M = \frac{c}{4}U$ y sustituyendo el valor de U dado por (20.21)

$$M = \frac{2\,\pi^5\,k^4}{15\,h^3\,c^2}\,T^4 = \sigma\,T^4 \tag{20.22}$$

siendo σ una constante igual a $2\,\pi^5\,k^4/15\,h^3\,c^2$.

Resulta, pues, que el flujo radiante total, emitido por un cuerpo negro, por unidad de superficie, es directamente proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta del mismo. Esta ley fue deducida empíricamente por el físico austríaco JOSEF STEFAN en 1879, apoyándose en las experiencias realizadas por varios investigadores. A σ se le llama constante de Kurlbaum y a la ley se le acostumbra llamar de Stefan-Boltzmann. El valor numérico de la constante es $\sigma = 5{,}75\cdot10^{-5}$ erg·cm^{-2}·grado^{-4} s^{-1} $= 5{,}75\cdot10^{-8}$ J·m^{-2}· K^{-4}·s^{-1}.

Ejemplo. Determínese la emitancia de un cuerpo negro a 1770°C. Aplicando la ley de Stefan, siendo $T = 2043$ K

$$M = 5{,}75\cdot10^{-8}\cdot(2043)^4 \simeq 10^6 \text{ J/m}^2\cdot\text{s}$$

20.8 Cuerpos no negros. El cuerpo negro es un caso ideal. Los cuerpos reales pueden dividirse en dos categorías: los que tienen absorbancia constante y los que la tienen variable con la longitud de onda. Los primeros, llamados cuerpos *grises*, cuya absorbancia es sensiblemente constante e inferior a la unidad, presentarán una curva espectral semejante a la del cuerpo negro. Para hallarla basta multiplicar las ordenadas de las curvas de la figura 20.2 por α_λ. En la figura 20.3 representamos la curva espectral de un cuerpo negro y la correspondiente a un cuerpo gris a la misma temperatura. Algunos tipos de carbón al ponerse incandescentes se comportan como cuerpos grises. Por ejemplo, las antiguas lámparas de incandescencia de filamento de carbón y algunas llamas de gas o de acetileno.

Si la absorbancia es selectiva, la curva espectral no se parece a la del cuerpo negro a la misma temperatura. Puede darse el caso de que la absor-

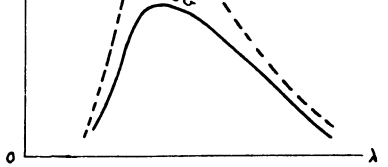


FIG. 20.3 Espectro de un cuerpo gris (C. G.) comparado con el de un cuerpo negro (C. N.).

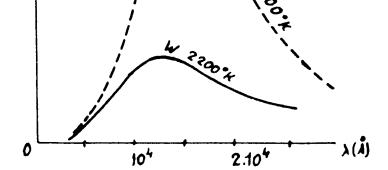


FIG. 20.4 Curva espectral de una lámpara de wolframio (W) comparada con la de un cuerpo negro (C. N.) a la misma temperatura.

bancia sea mayor en la región de las longitudes de onda largas (muchos cuerpos blancos, nieve, etc.). En este caso, cuando la temperatura sea baja, el cuerpo negro emite casi exclusivamente infrarrojo y la curva espectral casi coincide con la de aquél. A temperaturas altas radian mucho menos. Cuando la absorbancia sea mayor para las longitudes de onda cortas (metales refractarios, wolframio, etc.), la curva espectral se aproximará a la del cuerpo negro en la región de las longitudes de onda bajas y el máximo estará desplazado hacia estas regiones y, por tanto, a la misma temperatura, la luz de una lámpara incandescente de filamento de wolframio se ve «menos roja» (blanco azulada) que la de un cuerpo negro (fig. 20.4).

Algunos cuerpos poseen una absorbancia muy variable con la longitud de onda (óxidos de tierras raras) de forma que añadidos a otros cuerpos modifican notablemente el espectro de emisión de los mismos; en el mechero Auer la mezcla de óxidos de torio y de cerio hace que la luz sea más azulada (por el cerio) y emita también infrarrojo (por el óxido de torio). La curva presenta un máximo hacia las longitudes de onda cortas y otro hacia las largas.

20.9 Pirómetros basados en las leyes de la radiación térmica. De los distintos pirómetros describiremos el llamado de *desaparición de filamento*. Supongamos un cuerpo negro emisor, por ejemplo un horno, la radiación del cual filtramos con un vidrio coloreado de manera que deje pasar las radiaciones de longitud de onda comprendidas en un intervalo estrecho. La radiancia monocromática se conoce si medimos la temperatura T (por ejemplo mediante un par termoeléctrico). Comparando la radiancia monocromática con la de un filamento incandescente cuya temperatura podemos variar variando la corriente eléctrica, si las radiancias monocromáticas son iguales podremos calibrar el amperímetro en temperaturas del cuerpo negro. Una vez calibrado el amperímetro podremos usar el método para medir la temperatura de cuerpos negros emisores. Para comprobar la igualdad de las radiancias monocromáticas se observa la imagen del foco emisor y del filamento con un ocular provisto de un vidrio coloreado, buen monocromador, en donde comprobamos que si el filamento está a temperatura inferior a la del foco aparece oscuro sobre fondo claro, si está a temperatura superior se ve claro sobre fondo oscuro y si desaparece las dos radiancias son iguales y podremos hallar la temperatura del cuerpo por lectura directa en el amperímetro previamente calibrado.

Si el cuerpo no es negro, la lectura no da la temperatura del cuerpo sino la del cuerpo negro que, para la longitud de onda usada, tiene la misma radiancia que la del cuerpo examinado. Aplicando la ley de Kirchhoff (20.10) tendremos la emitancia monocromática del cuerpo negro en función de la del cuerpo y de la absorbancia monocromática del mismo (supuesta ésta conocida). A partir de aquí, aplicando las leyes de la emisión del cuerpo negro, podemos hallar la temperatura del cuerpo en función de la del cuerpo negro.*

20.10 Fotoluminiscencia. Es la emisión de luz por un modo de excitación no térmica. Puede ser debida a choques electrónicos con materiales adecuados (imágenes en una pantalla de televisión). A acciones mecánicas, triboluminiscencia, como la debida al frotamiento del pedernal. A acciones químicas, quimioluminiscencia, como en la oxidación del fósforo, y en las luciérnagas y ciertos protozoos cuya luminiscencia a veces se llama bioluminiscencia. Se

* Véase RIBAUD, *Traité de pyrométrie optique*. Editado por Revue d'Optique (París).

llama electroluminiscencia a la luminiscencia producida por los campos eléctricos intensos al aplicarlos a ciertos sulfuros alcalinotérreos.

La fotoluminiscencia que más nos interesa es la debida a la absorción de una radiación electromagnética. Supongamos una sustancia que absorbe una onda electromagnética incidente y luego emite de nuevo, pero cesa al cesar la causa que la produce. En este caso el fenómeno se llama *fluorescencia*. Si la emisión continúa, al cesar la excitación, durante cierto tiempo se llama al fenómeno *fosforescencia*. Esta distinción no es muy correcta y se ha propuesto que en la fluorescencia el tiempo máximo de emisión al cesar la causa sea de 10^{-8} s; si supera al segundo será fosforescencia. La distinción más importante es la debida al efecto de la temperatura sobre la persistencia de la emisión. En la fluorescencia no influye; en cambio, en la fosforescencia el tiempo de emisión al cesar la causa decrece al aumentar la temperatura. Por otro lado, la fosforescencia solamente se presenta en los sólidos.

STOKES encontró que las radiaciones emitidas en la fluorescencia o en la fosforescencia eran de longitud de onda mayor que las de la radiación de excitación. Si la luz incidente es policromática y representamos las curvas espectrales de la energía absorbida y de la emitida, veremos que el máximo de la curva espectral de la energía emitida está desplazado, con respecto al máximo de la primera, hacia las longitudes de onda largas.

Se llama rendimiento energético de la luminiscencia al cociente entre el flujo de energía emitido y el absorbido. Representando gráficamente el rendimiento energético de la fluorescencia hallamos que presenta un máximo para cierta longitud de onda y tiende luego a cero al aumentar ésta. Ello indica que a partir de cierta longitud de onda la fluorescencia desaparece. Iluminando platinocianuro de bario con luz violeta o azul da luminiscencia verde, pero si lo iluminamos con luz amarilla o roja refleja simplemente la luz incidente.

En el caso de la fotoluminiscencia, la ecuación de Kirchhoff (20.8) no se cumple, pues se verifica que

$$\frac{m_\lambda}{\alpha_\lambda} > l_\lambda$$

lo que equivale a decir que a la misma temperatura y para la misma λ, el cuerpo emisor tiene una emitancia monocromática superior a la del cuerpo negro. Puede lograrse que, para longitudes de onda de la región visible, la m_λ del cuerpo luminiscente sea tan superior a la del cuerpo negro a esta temperatura que aquél emita una radiación visible a temperatura baja. Por eso a esta luz se le llama a veces «luz fría», como ocurre en los tubos fluorescentes.

21

Fotometría. Color

En el capítulo 20 hemos estudiado la radiación de energía y definido unidades de medida de las magnitudes físicas que intervienen en los fenómenos relacionados con ella. Cuando la energía que nos ocupe sea la correspondiente a la radiación visible, la llamaremos energía luminosa. Ésta podrá distribuirse entre diferentes longitudes de onda a cuyo estímulo no responde por igual el ojo humano, el cual presenta su máxima sensibilidad a las radiaciones de longitud de onda próxima a los 5500 Å, siendo prácticamente nula para longitudes de onda inferiores a los 4000 Å y superiores a 7000 Å. Ello hace que dos radiaciones de diferente longitud de onda precisen potencias diferentes para dar la misma sensación de luminosidad, lo cual se traduce en la necesidad de definir nuevas magnitudes que permitan una descripción de los fenómenos luminosos acorde con la sensación visual. La medida práctica de dichas magnitudes constituye el objeto de la *Fotometría.*

21.1 Flujo luminoso e intensidad luminosa; focos extensos. Consideremos un foco luminoso monocromático, es decir, un cuerpo que emita radiación visible de una longitud de onda dada λ y sea Φ_λ el flujo radiante (cfr. § 20.2) emitido. A esta longitud de onda corresponderá una sensibilidad del ojo que será una cierta fracción f de la máxima, por lo que si a ésta le asociamos un valor arbitrario K, a la longitud de onda λ le correspondería un valor

$$k_\lambda = f K \qquad (0 \leq f \leq 1)$$

al que se da el nombre de *factor de visibilidad* o *rendimiento luminoso* de la radiación considerada. Para una radiación no visible sería

$k_\lambda = 0$. Definiremos ahora el *flujo luminoso* monocromático emitido por el foco como

$$F_\lambda = k_\lambda \Phi_\lambda \tag{21.1}$$

cuya unidad, no coincidente con la del flujo radiante, se definirá en seguida.

Si el foco luminoso no fuera monocromático, podríamos descomponer el espectro de la luz emitida en intervalos de longitudes de onda suficientemente estrechos para poder considerar invariable en cada uno de ellos la sensibilidad del ojo, y así, para las radiaciones de longitud de onda comprendidas entre λ y $\lambda + d\lambda$, el flujo luminoso valdría

$$dF_\lambda = k_\lambda \, d\Phi_\lambda$$

siendo $d\Phi_\lambda$ el flujo radiante correspondiente a estas radiaciones. El flujo luminoso total emitido valdría, por definición,

$$F = \int k_\lambda \, d\Phi_\lambda$$

donde la integral se extiende a todos los intervalos de longitudes de onda entre 0 e ∞.

Es evidente que esta manera de introducir el concepto de flujo luminoso resulta incómoda para la definición de la unidad de medida, por lo que se prefiere posponer ésta a la definición de otra magnitud llamada *intensidad luminosa,* la cual se obtiene sin más que sustituir en la definición de intensidad radiante (§ 20.2) el término flujo radiante por el de flujo luminoso. Las unidades de medida de estas magnitudes fotométricas quedan, según se ve, arbitrarias, y por ello se hace preciso fijar una de ellas, con lo que quedarán definidas las de las otras magnitudes fotométricas que aparezcan. El Sistema Internacional de Unidades de Medida (S. I.) define como unidad de intensidad luminosa la *candela* (cd) como *la intensidad luminosa en una dirección determinada de una abertura perpendicular a esta dirección, que tenga una superficie de 1/60 cm² y radie como un cuerpo negro a la temperatura de solidificación del platino* (2026°K).

No hay duda, pues, que si el foco luminoso es puntiforme, el flujo luminoso en un cono de vértice en el foco y ángulo sólido $d\Omega$ será $dF = I \, d\Omega$, siendo I la intensidad luminosa en la dirección del cono elemental. Por tanto, la unidad de flujo, llamada *lumen* (lm), sería el *flujo que emite por unidad de ángulo sólido un foco luminoso de intensidad igual a 1 cd en todas direcciones.*

Si la intensidad luminosa variara de una dirección a otra, el flujo luminoso emitido por el foco puntiforme sería

$$F = \int I \, d\Omega$$

estando extendida la integral a todo el espacio, al que corresponde un ángulo sólido de 4π estereorradianes. Si tomamos la *intensidad media esférica* I_m o valor medio de I, queda

$$F = 4\pi I_m$$

o sea que un foco luminoso puntiforme que emita en todas direcciones un flujo total de 4π lm tiene una intensidad media esférica de 1 cd.

Cuando el foco no pueda considerarse puntual, el concepto de intensidad luminosa dado anteriormente no resulta preciso y deberemos definir las magnitudes conocidas por *emitancia* y *luminancia*. La primera es el flujo emitido por unidad de superficie de foco luminoso $M = dF/dS$, que se mide en lm/m^2. La segunda se define de manera análoga a la radiancia (§ 20.2), considerando el flujo luminoso en vez del radiante. Será, pues,

$$L = \frac{dI}{dS_n} = \frac{dI}{dS \cos \theta}$$

y se mide en cd/m^2, unidad llamada *nit* (nt). A veces se emplea el *stilb* (sb) o cd/cm^2.

Si observamos la Luna llena, la vemos uniformemente iluminada (prescindamos de los «mares»), lo cual significa que dos elementos dS_1 y dS_2, uno en la región central y otro en el borde, que den superficies aparentes dS_n iguales, emiten flujos luminosos iguales. De este hecho concluyó LAMBERT que *la luminancia es independiente del ángulo* θ.

21.2 Iluminación de una superficie. El flujo luminoso que incide sobre una superficie la ilumina y se llama *iluminancia* o iluminación al flujo luminoso incidente por unidad de superficie. Es decir, si sobre el elemento de superficie dS incide un flujo luminoso dF, en los puntos de dicho elemento existe una iluminancia $E = dF/dS$. Su unidad es el *lux* (lx) que sería la iluminancia de una superficie de un metro cuadrado sobre la que incidiera (uniformemente repartido) un flujo de un lumen.

Vimos que $dF = I\,d\Omega$ y sustituyendo esta expresión en la definición de iluminancia resulta

$$E = I\frac{d\Omega}{dS}$$

pero de § 3.8 (tomo I) resulta

$$d\Omega = \frac{dS\cos\theta}{r^2}$$

siendo θ el ángulo que forma el rayo luminoso incidente con la normal a la superficie y r la distancia del foco luminoso a dS (fig. 21.1), luego

$$E = \frac{I\cos\theta}{r^2} \qquad (21.2)$$

TABLA 21.1. ILUMINACIONES EN LA SUPERFICIE TERRESTRE.

	E, lx
Noche sin luna	3×10^{-4}
Plenilunio	0,2
Aula bien iluminada	80
Sol de verano, mediodía	10^5

TABLA 21.2. LUMINANCIAS DE FOCOS EXTENSOS.

Foco luminoso	L, nt
Luna llena	2500
Llama	10 000 - 20 000
Papel blanco al sol	30 000
Filamento de lámpara de wolframio	$5\times10^6 - 10^7$
Arco entre carbones	$1{,}6\times10^8$
Sol a través de la atmósfera	$1{,}6\times10^9$

Problema. Sea un foco luminoso puntiforme de intensidad $I = 10$ cd situado a una distancia $d = 1$ m de una pantalla. Entre el foco luminoso y la pantalla, a una distancia $p = 0{,}6$ m del primero colocamos una lente convergente delgada, de distancia focal $f = 0{,}2$ m, paralela a la pantalla. Calcúlese la iluminación en el punto de la pantalla situado en el pie de la perpendicular del foco a la misma. Caso particular de $p = f$.

El foco luminoso está situado en P y su imagen en P' distante p' de la lente (fig. 21.2). Consideremos un haz de rayos estrecho que forma un ángulo u con

el eje, el cual converge en P' y forma el ángulo u' con el mismo eje. El haz que ha convergido en P' al emerger de tal punto ilumina la pantalla. El flujo

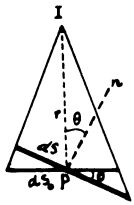


FIG. 21.1 Iluminación de una superficie.

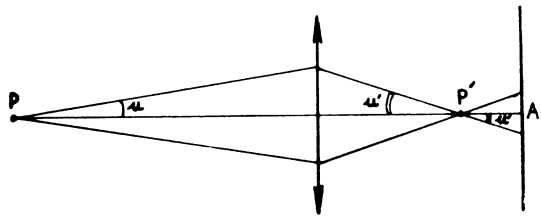


FIG. 21.2 Problema de iluminación sobre una pantalla a través de una lente.

luminoso es el mismo en los haces citados. Si el ángulo sólido en P es Ω y en P' es Ω' debe cumplirse

$$I\,\Omega = I'\,\Omega'$$

pero

$$\Omega = 2\,\pi\,(1 - \cos\,u) = 4\,\pi\,\operatorname{sen}^2\,\frac{u}{2}$$

$$\Omega' = 2\,\pi\,(1 - \cos\,u') = 4\,\pi\,\operatorname{sen}^2\,\frac{u'}{2}$$

si el haz es estrecho, u y u' son pequeños y entonces,

$$\Omega \simeq 4\,\pi\,\frac{u^2}{4} = \pi\,u^2 \qquad \Omega' = \pi\,u'^2$$

así pues, la relación entre las intensidades

$$\frac{I}{I'} = \frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{u'^2}{u^2} \qquad I' = I\,\frac{u^2}{u'^2}$$

pero $u'/u = p/p'$, así que

$$I' = I\,\frac{p'^2}{p^2}$$

podemos considerar el foco en P' con la intensidad I', la iluminación en el punto A será

$$E = \frac{I'}{P'A^2} = \frac{I'}{[d - (p + p')]^2} = \frac{I\,\dfrac{f^2}{(p-f)^2}}{\left[d - \dfrac{p^2}{p-f}\right]^2} = \frac{I\,f^2}{[(p-f)\,d - p^2]^2}$$

sustituyendo valores numéricos hallamos $E = 250$ lx.

En el caso particular de que $p = f$, hallamos

$$E = \frac{I}{f^2}$$

Podíamos haberlo visto directamente. Si el foco luminoso está en el foco de la lente, el haz emergente de la lente es paralelo y la iluminación $E = \mathrm{d}F/\mathrm{d}S$

sería constante a partir de la lente, para cualquier superficie paralela a la lente; luego $E = I/r^2 = I/f^2$ para la lente y para cualquier superficie paralela a la lente.

21.3 Fotometría práctica. La magnitud fotométrica que interesa hallar en la práctica es, generalmente, la intensidad de un foco, pues de aquí pueden hallarse las restantes magnitudes. En ocasiones, la más importante es la determinación directa de la iluminación. Se distinguen dos tipos de métodos de determinación: el visual y el físico. El primero se basa en las observaciones, de igualdad, nulidad, etc., de iluminación por el observador mediante el sentido de la vista y el segundo por métodos físicos más objetivos. La determinación visual

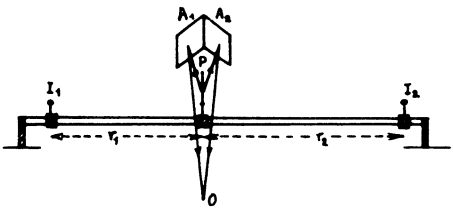


FIG. 21.3 Fotómetro de Bunsen.

de la intensidad de un foco puede hacerse por comparación con otro conocido, colocando éste y el incógnita a distancias de una pantalla tales que la iluminación en un punto de la misma (en una pequeña región) tenga el mismo valor para un foco que para el otro. El método más simple para realizarlo es el de Bunsen, que consiste en un papel translúcido con una mancha de aceite en la región central, lo que origina coeficientes de reflexión (reflectancia) y de transmisión (transmitancia) diferentes. Se ilumina por una cara por un foco de intensidad conocida I_1 (fig. 21.3) y por el otro por el desconocido de intensidad I_2, los cuales pueden colocarse a distancias variables desplazándolos a lo largo de una barra metálica graduada. En una posición cualquiera, la mancha se verá más o menos clara que el papel. Entonces se van variando las distancias hasta que la iluminación en una cara y en la otra sea la misma, lo cual se observa por medio de los espejos A_1 y A_2. Cuando la iluminación es la misma, la mancha no destaca sobre el papel. Siendo la iluminación normal, $\theta = 0$ y siendo $E_1 = E_2$, debe cumplirse

$$\frac{I_1}{r_1^2} = \frac{I_2}{r_2^2} \qquad I_2 = I_1 \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Se han ideado diversas modificaciones de este método para aumentar el contraste y lograr mayor precisión. En ocasiones, se sustituyen los espejos por prismas de reflexión total que mandan la luz a un cubo fotométrico especial que permite ver las dos caras de la pantalla iluminada y el contraste es mayor. En este método se basa el *fotómetro de Lummer-Brodhun.*

El método anterior puede utilizarse para la medida de la iluminación en un punto. Colocamos el papel con la mancha en tal punto de manera que reciba la iluminación normalmente a él. Por la otra cara se ilumina normalmente con un foco luminoso de intensidad conocida y se va variando la distancia hasta que las dos iluminaciones sean iguales. Puede hallarse la iluminación incógnita $E' = I/r^2$.

En la fotometría física se sustituye el ojo del observador por una célula fotoeléctrica con un microamperímetro en serie para determinar la intensidad. Cuando las iluminaciones son iguales tendremos la misma lectura. En la práctica los luxmetros, corrientemente, son células fotoeléctricas en las cuales se ha conectado un microamperímetro calibrado en función de la iluminación y de este modo determinamos la iluminación por lectura directa, como ocurre con algunos fotómetros utilizados en fotografía. Generalmente se usan células fotovoltaicas (cfr. § 12.5). A veces se utiliza también un método fotográfico, basado en el ennegrecimiento de una emulsión sensible.

21.4 Curva espectral de luminosidad de una radiación. Anteriormente hemos introducido el rendimiento luminoso k_λ para un flujo monocromático, al cual se le acostumbra a llamar *coeficiente de visibilidad*

$$k_\lambda = \frac{F_\lambda}{\Phi_\lambda}$$

para la radiación cuya longitud de onda está comprendida entre λ y $\lambda + d\lambda$. El valor máximo de k_λ se tiene para $\lambda = 5550$ Å (amarillo-verdoso). Definiremos el *coeficiente de visibilidad relativa* o *coeficiente de luminosdiad* f al cociente entre k_λ y el valor de k_λ para $\lambda = 5550$ Å

$$f = \frac{k_\lambda}{K}$$

Representando gráficamente el valor de f en función de λ se encuentra la curva de luminosidad de las radiaciones visibles. Esta curva se ha logrado como resultado de numerosas medidas que conducen a caracterizar un observador normal medio, adoptado en una convención en 1924 por la CIE (Commission Internationale de l'Éclairage). Esta curva se representa en la figura 21.4. La línea continua corresponde a la visión diurna y la línea de trazos a la visión

nocturna. Puede observarse el máximo, muy acusado; para $\lambda = 5550$ Å, en la visión diurna; en cambio, en la visión nocturna se desplaza hacia el verde azulado (fenómeno de Purkinje).

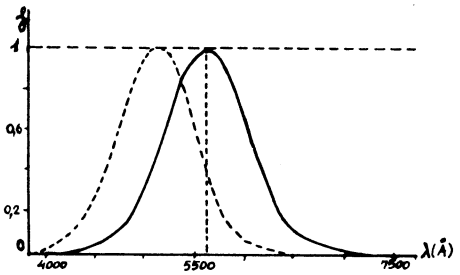


FIG. 21.4 Coeficiente de luminosidad para las distintas longitudes de onda visibles.

21.5 Difusión; factor de luminancia. Cuando un cuerpo recibe luz, parte se refleja, absorbe o transmite. Si la superficie no está pulimentada, la reflexión se realiza en pequeñas porciones de superficie con distintas orientaciones. Esta reflexión en todas direcciones se llama *difusión*. Puede existir difusión por transmisión, como en el caso del vidrio deslustrado. La nieve o un cartón blanco constituyen buenos difusores por reflexión. Se dice que un cuerpo es *ortotropo* si su luminancia es la misma en todas direcciones, sea cual fuere la incidencia, con lo que la emitancia (ec. 20.5) será

$$M = \pi L$$

Un difusor es perfecto si, además, su absorbancia es nula. Su emitancia M, por reflexión difusa, es entonces igual a su iluminación E, y escribimos $E = \pi L_0$. En un caso real se define el *factor de luminancia* β como la relación entre la luminancia observada L y la de un difusor perfecto L_0, luego

$$\beta = \frac{L}{L_0} = \frac{L}{E/\pi} = \frac{\pi L}{E} \tag{21.3}$$

Una capa de magnesia preparada por depósito de los humos de la combustión del magnesio, es un difusor perfecto ($\beta = 1$ con un error del 1 %).

Ejemplo. Colocando un foco luminoso de 20 cd a una distancia de 10 m de una pequeña superficie en dirección normal a la misma se observa que la luminancia es de 0,05 nt, determínese el factor de luminancia.

$$E = \frac{20}{10^2} = 0{,}2 \text{ lx} \qquad \beta = \frac{\pi L}{E} = 0{,}785$$

21.6 Sensación de color. La sensación de color es la característica de una percepción visual, o sea, un hecho subjetivo que depende del observador. Sin embargo, el color de un objeto es una realidad física que la Colorimetría enseña a medir. La Colorimetría es una parte de la Óptica que establece los métodos de medida para especificar cuantitativamente, en valores objetivos, aquellas sensaciones de color que son subjetivas para un observador. En el vocabulario internacional de la CIE se define el color como «la característica de la sensación visual que permite al observador distinguir diferencias en la cualidad de la sensación, del tipo que puedan ser motivadas por diferencias en la composición espectral de la luz».

Cuando un observador dice que una cereza es de color rojo * quiere indicar que aquella cereza iluminada con luz blanca, en las condiciones de observación, le origina una sensación de color que le hace expresar aquella opinión. Si observa otro objeto y la sensación de color es la misma que le ha producido la cereza, dirá que es de color rojo-cereza. Si la sensación producida fuese la misma que el bermellón, diría que es de color rojo-bermellón. Basándonos en el color de objetos que producen una sensación característica podríamos establecer una escala subjetiva de colores. Dentro del color rojo, o de un color cualquiera, podemos establecer una gradación de sensaciones de color rojo, o del color que se trate, a la que se da el nombre de *matiz* del color, y que depende de la *longitud de onda dominante* en este color. (Más adelante especificaremos objetivamente este concepto.)

La composición espectral de la luz afecta extraordinariamente la sensación de color. Cuando un objeto recibe un flujo luminoso, en parte lo refleja, absorbe o transmite. Si lo observamos por reflexión, como generalmente su superficie no es especular, la luz es difundida (o reflejada en todas direcciones). Si difunde la luz sin absorción, veremos el cuerpo del mismo color que la luz que recibe; si la luz es blanca, lo veremos blanco (la nieve iluminada por la luz del sol se ve blanca). Si absorbe por igual todas las radiaciones, al iluminarlo con luz blanca se ve gris. Según el valor de la absorbancia puede percibirse toda la gama de grises, desde el blanco (absorbancia nula) hasta el negro (absorbancia unidad). Si la absorción es selectiva, absorbe las radiaciones de cierta longitud de onda más o menos que las de otra. La luz difundida contiene la mezcla de las radiaciones monocromáticas no absorbidas. Si se observa el cuerpo por transmisión, veremos las luces monocromáticas no absorbidas.

* Bien entendido que la cereza está madura. Precisamente midiendo el color se puede establecer el grado de madurez.

Existen vidrios coloreados que permiten el paso de la luz de determinada longitud de onda en un intervalo espectral estrecho; un vidrio que solamente deje pasar las radiaciones de color rojo será un «filtro» para las demás radiaciones y será útil en los laboratorios fotográficos. Existen filtros interferenciales que permiten el paso de la luz de longitud de onda dada en un intervalo más estrecho que la permitida en los filtros de colores; se utilizan en monocromadores de precisión para obtener colores puros. Utilizando un filtro que deje pasar luz de toda longitud de onda excepto la roja e iluminando con esta luz una cereza, la veríamos negra, pues ella absorbe todas las radiaciones menos las rojas, que refleja, pero si la luz que la ilumina no contiene rojo, absorbe todas las radiaciones. La composición espectral de la luz de los tubos fluorescentes es distinta que la de la luz del sol, por esto los colores no se ven igual iluminando el objeto con luz solar que con la de un fluorescente.

21.7 Colores del espectro. Temperatura de color. Observando el espectro continuo de una lámpara incandescente o del sol con un espectroscopio, se ve una sucesión de colores que pasan de uno a otro de manera continua y es difícil delimitar colores puros por sus longitudes de onda extremas. Desde el punto de vista tradicional se dice que van del violeta al rojo, siendo las longitudes de onda extremas de 4000 Å hasta casi 8000 Å (véase fotografía en color). A continuación daremos una relación de los intervalos espectrales que dan una determinada sensación de color, bien entendido que esto no es más que una aproximación. El ojo normal puede apreciar diversos matices dentro de un mismo color, pero la sensibilidad es distinta para la sucesión de colores (fig. 21.4). En las partes extremas del espectro es imposible distinguir entre los colores comprendidos en un intervalo espectral de 50 Å; en cambio, en la zona central pueden distinguirse para intervalos de unos 10 Å. Los intervalos espectrales para los colores convencionales son aproximadamente los siguientes:

Violeta	4000 Å a 4400 Å
Azul	4400 Å a 4800 Å
Verde	4800 Å a 5700 Å
Amarillo	5700 Å a 5900 Å
Anaranjado	5900 Å a 6100 Å
Rojo	6100 Å a 7800 Å

Puede considerarse luz monocromática cuando, según lo dicho antes, está constituida por radiaciones cuyas longitudes de onda están comprendidas en un intervalo espectral que el ojo es incapaz de di-

ferenciar; por ejemplo, podemos considerar una luz roja monocromática si las longitudes de onda están comprendidas entre 6150 Å y 6200 Å u otro intervalo de 50 Å.

Cuando la luz emitida por cierto manantial tiene la misma composición espectral que la emitida por un cuerpo negro a la temperatura T_c, a esta temperatura se le llama *temperatura de color* de tal manantial. Como es lógico, la temperatura de color será tanto mayor cuanto mayor sea la proporción de radiaciones de longitud de onda corta (azules y violeta). La temperatura de color de una lámpara de incandescencia es, corrientemente, de 2400°K. La del Sol es de unos 5000°K.

Para tener una luz blanca patrón puede usarse una lámpara cuya temperatura de color sea establecida por convenio. La CIE ha recomendado tres manantiales luminosos *A*, *B* y *C*. El patrón *A* está constituido por una lámpara de wolframio, en atmósfera gaseosa, cuya temperatura de color sea de 2850°K. Los patrones *B* y *C* constan del patrón *A* asociado a filtros especiales para que las temperaturas de color respectivas sean de 4800°K y de 6500°K. La curva espectral del patrón *A* es una curva creciente desde las longitudes de onda cortas a las largas. Emite mayor cantidad de energía en la región roja que en la azul. La curva espectral de los patrones *B* y *C* es más plana, con valores menores en la región violeta que en la azul, verde o roja. Se ha ideado un patrón de luz blanca (teórica) llamada *luz W*, cuya curva espectral sería una recta paralela al eje de las λ, o sea, tendría un espectro de igual energía. La sensación de

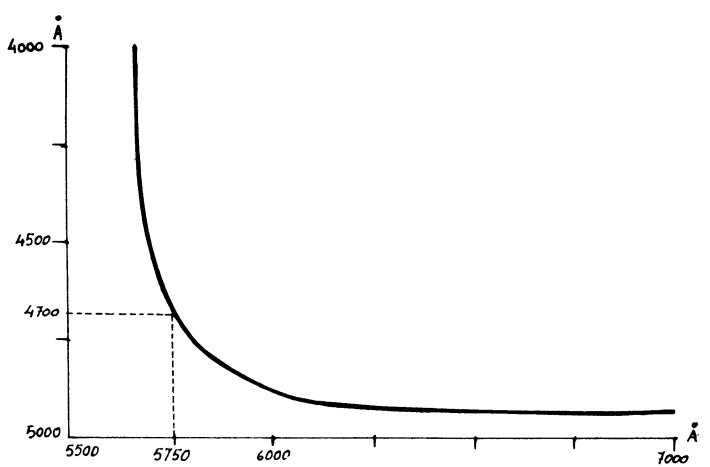


FIG. 21.5 Colores complementarios.

blanco en un ojo normal no sería el blanco tradicional, sería algo purpurino. Puede lograrse tal patrón W con un patrón A y filtros adecuados.

La luz blanca se obtiene al superponer los colores del espectro, pero si superponemos dos luces de colores distintos, en proporciones adecuadas, podemos lograr la sensación de blanco. Estas luces se dice que tienen los colores complementarios. Superponiendo un azul de longitud de onda 4700 Å con un amarillo de 5750 Å obtenemos el blanco patrón C. El verde puro y los amarillos verdosos no tienen colores complementarios en el espectro. En la figura 21.5 representamos las longitudes de onda específicas que son complementarias, para la luz blanca patrón C, y para un observador normal medio (citado en § 21.4). Los colores complementarios no deben ser necesariamente colores espectrales puros. Las luces blancas se llaman a veces acromáticas. Se dice que dos luces son complementarias cuando, al mezclarlas en cierta proporción, resulta un estímulo acromático, estando cada luz constituida por radiaciones comprendidas en un intervalo espectral determinado.

21.8 Mezcla de colores. Tomando tres proyectores y colocando a la salida de cada uno de ellos un filtro distinto, tendremos tres luces distintas que podemos mezclar, lo cual observaremos si iluminamos una pantalla simultáneamente con las citadas luces. Podemos variar el flujo luminoso de cada proyector intercalando un medio absorbente o variando la corriente en la lámpara del correspondiente proyector. Variando los flujos de las luces de los proyectores en la pantalla obtendremos gran número de sensaciones de color distintas. Experimentalmente se comprueba que tomando como luces primarias la roja, la verde y la azul obtendremos la gama de colores más extensa. Estos colores los simbolizaremos por R (rojo), G (*green*, verde en inglés) y B (*blue*, azul en inglés). Si los tres proyectores iluminan tres zonas, parcialmente superpuestas en la pantalla, la región donde se superponen el rojo y el verde la veremos amarilla, donde el rojo y el azul la veremos púrpura, donde el verde y el azul la veremos verde azulado y en la zona donde se superponen los tres haces la veremos blanca (para una proporción adecuada de los flujos de tales luces). En la fotografía de la figura 21.6 se puede observar lo dicho.

Sea un haz luminoso de luminancia L. Podemos mezclar tres haces luminosos R, G y B, de luminancias respectivas L_R, L_G y L_B, para obtener una luz del mismo color y luminancia L, lo cual expresamos por

$$L = L_R + L_G + L_B \tag{21.4}$$

Decimos que hemos realizado una síntesis aditiva de colores.

Con tres colores, mezclados en proporciones adecuadas, pueden obtenerse muchos colores diferentes, pero *no todos*. Consideremos uno de estos últimos y sea L su luminancia. Si lo mezclamos con uno de los primarios, por ejemplo, el G, de luminancia L_G, será posible igualar esta mezcla con una de los otros dos primarios con luminancias respectivas L_R y L_B, dando

$$L + L_G = L_R + L_B$$

Esto puede interpretarse diciendo que el verde, G, se ha *sustraído* de la mezcla de tres primarios, y escribir

$$L = L_R + L_B - L_G \tag{21.5}$$

con lo que, al considerar luminancias negativas de los primarios, podríamos obtener cualquier color por mezcla de éstos. Si a una luz blanca, $L_R + L_B + L_G$, le quitamos las luces roja y verde [añadimos $-(L_R + L_G)$], queda luz azul L_B. Mediante filtros podemos realizar mezclas sustractivas de colores.

Gracias a los trabajos de GUILD y de WRIGHT,[1] la CIE tomó como primarios los colores:

R, de longitud de onda 7000 Å (obtenido filtrando luz blanca)
G, de longitud de onda 5460 Å (raya verde del arco de mercurio)
B, de longitud de onda 4360 Å (raya azul del arco de mercurio)

Las *componentes tricromáticas* se definen en función de las luminancias de las luces primarias de la siguiente manera:

$$R = L_R \qquad G = \frac{L_G}{4{,}591} \qquad B = \frac{L_B}{0{,}060} \tag{21.6}$$

Se ha tomado así para que, mezclando R, G y B en la misma cantidad, se obtenga luz blanca W. Así pues, tomando luz roja de 7000 Å, de luminancia 1 nit, mezclada con luz verde de 5460 Å, de luminancia 4,591 nit, y con luz azul de 4360 Å, de luminancia 0,06 nit, obtenemos luz blanca W. Los *coeficientes tricromáticos* r, g y b se definen por las siguientes relaciones:

$$r = \frac{R}{R + G + B} \qquad g = \frac{G}{R + G + B} \qquad b = \frac{B}{R + G + B} \tag{21.7}$$

* Véase W. D. Wright, «The Measurament of Colour». Ed. Hilger & Watts, Londres, 1964.

de donde se deduce que $r + g + b = 1$. De aquí se desprende que basta conocer dos de los tres coeficientes tricromáticos para especificar un color.

Estos coeficientes pueden tener valores positivos, negativos o nulos. Para evitar tener que trabajar con valores negativos se sustituyen las componentes tricromáticas R, G y B por los *valores triestímulo* X, Y y Z, definidos por

$$\begin{aligned} X &= 2{,}769\,R + 1{,}752\,G + 1{,}302\,B \\ Y &= \quad R + 4{,}591\,G + 0{,}060\,B \\ Z &= \quad\quad 0{,}056\,G + 5{,}594\,B \end{aligned} \tag{21.8}$$

De manera parecida a los coeficientes r, g y b podemos definir las *coordenadas de cromaticidad* x, y, z de la siguiente forma:

$$x = \frac{X}{X+Y+Z} \qquad y = \frac{Y}{X+Y+Z} \qquad z = \frac{Z}{X+Y+Z} \tag{21.9}$$

Los valores triestímulo X, Y, Z de una mezcla de haces de distintos colores serán iguales a la suma de los correspondientes de cada haz. De la definición de X, Y, Z y de (21.6), vemos que

El valor de Y coincide con la luminancia L.

Para $X = Y = Z$ (luz blanca W) también $x = y = z = 1/3$.

Para la luz roja z es prácticamente nula (cuando B y G disminuyen, z disminuye).

Además, habiendo tomado los valores triestímulo expresados por 21.8, las coordenadas x, y, z no son nunca negativas para ningún color del espectro.

Los valores de X, Y y Z dependen de la longitud de onda de la luz estudiada. Se han confeccionado tablas de valores de estos componentes en función de la longitud de onda de luces monocromáticas de la misma luminancia. Dicha luminancia se toma de manera que Y sea igual a la unidad para la luz de coeficiente de luminosidad máximo (5550 Å según se vio en § 21.4). Estos valores de X, Y y Z, que expresaremos por $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, se llaman *coeficientes de distribución* del espectro de igual energía para el observador normal medio. En la figura 21.7 se representan las curvas de los coeficientes de distribución en función de la longitud de onda. Un color determinado está constituido por gran cantidad de radiaciones monocromáticas, cada una de ellas con una luminancia L_λ. Este color lo podemos igualar con una mezcla adecuada de los valores triestímulo X, Y y Z. Para

cada intervalo espectral $d\lambda$ se requerirá una cantidad del valor X igual a $\overline{X}\,d\lambda$ para luminancia unidad, y para la luminancia L_λ se requerirá $L_\lambda \overline{X}\,d\lambda$; análogamente, para las otras dos hará falta $L_\lambda \overline{Y}\,d\lambda$ y $L_\lambda \overline{Z}\,d\lambda$, respectivamente. La cantidad total de tales componentes será por tanto

$$X = \int L_\lambda \overline{X}\,d\lambda$$
$$Y = \int L_\lambda \overline{Y}\,d\lambda \qquad (21.10)$$
$$Z = \int L_\lambda \overline{Z}\,d\lambda$$

extendiendo estas integrales a las longitudes de onda de todo el espectro visible. El valor de L_λ para cada longitud de onda puede de-

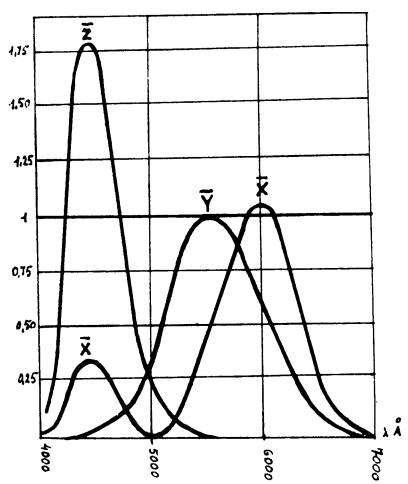


FIG. 21.7 Coeficientes de distribución en función de λ.

terminarse por medidas espectrofotométricas. Conocida L_λ y multiplicando por cada una de las $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ correspondientes a cada una de las λ (deducidas de las curvas de fig. 21.7) podemos representar otras curvas de tales productos función de λ. Las integrales de (21.10) representan el área encerrada por cada una de las curvas respectivas y el eje de las λ. Esto nos da uno de los métodos de resolución de aquellas integrales; basta hallar las áreas (por ejemplo con un planímetro) para encontrar X, Y, Z y de allí las coordenadas de croma-

ticidad x, y, z aplicando (21.9). Actualmente existen integradores asociados a espectrofotómetros que dan directamente los valores triestímulo.

21.9 Diagrama de cromaticidad. La representación gráfica de las coordenadas de cromaticidad en función de la longitud de onda nos daría un diagrama espacial de cromaticidad. Pero como $x+y+z=1$, podemos representar x e y en función de λ y tendremos un diagrama de cromaticidad plano. Los valores de z se calculan conociendo los de x e y. Dicho diagrama se representa en la figura 21.8. Como

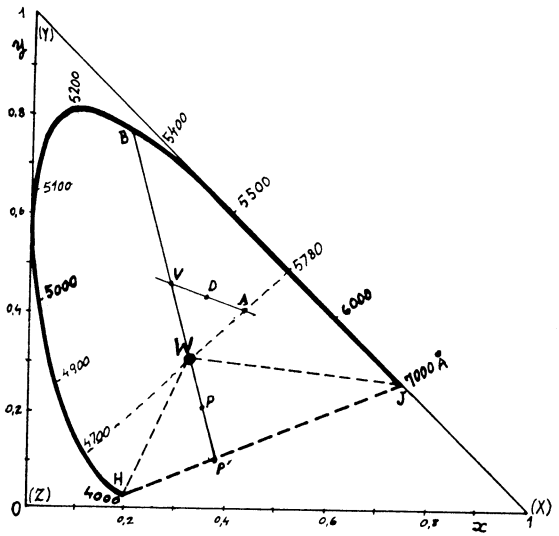


FIG. 21.8 Diagrama de cromaticidad.

la suma $x+y$ será ≤ 1, todos los puntos representados en la gráfica estarán en el interior del triángulo de vértices (0, 0), (0, 1) y (1, 0). En las ecuaciones (21.4) haciendo $Y=Z=0$ hallamos, para X, $x=1$, haciendo $X=Z=0$ hallamos, para Y, $y=1$, haciendo $X=Y=0$, será $z=1$ para Z. Luego las coordenadas de cromaticidad de los componentes X, Y, Z son precisamente los vértices del triángulo (1, 0), (0, 1) y (0, 0) respectivamente. Estos colores que no están en el interior del diagrama no son colores reales; son colores teóricos que consideramos para que se cumplan las condiciones expresadas en el párrafo anterior. Los puntos contenidos en la curva son los correspondientes a colores puros de una longitud de onda determinada, y los interiores son producidos por mezclas de colores. El

punto de coordenadas $x = y = 1/3$ es el punto blanco W y está situado en el centro de gravedad del triángulo. Los colores cuyas coordenadas tricromáticas están situadas en la recta punteada (base del diagrama) son los púrpura puros y los situados en la región triangular determinada por la recta punteada y el punto W contienen todas las tonalidades entre el púrpura y el magenta.

Si mezclamos luz representada en el diagrama (fig. 21.8) por el punto A, con luz representada por V, el resultado será luz cuyo punto representativo será uno situado sobre la recta VA, por ejemplo el D, y cuya posición depende de las proporciones tomadas de cada una. Si unimos dos puntos de la curva, lugar de los colores puros, y la recta pasa por el punto W, mezclando dos luces de aquellos colores, en determinada proporción, obtendremos el punto W y la luz será blanca. Dichos colores son complementarios. En la figura 21.8 se dibuja la recta que pasa por W. Las longitudes de onda correspondientes a sus extremos son 5750 Å y 4700 Å, que son los colores complementarios representados también en la figura 21.5. Todos los colores representados por puntos de una recta tal como la WV tienen una misma *longitud de onda dominante* λ_d; pueden considerarse tanto más puros cuanto más cerca estén del punto correspondiente a la longitud de onda dominante (en este caso el B), mientras que serán más pálidos o lavados de blanco cuanto más cerca estén de W. Puede definirse la *pureza* σ del color como el cociente entre la distancia de W al punto representativo (x, y) del color y la distancia de W al representativo de la longitud de onda dominante, o sea, la pureza viene dada por:

$$\sigma = \frac{WV}{WB} = \frac{y - 1/3}{y_d - 1/3} \tag{21.11}$$

siendo y_d la ordenada del punto correspondiente a λ_d. Cuando $y = y_d$ el color tiene pureza máxima igual a la unidad y cuando coincide el punto con W la pureza es nula. En el primer caso el color se dice que está *saturado* y en el segundo *completamente impuro*. Si el punto se halla en el triángulo punteado HWJ, correspondiente a los colores púrpura (por ejemplo el punto P de fig. 21.8) la longitud de onda dominante se encuentra en la prolongación de la recta que une el punto P con el W, en este caso es la misma que para el punto V. La pureza, análogamente al caso anterior, es

$$\sigma = \frac{WP}{WP'} \tag{21.12}$$

Mezclando blanco con un color puro no podemos obtener un púrpura, pero mezclando un púrpura con el correspondiente a su longitud de onda dominante, en proporciones adecuadas, podemos obtener el blanco W, como puede deducirse de la gráfica, luego el color correspondiente al punto B es el complementario del de P.

Hemos visto que conociendo x e y podemos hallar la longitud de onda dominante y la pureza de un color, a partir del diagrama de cromaticidad. En la figura 21.9 reproducimos una fotografía del diagrama de cromaticidad con los colores que corresponden a cada región del mismo. Puede observarse la gradación de tonalidad y de saturación, así como la sucesión de colores puros. También puede comprobarse que el blanco no es un punto sino una región de forma elíptica.

Además de la longitud de onda dominante y la pureza de un color, se acostumbra dar su luminancia L, que coincide con su valor Y.

21.10 Determinación del color de un cuerpo. Cuando la superficie de un cuerpo recibe luz, la refleja o difunde en parte y actúa como foco secundario cuya luminancia es proporcional a la iluminación de tal superficie. Para estudiar la luz difundida por esta superficie es preferible dar el factor de luminancia (ec. 21.3) en lugar de la luminancia. Si interesa el color del cuerpo, observando la luz que lo atraviesa debe estudiarse el *factor de transmisión* (cociente entre el flujo luminoso transmitido y el incidente). Si consideramos la lumi-

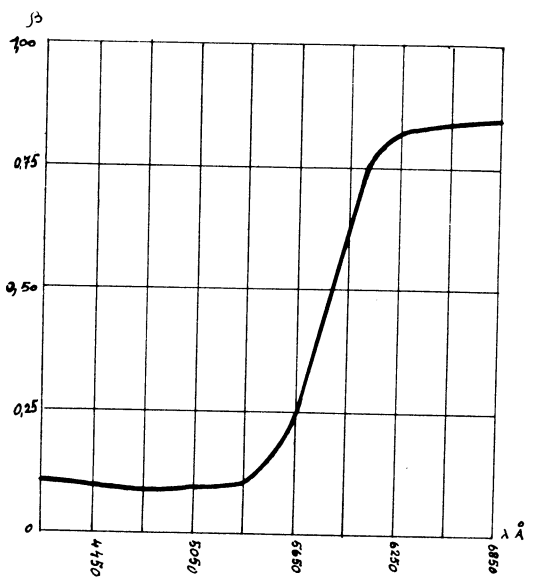


FIG. 21.10 Factor de luminancia en función de la longitud de onda.

nancia del difusor perfecto (blanco de óxido de magnesio) como unidad, para el cálculo de X, Y y Z, se sustituirá la luminancia de las ecuaciones 21.10 por el factor de luminancia β_λ (función de λ).

Este factor de luminancia puede encontrarse experimentalmente para cada muestra por medio de un colorímetro o de un espectrofotómetro de reflectancia

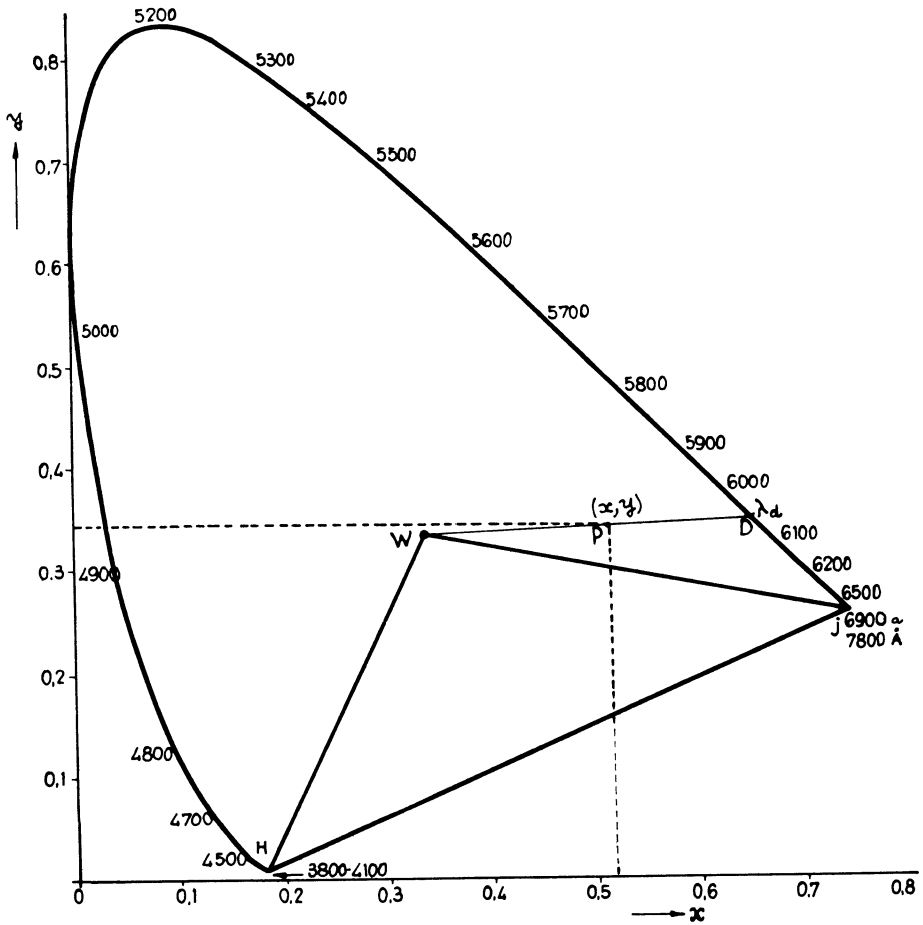


FIG. 21.11 Punto representativo del color de la cubierta del tomo I de este libro.

difusa. Mediante una fotocélula se determina la luminancia del difusor perfecto y la del cuerpo cuyo color queremos estudiar, para cada longitud de onda. El cociente nos dará el factor de luminancia. En la figura 21.10 representamos gráficamente el factor de luminancia de la cubierta del tomo I de esta obra, en función de la longitud de onda. Multiplicando los valores del factor de lumi-

nancia por las ordenadas de las gráficas de la figura 21.7 hallaríamos las curvas correspondientes a $\beta_\lambda \overline{X}_\lambda$, de $\beta_\lambda \overline{Y}_\lambda$ o de $\beta_\lambda \overline{Z}_\lambda$ en un intervalo espectral $d\lambda$. El área encerrada por cada una de estas curvas nos da los valores de X, Y y Z respectivamente. En nuestro caso se encuentra:

$$X = 44{,}1 \qquad Y = 29{,}7 \qquad Z = 11{,}6$$

y los valores de las coordenadas de cromaticidad son:

$$x = 0{,}52 \qquad y = 0{,}34$$

El punto representativo es el P de la figura 21.11, al cual corresponde la longitud de onda dominante $\lambda_d = 6060$ Å; la pureza vale

$$\sigma = \frac{WP}{WD} = 0{,}57$$

22

Física atómica

Aun cuando la idea de átomo se deba a DEMÓCRITO (460-357 a. C.), no es hasta el siglo XIX que adquiere verdadera importancia, al presentar DALTON su teoría atómica de la Química. A partir de este momento, y sobre todo tras los trabajos del ruso MENDELEIEV (1834-1907), el concepto del átomo se perfecciona constantemente, ayudando a ello la Espectroscopia y el genio de NIELS BOHR (1885-1962), cuyo modelo atómico sirvió para establecer las bases de la actual Física Atómica.

En este capítulo se pretende dar una rápida visión de los conceptos más fundamentales referentes al átomo en su conjunto, prescindiendo de los conceptos que se suponen conocidos del lector por anteriores estudios de Física o por los cursos de Química.

22.1 Series espectrales. Estudiando un espectro con un espectrógrafo se encuentran ciertas regularidades en la distribución de las rayas espectrales. A finales del siglo XIX muchos científicos se habían dedicado al estudio de los espectros y habían medido cuidadosamente las longitudes de onda de dichas rayas. El físico sueco ANDERS JONAS ÅNGSTRÖM (1814-1874) determinó las longitudes de onda de las cuatro rayas principales del espectro del hidrógeno, con extraordinaria precisión. Basándose en estas medidas, el profesor suizo JOHANN JAKOB BALMER, en 1885, encontró empíricamente que entre las longitudes de onda de aquellas rayas existía la relación

$$\lambda = b \frac{n^2}{n^2 - 4} \tag{22.1}$$

en donde b es una constante, que vale 3645,6 Å si λ se mide en ångström, y n es un número entero que toma los valores 3, 4, 5 y 6 para las cuatro rayas principales medidas por ÅNGSTRÖM. A continuación damos una tabla con los resultados obtenidos por la fórmula de Bal-

mer y los medidos por ÅNGSTRÖM, así como el nombre dado a estas rayas:

n	*nombre*	*Balmer*	*Ångström*	*color*
3	H_α	6562,08	6562,10	rojo
4	H_β	4860,8	4860,74	verde
5	H_γ	4340,0	4340,1	azul
6	H_δ	4101,3	4101,2	violeta

Los valores calculados y los experimentales difieren en menos del 0,02 %; puede decirse que esta fórmula es una de las relaciones empíricas más precisas.

BALMER sugirió que dando nuevos valores enteros a n deberían encontrarse los valores de longitudes de onda aún no descubiertas. Efectivamente, se hallaron más adelante en la zona ultravioleta de espectros estelares. Si en la ecuación (22.1) n aumenta indefinidamente, λ tiende a b y se dice que la serie espectral converge ten-

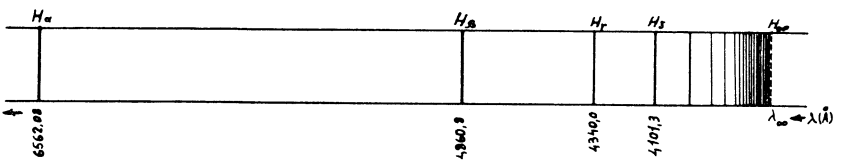


FIG. 22.1 Serie de Balmer.

diendo al límite de la serie, llamado H_∞. El valor de la λ del límite de la serie es $\lambda_\infty = b = 3645{,}6$ Å y está en la región ultravioleta. En la figura 22.1 representamos esquemáticamente las rayas principales y las del ultravioleta. En dicho esquema se observa que las rayas están cada vez más próximas tendiendo al límite H_∞.

En § 17.1 se indicó que la longitud de onda depende del medio por donde se propaga la onda, por lo que se caracterizarán mejor a las rayas espectrales mediante la frecuencia, que es independiente del medio. Pero es más fácil la determinación precisa de la λ que la de la frecuencia, y si se opera con la longitud de onda en el vacío, tenemos resuelto el problema, pues la λ en un medio cualquiera la hallaremos dividiendo la del vacío por el índice de refracción. Sin embargo, en Espectroscopia se prefiere determinar las rayas por su *número de ondas* o frecuencia reducida, que es el recíproco de la longitud de onda, que designaremos por $\bar{\nu}$. Se mide en m^{-1} o en cm^{-1}. En las tablas espectroscópicas se da en el vacío por debajo de 2000 Å

y en el aire por encima de este valor (en el utravioleta lejano se acostumbra trabajar con espectógrafos en el vacío). Expresando la fórmula de Balmer en función del número de ondas tenemos:

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{b}\,\frac{n^2-4}{n^2} = \frac{4}{b}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)$$

que podemos escribir

$$\bar{\nu} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{22.2}$$

A la constante $R = 4/b = 109\,677{,}58\ \text{cm}^{-1}$ se la llama *constante de Rydberg*. El número de ondas del límite de la serie será:

$$\bar{\nu}_\infty = \frac{1}{\lambda_\infty} = \frac{1}{b} = \frac{R}{4}$$

La ecuación 22.2 consta de un término constante, $R/2^2$, y otro variable, R/n^2. Este término constante puede considerarse que es un término del tipo R/m^2, en el cual $m = 2$. Puede generalizarse esta fórmula escribiendo

$$\bar{\nu} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{22.3}$$

Considerando una serie cuyos términos sean iguales al cociente entre R y el cuadrado de un número entero, los números de onda de las rayas del hidrógeno se hallarán restando dos miembros de esta serie. Esto constituye un caso particular del *principio de combinación* enunciado por W. Ritz en 1908, que se aplica a todos los elementos, y se expresa diciendo que los espectros de los átomos pueden caracterizarse por una serie de números llamados «términos» y que los números de onda de las rayas observadas vienen dados por la diferencia entre los distintos pares de términos. En la ecuación 22.3, dando a m un valor entero y a n los valores desde $m + 1$ a infinito, tendremos los números de ondas de una serie espectral (para $m = 2$, la de Balmer, ya citada). En el cuadro que exponemos a continuación se indican los nombres de las series espectrales del hidrógeno, para los distintos valores de m y n.

Nombre	m	n	*Fecha del descubrimiento*	*Región espectral*
Lyman	1	2, 3, ...	A partir de 1906	Ultravioleta
Balmer	2	3, 4, ...	1885	Ultravioleta y visible
Paschen	3	4, 5, ...	1908	Infrarrojo
Brackett	4	5, 6, ...	1922	Infrarrojo
Pfund	5	6, 7, ...	1924	Infrarrojo

El espectro del deuterio (isotopo del hidrógeno de masa prácticamente el doble) difiere poco del espectro del hidrógeno. Las rayas están desplazadas ligeramente hacia las longitudes de onda cortas. Puede encontrarse el valor de $\bar{\nu}$ aplicando la misma fórmula 22.3, sustituyendo la constante R por $R' = 109\,707{,}42\ \text{cm}^{-1}$ (algo superior a R).

El espectro de chispa del helio (del átomo ionizado) puede representarse por una fórmula análoga a la 22.3, sustituyendo R por $4R$. Se han encontrado dos series: la de *Rydberg* (para $m = 3$) y la de *Pickering* ($m = 4$).

En átomos más complicados, los términos de las series espectrales son del tipo

$$\frac{R}{(r+n)^2} \tag{22.4}$$

donde r es un número inferior a la unidad. Aplicando el principio de Ritz, hallamos el número de ondas restando pares de términos de cada serie.

22.2 Primeras ideas acerca de la estructura atómica. Después del descubrimiento del electrón por SIR JOSEPH JOHN THOMSON, en 1897, las teorías acerca del átomo empezaron a adquirir un significado más definido que el que tenían en los tiempos de DALTON, cien años antes. Siendo los átomos eléctricamente neutros, la presencia de electrones, con sus cargas negativas, implicaba la presencia de cargas positivas en la misma cantidad. Los problemas inmediatos que surgieron fueron:

¿Cuántos electrones hay en un átomo determinado?
¿Cómo están distribuidos los electrones y las cargas positivas en los átomos?

Por consideraciones experimentales CHARLES GLOVER BARKLA, en 1911, encontró que el número de electrones por átomo era aproximadamente igual a la mitad del peso atómico del elemento considerado. Esto daba una idea del orden de magnitud del valor del número de electrones y, por tanto, del de la carga positiva. Más adelante se precisó que este número coincidía con el número de orden del elemento en la tabla periódica.

Respecto a la segunda pregunta, J. J. THOMSON propuso un modelo atómico en el cual las cargas positivas estaban distribuidas en una pequeña región esférica y en ella estaban embebidos los electrones, ocupando ciertas posiciones de equilibrio, pero efectuando oscilacio-

nes armónicas en torno a estas posiciones. Este movimiento armónico de los electrones explicaría la emisión de radiaciones, según la teoría electromagnética clásica. La frecuencia de estos movimientos vibratorios, para que la emisión fuese de radiación visible, exigía que el radio de la esfera fuese del orden de 10^{-8} cm.

Estudiando el paso de partículas alfa emitidas por las sustancias radiactivas (§ 23.2), ERNEST RUTHERFORD, en 1911, comprobó que las desviaciones de tales partículas no estaban de acuerdo con el modelo de Thomson y propuso otro modelo, que puede considerarse como el punto de partida de las modernas teorías acerca de la estructura atómica. Suponía que las cargas positivas estaban concentradas en una pequeña región, en lugar de estar distribuidas en una región de dimensiones atómicas (modelo de Thomson) y los electrones estaban rodeando aquella región positiva. Para que pudiese existir equilibrio (pues los electrones son atraídos por las cargas positivas) imaginó que describían órbitas circulares en torno a la región positiva de manera que la fuerza centrípeta coincidiese con la atractiva. A la región donde se concentra la carga positiva se le llama *núcleo*. La primera dificultad de esta teoría está en el hecho de que los electrones en movimiento circular, según las leyes del Electromagnetismo, deben radiar energía electromagnética, ya que poseen aceleración (centrípeta). Esta energía procede del sistema, el electrón pierde energía, celeridad, y la fuerza atractiva aumenta al disminuir el radio y tal electrón se aproximaría al núcleo en trayectoria espiral hasta caer en él. Esta emisión de energía no está de acuerdo ni con la estabilidad de los átomos ni con la emisión de rayas espectrales.

El físico danés NIELS BOHR se agregó al equipo investigador de RUTHERFORD y proponiéndose mejorar el modelo atómico de éste, aplicó las ideas cuánticas de PLANCK para solventar las dificultades que presentaba tal modelo en la interpretación de los espectros atómicos y explicar su estabilidad. En 1913 presentó su teoría del modelo para el átomo del hidrógeno: un núcleo positivo (protón) en torno al cual gira un electrón en una trayectoria circular de centro el del núcleo, como en el modelo de Rutherford, pero con la condición de que las órbitas no sean arbitrarias. Además, mientras el electrón describe su órbita no hay emisión de energía; la Electrodinámica clásica de MAXWELL no puede aplicarse a órbitas tan pequeñas. Ahora bien, si comunicamos energía a un electrón de una órbita determinada, de energía W, para que pase a otra órbita permitida, de energía W', se dice que el átomo se «excita» y BOHR sugirió que el electrón regresa a su órbita primitiva emitiendo la energía $W' - W$

en forma de un quantum de radiación $h f$, o sea, la frecuencia de la radiación será

$$f = \frac{W' - W}{h} \tag{22.5}$$

La condición que debe cumplir el electrón en una órbita permitida era que su momento cinético debía ser múltiplo de la constante h de Planck, dividida por 2π. Llamando a al radio de la órbita y v a la celeridad del electrón en la misma, esta condición da

$$M v a = n \frac{h}{2\pi} \tag{22.6}$$

llamando M a la masa del electrón. La condición de equilibrio dinámico nos da la igualdad entre la fuerza atractiva y la del núcleo sobre el electrón $M v^2/a$, que escribiendo el valor en unidades cgs tendremos

$$\frac{e^2}{a^2} = \frac{M v^2}{a} \tag{22.7}$$

eliminando v entre (22.6) y (22.7) despejamos a:

$$a = n^2 \frac{h^2}{4\pi^2 M e^2} \tag{22.8}$$

el valor numérico para $n = 1$ es $a = 0{,}527 \cdot 10^{-8}$ cm y el diámetro es del orden de una unidad Å, que concuerda con el valor estimado del diámetro atómico según la teoría cinética de los gases.

La energía total

$$W = E_c + E_p = \frac{1}{2} M v^2 - \frac{e^2}{a} = -\frac{2\pi^2 M e^4}{n^2 h^2} \tag{22.9}$$

el signo menos en la energía significa que hemos tomado como origen de las energías la que corresponde al electrón alejado indefinidamente del núcleo ($n = \infty$). Lo que nos interesa en realidad es la diferencia de energías, única magnitud accesible a la medida. Dando a n valores enteros tendremos los valores de la energía en las distintas órbitas. A este número n se le llama *número cuántico principal*. Excitando el átomo hacemos pasar el electrón de la órbita definida por el número cuántico n_1 a la definida por el n_2. Al regresar

a su órbita inicial emite la energía $h f$ y la frecuencia de la radiación será, según (22.5)

$$f = \frac{2\pi^2 M e^4}{h^3}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$$

El número de ondas $\bar{\nu}$ será f/c

$$\bar{\nu} = \frac{2\pi^2 M e^4}{c h^3}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \qquad (22.10)$$

el valor

$$\frac{2\pi^2 M e^4}{c h^3} = 1{,}10 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}$$

que casi concuerda con la constante de Rydberg y por tanto la ecuación (22.10) y la (22.3) prácticamente coinciden, haciendo $m = n_1$ y $n = n_2$. Éste fue el primer éxito de la teoría de Bohr: la interpretación del espectro del hidrógeno.

Esta representación por órbitas es demasiado concreta. Se prefiere, en lo que respecta a la energía, hablar de niveles de energía correspondientes a los distintos valores del número cuántico principal. La emisión de energía tendría lugar en las transiciones electrónicas entre estos niveles. En la figura 22.2 representamos los niveles de energía del átomo de hidrógeno y los saltos que dan lugar a las series espectrales del átomo de hidrógeno. El límite de cada serie es debido al salto del nivel 0 ($n = \infty$) a determinado estado, según la serie, que en la de Lyman es el estado normal ($n = 1$). En la figura se representa, tal transición, por una línea de trazos.

En la misma figura también se indican los valores de las energías de los distintos niveles, expresadas en electrón-volt (cfr. § 2.14).

A pesar del éxito inicial de este modelo, ya tuvo que modificarse para la explicación de la estructura fina * de las rayas espectrales del hidrógeno, lo que llevó a tener que considerar que el electrón tenía un momento cinético intrínseco, llamado *spin*, de valor $h/4\pi$ además del orbital dado por 22.6. El modelo intuitivo tiene que abandonarse; sin embargo, quedan los conceptos de niveles de energía y de cuantización. Otra idea de BOHR que prevalece en las nuevas formulaciones es el llamado «principio de correspondencia» que de una manera simple podemos enunciar así:

Aplicando la Física Cuántica a un sistema macroscópico los resultados deben corresponder a los que se obtendrían aplicando la

* Cada raya está compuesta de varias muy próximas.

Física Clásica, dicho de otro modo, *la Física Cuántica se reduce a la Clásica para números cuánticos grandes.* Por ejemplo, considerando un átomo fuertemente excitado la órbita puede ser relativamente grande y para hallar la frecuencia de la radiación emitida puede aplicarse la electrodinámica clásica. En tal caso la frecuencia

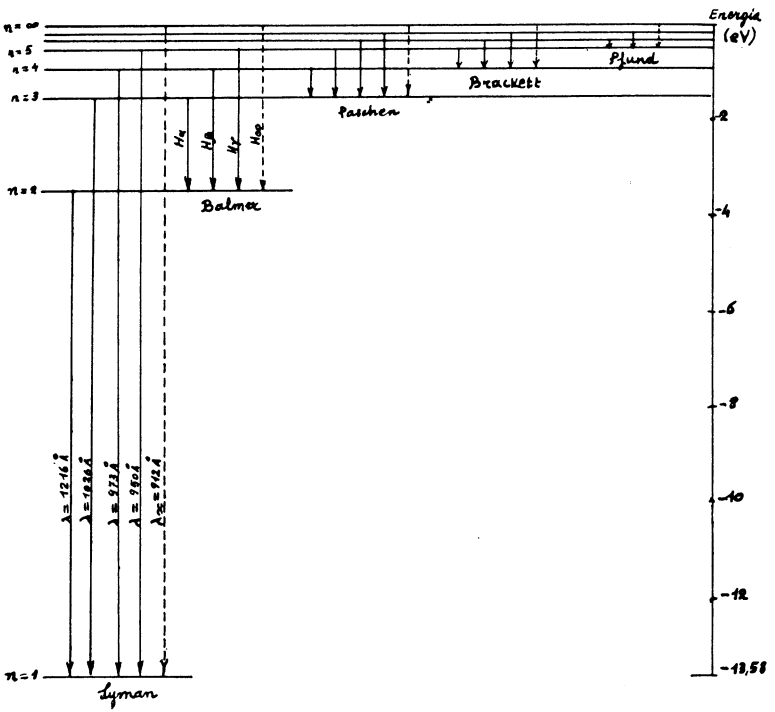


FIG. 22.2 Niveles energéticos del átomo de hidrógeno. Transiciones que dan lugar a las series espectrales del mismo.

sería la misma que la de revolución en torno al núcleo. Si consideramos el número cuántico $n = 1000$, la diferencia entre el valor de la frecuencia de revolución y la correspondiente a la radiación emitida en la transición al nivel inmediato inferior es del orden de 0,1 %. Para números cuánticos mayores la correspondencia sería aún más perfecta.

22.3 Mecánica ondulatoria. En la Física de finales del siglo XIX había dos ideas que parecían definitivas: la naturaleza corpuscular de la materia (moléculas, átomos, electrones) y la naturaleza ondu-

latoria de la luz. Sin embargo, a partir de las teorías de PLANCK y del estudio del efecto fotoeléctrico por EINSTEIN se vislumbró la naturaleza corpuscular de la luz (fotones). Existían fenómenos claramente ondulatorios (interferencias, difracción, etc.) y otros que implican naturaleza corpuscular (efecto fotoeléctrico, difusión por electrones libres). Estos corpúsculos, fotones, tienen cada uno energía y cantidad de movimiento, que dependen de la frecuencia de la luz, y parecen tener existencia real como los electrones y otras partículas conocidas. En 1920 se reconocía la naturaleza *dual* de la energía radiante, usándose el aspecto corpuscular o el ondulatorio según el tipo de fenómeno en el que intervenía. La naturaleza corpuscular de la materia no se había puesto en duda, pero en 1924 el físico francés LUIS DE BROGLIE sugirió que los corpúsculos, y en particular los electrones, poseen características ondulatorias que pueden ponerse de manifiesto en condiciones adecuadas. El dualismo onda-corpúsculo no es peculiar de la luz, sino que es completamente general. DE BROGLIE no se preocupó de la naturaleza física de las ondas que acompañan a los corpúsculos en su movimiento. En realidad, lo más característico de una onda es su longitud de onda λ y él encontró que dependía de la celeridad de propagación. Estas ondas presentan una fuerte dispersión (más acentuada que la que presenta la luz que atraviesa un prisma). En este caso debemos considerar un tren de ondas en el que cada componente se mueve con una celeridad ligeramente distinta. Esta celeridad individual es la de fase, $v = \lambda f$, como en las ondas luminosas. El tren de ondas, como conjunto, se propaga con otra celeridad u, llamada de *grupo*, que se define como la variación de la frecuencia con el número de ondas $(1/\lambda)$, o sea:[1]

$$u = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}(1/\lambda)} = \frac{\mathrm{d}f}{(-1/\lambda^2)\,\mathrm{d}\lambda} \tag{22.11}$$

La energía del corpúsculo sería $W = h f$, según las ideas de Planck. Se demuestra que la celeridad del corpúsculo es la de grupo de las ondas, luego:

$$h f = \frac{1}{2} M u^2 \tag{22.12}$$

derivando respecto λ y sustituyendo $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda$ en (22.11) resulta:

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{-\lambda^2} = \frac{M}{h}\,\mathrm{d}u$$

[1] En las ondas luminosas también podemos considerar las dos celeridades v y u; pero si el medio no es dispersivo, $v = u$.

que integrando da

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{M u}{h} + \text{cte}$$

Se puede encontrar que la constante de integración es nula, pues para $u = 0$, $\lambda = \infty$, y tenemos:

$$\lambda = \frac{h}{M u} \tag{22.13}$$

que nos da la longitud de onda asociada al corpúsculo de celeridad u. Esta λ también se llama *longitud de onda de De Broglie*. Esta ecuación sirve lo mismo para corpúsculos materiales que para fotones. En este último caso la podíamos haber deducido teniendo en cuenta que, según la teoría de la relatividad, la energía de un fotón es igual a $M c^2$ e igualándola a la energía planckiana $h f$ y teniendo en cuenta que $\lambda = c/f$, obtenemos la ecuación (22.13). Para determinar la longitud de onda asociada a un chorro de electrones acelerados por un campo eléctrico, por una diferencia de potencial V, sustituiremos en (22.13)u por su valor $(2 V e/M)^{1/2}$ y dando los valores correspondientes a h, M y e, hallamos

$$\lambda = \frac{12{,}24}{V^{1/2}} \text{ Å} \tag{22.14}$$

Si $V = 10^4$ V, $\lambda = 0{,}1224$ Å.

Con estas ideas se iniciaba la Mecánica Ondulatoria. En 1927 se realizó la prueba experimental directa que corroboraba el aspecto ondulatorio del movimiento de los electrones. CLINTON J. DAVISSON y LESTER H. GERMER comprobaron la difracción de un haz de electrones que incidían sobre un cristal de níquel, fenómeno análogo al de la difracción de los rayos X por los cristales. Siguieron experimentos análogos, en condiciones distintas, realizados por GEORGE THOMSON y otros que verificaban cada vez más exactamente las previsiones de la Mecánica Ondulatoria. DE BROGLIE aplicó sus ideas de ondas asociadas a los electrones a las órbitas estacionarias de la teoría de Bohr. Consideraba que las ondas asociadas al electrón debían ser ondas estacionarias y que por razones geométricas la longitud de la órbita debía contener un número entero de longitudes de onda, es decir,

$$2 \pi a = n \lambda = n \frac{h}{M u} \tag{22.15}$$

que es la misma condición de cuantización de las órbitas de Bohr ecuación (22.6). Esta idea, como el de las órbitas de Bohr, es demasiado simple, la realidad es más compleja. No obstante, estas ideas constituyen el punto de partida de una formulación más rigurosa debida a ERWIN SCHRÖDINGER, expuesta en 1926, y que constituye una extensión de la Mecánica Ondulatoria, equivalente a otras formulaciones matriciales debidas a WERNER HEISENBERG, y que en conjunto se les llama Mecánica Cuántica.

22.4 Algunas nociones de Mecánica cuántica. La teoría cuántica moderna tiene su origen en los años 1925 y 1926 con dos formulaciones matemáticas diferentes, debidas a WERNER HEISENBERG y a ERWIN SCHRÖDINGER, respectivamente. El primero partió del principio de correspondencia de Bohr, según el cual podía mantenerse el concepto clásico de órbita para números cuánticos grandes y en tal caso la radiación emitida tenía la misma frecuencia que la de revolución del electrón y por tanto la frecuencia de la radiación emitida nos proporciona una imagen de aquella órbita. Podrían formularse las leyes mecánicas entre las frecuencias y amplitudes. Para tal formulación, HEISENBERG reemplazó las ecuaciones de la mecánica newtoniana por ecuaciones similares entre matrices y por este motivo la citada formulación recibió el nombre de mecánica de las matrices o mecánica cuántica. El segundo, SCHRÖDINGER, aceptó la idea de LUIS DE BROGLIE de las ondas asociadas a los corpúsculos materiales, procurando establecer una ecuación para las ondas estacionarias asociadas a los electrones que se mueven en torno al núcleo. Formuló una ecuación de ondas, que recibe su nombre, encontrando la energía de los estados estacionarios del átomo de hidrógeno como *valores propios* de aquella ecuación (el significado de estos «valores propios», en general, no puede darse de un modo sencillo). Con las dos formulaciones se llegó a los mismos resultados, expresando la energía del átomo de hidrógeno de manera correcta. Más tarde se aplicó con éxito al átomo de helio y a otros más pesados. No obstante, el dualismo onda-corpúsculo no se había resuelto o, al menos, la cuestión quedaba algo escondida en el aparato matemático. Se había pasado de unos modelos simples a esquemas abstractos no representables por medio de un modelo mental intuitivo. Parece como si para progresar en el conocimiento de los fenómenos atómicos deba perderse la evidencia.

En la teoría de Schrödinger las ondas son función de las coordenadas y del tiempo y se representan por una función $\psi\ (x, y, z, t)$ que se llama «función de onda». La onda representada por ψ no es una onda como las que se estudian en Física macroscópica (ondas elásticas, electromagnéticas), es un concepto abstracto. HEITLER indicaba que «puede pensarse que la función de onda sea una *realidad objetiva* o que solamente sea un producto del entendimiento útil para predecir los resultados de los experimentos, aunque ocurre que siempre estas predicciones concuerdan con los hechos objetivos». Para encontrar un significado físico a ψ podemos comparar con lo que ocurre con las ondas luminosas. La intensidad de una onda luminosa podría definirse como el número de fotones que atraviesan una superficie de área unidad en la unidad de tiempo normalmente a ella. Esta intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda (en las ondas electromagnéticas a E^2) y en la función de onda será proporcional a ψ^2. (Bien entendido que ψ es generalmente una función *compleja* y el cuadrado será el del módulo.) Si $\psi = 0$ allí no puede haber

partículas y donde haya gran densidad de partículas ψ debe ser grande. Puede darse una interpretación estadística, como veremos en un ejemplo simple. Supongamos que el número de electrones en una región del espacio sea de $10^{20}/m^3$. En un volumen de 1 mm^3 tendremos 10^{11}, en una micra cúbica tendríamos 10^2, pero si tomamos muestras distintas hallaríamos 98, 102, etc., en promedio 100. Si el volumen fuese inferior a 10^{-20} m^3 el número de electrones sería fraccionario, lo que significa que en distintas muestras hallaríamos uno o ninguno. El número de electrones en un elemento de volumen dv sería $N\,dv$, siendo N el número de electrones por unidad de volumen. Si encontramos un valor fraccionario, por ejemplo 0,2, indicaría que la probabilidad de encontrar un electrón en aquel volumen elemental es del 20 %. Podemos interpretar N como una «densidad de probabilidad» (cuantos más electrones mayor probabilidad). Extendiendo esto a la función ψ podemos considerar que ψ^2 es la densidad de probabilidad y que $\psi^2\,dv$ es la probabilidad de encontrar una partícula en un elemento de volumen dv. En este sentido, la onda podría interpretarse como onda, o función, de probabilidad. Esta interpretación impone ciertos requisitos matemáticos a la función de onda. La probabilidad *total* de encontrar una partícula en un punto cualquiera de un volumen dado debe ser igual a la unidad, o sea,

$$\int_v \psi^2\,dv = 1 \tag{22.16}$$

extendida la integral a todo el volumen. La ψ que satisface a este requisito se dice que está *normalizada.*

Vamos a determinar la *ecuación de ondas,* en un modelo unidimensional para ondas estacionarias, partiendo de lo que hemos visto al tratar de las ondas estacionarias en el movimiento ondulatorio armónico. En § 11.11 (tomo I) se daba la amplitud A' de las ondas estacionarias por la ecuación (11.21)

$$A' = 2A\,\cos\,\omega\frac{x}{v}$$

En lugar de la función coseno podía haber sido la función seno (depende de la fase inicial), o sea, podría ser

$$A'' = 2A\,\text{sen}\,\omega\frac{x}{v}$$

En general, podríamos tomar una amplitud compleja $\psi = A' + iA''$, en donde i es la unidad imaginaria, y tendríamos

$$\psi = 2A\,e^{i\omega x/v} \tag{22.17}$$

(lo cual se había indicado al final de § 10.2). Llamando ψ_0 a $2A$ escribimos

$$\psi = \psi_0\,e^{i\omega x/v} \tag{22.18}$$

Tanto la parte real como la imaginaria de (22.17) puede representar el valor de la amplitud de las ondas estacionarias. Veamos a qué ecuación diferencial satisfacen. Derivando dos veces respecto a x hallamos

$$\frac{d\psi}{dx} = i\frac{\omega}{v}\psi_0\,e^{i\omega x/v} \qquad \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2}\psi_0\,e^{i\omega x/v}$$

o sea $$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2}\psi$$

o bien $$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2}\psi = 0 \qquad (22.19)$$

Para pasar de esta ecuación a la de la función de onda de Schrödinger, primero escribiremos $\omega/v = 2\pi/T\,v = 2\pi/\lambda$, y luego sustituimos el valor de λ dado por la ecuación (22.13) y encontramos

$$\frac{\omega^2}{v^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \frac{4\pi^2 M^2 u^2}{h^2} = \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \frac{1}{2} M u^2 (2M) = 2M\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 E_c$$

pero la energía cinética E_c es igual a la energía total W menos la potencial V ($E_c = W - V$), la ecuación (22.19) se convierte en

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 M}{h^2}(W - V)\psi = 0 \qquad (22.20)$$

que es la ecuación de ondas para un modelo unidimensional.

Podemos considerar un modelo unidimensional muy sencillo constituido por un electrón que se mueve a lo largo del eje x. Colocamos dos paredes reflectoras ideales, normales al eje, de forma que el electrón no las pueda atravesar y que no esté sometido a fuerzas exteriores. Si la distancia entre las paredes reflectoras es b, la función de onda debe ser nula para $x \leqslant 0$ y para $x \geqslant b$. Éstas serán las condiciones de contorno a que deberá satisfacer la solución. Las ondas asociadas al electrón constituirán un sistema de ondas estacionarias, que vamos a encontrar. La solución será del mismo tipo que la (11.21), tomo I, que hemos usado antes y podemos escribir

$$\psi = \psi_0 \operatorname{sen} \omega\frac{x}{v} = \psi_0 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{\lambda}x$$

que se anula para $x = 0$, cosa que no ocurriría si fuese $\cos \omega\frac{x}{v}$. Podemos comprobar que satisface a la ecuación (22.19). La segunda condición de contorno exige que $0 = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{\lambda}b$, la cual se satisface si

$$\frac{2\pi}{\lambda}b = n\pi \qquad (22.21)$$

siendo n un número entero cualquiera. Las longitudes de onda posibles serán

$$\lambda = \frac{2b}{n} \qquad (22.22)$$

Podemos demostrar que no son posibles todas las energías para estos estados estacionarios. Los niveles de energía son discretos. Efectivamente la energía será

$$\frac{1}{2} M u^2 = \frac{1}{2} M \left(\frac{h}{M\lambda}\right)^2$$

sustituyendo λ por sus valores posibles dados por (22.22) hallamos

$$W = \frac{n^2 h^2}{8 M b^2} \tag{22.23}$$

dando valores a n (1, 2, 3, ...) hallamos los niveles de energía permitidos.

Para interpretar los niveles discretos de energía en el átomo de hidrógeno, debe integrarse la ecuación de ondas en tres dimensiones. Esta ecuación es una extensión de la (22.20) en la que han de tomarse las derivadas segundas de ψ respecto a x, y y z dos veces y sumarlas.

Puede expresarse en coordenadas polares y las soluciones vienen en forma de producto de una función de la distancia al centro por otras dos que dependen de los ángulos. La función de la distancia, más simple, es de la forma

$$\psi(r) = K e^{-r/a} \tag{22.24}$$

para la cual W tiene el mismo valor dado por la ecuación (22.9) para $n = 1$, es decir, la energía del estado fundamental. Si buscamos la probabilidad de encontrar el electrón a cierta distancia del núcleo tendremos que hallar $\int \psi^2 \, dv$ y encontraríamos que el valor máximo de esta probabilidad es cuando $r = a$, pero este valor de a es el mismo que el calculado en (22.8) para $n = 1$, es el «radio de Bohr» de la órbita del estado fundamental. El electrón no describe ninguna órbita. Se le puede encontrar en algún punto en torno al núcleo, pero la probabilidad mayor es hallarlo en puntos distantes del núcleo $r = a$, para el estado fundamental. Aquí vemos que no podemos determinar la posición del electrón de energía determinada. Esto es un caso particular del *principio de indeterminación* enunciado por HEISENBERG en 1927, en el que se afirma que no podemos precisar simultáneamente la posición y la cantidad de movimiento de una partícula. Indicando por Δx la indeterminación de la posición y por Δp la de la cantidad de movimiento, el principio de Heisenberg expresa que el producto de tales indeterminaciones es del orden de la constante h de Planck, es decir,

$$\Delta x \cdot \Delta p \simeq \frac{h}{2\pi} \tag{22.25}$$

cuanto más pequeño sea Δx más precisamos la posición, pero más indeterminada queda la cantidad de movimiento. No podemos representar movimientos de partículas, de cantidad de movimiento determinada, por trayectorias lineales.

Este principio de incertidumbre permitió resolver el enigma del dualismo onda-corpúsculo. BOHR enunció el *principio de complementaridad* en el que resulta que el aspecto corpuscular y el ondulatorio son dos aspectos complementarios de la realidad y que no pueden manifestarse más que por experiencias que se excluyan mutuamente. Deben existir limitaciones en el empleo del punto de vista corpuscular y del ondulatorio. Tales limitaciones pueden expresarse por medio de las relaciones de incertidumbre.

22.5 Algunos aspectos de la Electrónica Cuántica; maser y laser. La Mecánica Cuántica se ha aplicado con éxito a diversos campos de la Física. Aquí consideraremos algunos aspectos de su aplicación a la Electrónica. Cuando en Electrónica se opera con electrones libres, como en el caso de producción y amplificación de ondas electromagnéticas con válvulas electrónicas, se utiliza la Física Clásica. Si se

consideran los estados ligados de los electrones en los átomos o moléculas se tiene que utilizar las ideas cuánticas.

El *maser* (de las iniciales de Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation) es un dispositivo para amplificar microondas por emisión estimulada de radiación. Veamos el significado de *emisión estimulada*. Si el estado de energía de un átomo o molécula es E superior a su estado normal o fundamental E_0, se dice que está excitado o activado, y pasa al estado fundamental emitiendo radiación de frecuencia f dada por $f = (E - E_0)/h$, según sabemos de la cuantización de la energía. Si el estado energético es el fundamental E_0 y un grupo de tales átomos reciben radiación electromagnética de frecuencia f, algunos átomos se excitan pasando a estados energéticos superiores E, tales que se cumpla que $E - E_0 = f\,h$. Este fenómeno se llama absorción. EINSTEIN demostró que podía existir emisión, llamada estimulada, si ciertos átomos activados reciben radiación electromagnética de frecuencia $f = (E - E_0)/h$, en donde E representa el estado de energía de tales átomos. En este caso cada átomo emite radiación electromagnética de frecuencia f que se suma a la incidente de igual frecuencia. En cada una de las emisiones estimuladas aparece un fotón adicional de energía $h\,f$. Supongamos ahora que tenemos un conjunto de átomos, unos activados al estado E y otros en el estado fundamental E_0, que reciben radiación electromagnética de frecuencia $f = (E - E_0)/h$, en tal caso tendremos emisión y absorción. El valor final resultante depende del número de átomos en cada estado de energía, lo que generalmente se llama *población*. Si las dos poblaciones son iguales la intensidad incidente se mantiene. Si la población en el estado E_0 es superior a la del estado E el resultado final será una absorción y la intensidad final será inferior a la inicial. En el caso contrario de que la población en el estado E supere a la del estado E_0, la emisión es mayor que la absorción y la intensidad resultante es mayor que la inicial; hemos conseguido una amplificación. En general, la población en el estado E_0 es mayor que en el E y domina la absorción. Es posible preparar un sistema en el que la población en el estado E supere a la del E_0. Esto sería una inversión de población imprescindible para la acción maser. Ahora bien, la inversión de población considerando dos niveles es difícil de lograr; en cambio, es más fácil considerando tres niveles de energía. Consideremos un conjunto de átomos que puedan ocupar tres niveles o estados de energía E_1, E_2 y E_3, dados en orden creciente y cuyas poblaciones son n_1, n_2 y n_3, siendo en general $n_1 > n_2 > n_3$. Supongamos que este conjunto recibe radiación de manera que parte de la población del estado E_1 pase al estado E_3. Para ello la frecuen-

cia de la radiación debe ser $f_{13} = (E_3 - E_1)/h$, a la cual el profesor KASTLER llamó *frecuencia de bombeo*. De esta manera podemos llegar a invertir la población de los niveles E_3 y E_2 (o sea $n'_3 > n'_2$) y lograremos emisión estimulada si mandamos radiación de frecuencia $f_{32} = (E_3 - E_2)/h$. Es posible pues obtener amplificación de la radiación estimulante, pero el rendimiento sería pequeño. Para aumentarlo es preciso tener la radiación estimulante en contacto con los átomos activados el mayor tiempo posible. Para ello se encierran éstos en una caja con paredes reflectoras, de manera que en las sucesivas reflexiones la onda va actuando sobre los átomos, el rendimiento aumenta y finalmente sale al exterior en una dirección determinada. En la región de las microondas, cuyas longitudes de onda están comprendidas entre 1 mm y 1 m, la caja debe tener dimensiones comparables con la correspondiente longitud de onda y recibe el nombre de *cavidad resonante*. La distancia entre las paredes reflectoras se hace igual a la longitud de onda, pero si ésta es muy pequeña. se hace igual a un múltiplo de ella. Generalmente una de las paredes es parcialmente reflectora y la onda amplificada sale por tal pared normalmente a ella.

La idea original del maser se debe a CHARLES H. TOWNES, en 1951, y su realización fue en 1954 por el propio TOWNES y colaboradores. Para ello usaron moléculas de amoniaco activadas en un horno y la inversión de población se hacía separando las moléculas activadas de las otras mediante un campo eléctrico no homogéneo. Luego mandaban estas moléculas activadas a la cavidad resonante, donde recibían la radiación electromagnética estimulante. La frecuencia de la radiación estimulante era de $2{,}4 \times 10^{10}$ Hz ($\lambda = 1{,}25$ cm).

El maser de tres niveles fue propuesto por los rusos BASOV y PROKHOROV, en 1955, y por NICOLÁS BLOENBERGEN, en 1956, y realizado por tres investigadores de la Bell Telephone. Utilizaban un cristal enfriado con nitrógeno líquido para acentuar la diferencia de poblaciones.

Los maser usados como osciladores tienen aplicación a los relojes atómicos, por su gran estabilidad en la frecuencia y la pureza de la misma. Como amplificadores son extraordinarios por su bajo nivel de *ruido*, extraordinaria ganancia y pureza. El satélite de comunicaciones Echo I utilizaba un maser para amplificar señales debilísimas, lo que habría sido imposible con los amplificadores convencionales.

TOWNES, el descubridor del maser y ARTHUR L. SCHAWLOW, en 1958, fueron los primeros en vislumbrar la extensión del maser a las ondas luminosas. En 1960, TEODORO H. MAIMAN consiguió el efecto

de amplificación de luz con emisión estimulada de radiación creando el *laser* (iniciales de Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation). El principio fundamental es el mismo que el maser. Se produce bombeo óptico e inversión de población con una onda luminosa de frecuencia adecuada y luego se puede estimular la emisión con la radiación luminosa que se desea amplificar. MAIMAN utilizó un cilindro de rubí sintético (un cristal de óxido de aluminio con pequeñas impurezas de cromo) con un extremo plateado y el otro semiplateado. Se activa el cristal de rubí con un potente destello luminoso. Los átomos de cromo después de activados pasan a un estado metaestable inferior al que habían adquirido, pero superior al fundamental. Al estimular la emisión pasan a su estado fundamental emitiendo radiación luminosa de frecuencia $4{,}32 \times 10^{14}$ Hz ($\lambda = 6943$ Å), con lo que la luz a la salida de la cara semiplateada es roja. Las dos superficies reflectoras han actuado de cavidad resonante para mejorar el rendimiento. La luz emitida es coherente, de gran intensidad y extraordinariamente colimada, es decir, los rayos emergentes son casi paralelos y apenas divergen en su propagación.

En 1961, JAVAN obtuvo el primer laser gaseoso, utilizando una mezcla de helio y neón. Una descarga eléctrica en la mezcla de estos gases activa los átomos de helio, los cuales adquieren niveles de energía casi iguales a los del neón y es fácil lograr la inversión de población en el neón, el cual es el que da lugar a la emisión estimulada. La cavidad resonante es un tubo de cuarzo con un reflector en un extremo y otro semiplateado en el otro, por donde sale la luz amplificada. Según se ajuste, este laser puede dar radiación infrarroja de $\lambda = 10\,600$ Å o luz roja de $\lambda = 6328$ Å. La intensidad de la luz amplificada es pequeña, muy inferior a la del laser de rubí.

Finalmente, vamos a describir brevemente el *laser de inyección*. Se basa en lo siguiente: En ciertos semiconductores, el más notable es el arseniuro de galio, al inyectar electrones en la región p de una unión p-n éstos se recombinan con huecos muy rápidamente mediante transiciones de la banda de conducción a la banda de valencia y cada transición va acompañada de la emisión de un fotón. Estos fotones se emiten al azar, pero si iluminamos la unión con luz de la misma longitud de onda que la de los fotones emitidos, se estimulan las recombinaciones y la energía de la luz emitida se suma a la de la luz incidente. Con una cavidad resonante adecuada podemos obtener un haz emergente muy intenso. El rendimiento de este tipo de laser es del 50 %, muy superior al de otros tipos. Este laser tiene la gran ventaja de que podemos modular la luz emergente variando la corriente en la unión de acuerdo con una señal determinada. Dirigien-

do la luz del laser a una célula fotoeléctrica situada en una estación receptora podemos reconstruir la señal que ha servido para modular el haz. Esto permite transmitir gran cantidad de información. Este tipo de laser se empezó a estudiar y producir en 1962 y se han ido continuando las investigaciones para obtenerlo a partir de otros semiconductores.

Los estudiantes interesados en las ideas fundamentales de los laser pueden consultar la obra de SCHAWLOW y TOWNES, «Quantum electronics» (Columbia Univ. Press, New York, 1960). Para los laser de gas, el artículo de JAVAN, BALLIK y BOND, en *J. Opt. Soc. Am.* 52, 96, 1962. Para los de inyección, el artículo de BENOIT y DEBEVER, en *Comptes Rend.* 259, 2200, 1964.

23

Física nuclear y partículas elementales

Los modelos atómicos de Rutherford y de Bohr consideran el átomo constituido por un núcleo cargado positivamente y que contiene casi toda la masa del átomo, pues fuera de él sólo existen electrones que lo rodean, en número tal que neutralicen la carga del núcleo. Los fenómenos radiactivos indican que los átomos emiten partículas que, necesariamente, salen del núcleo. Ello nos lleva a considerar su estructura, y al hacerlo, se pone de manifiesto la existencia de partículas de las que no se tenía noticia. Los cambios que tienen lugar en los núcleos al emitir o absorber dichas partículas, pueden poner en juego grandes energías, ocupando su aprovechamiento la atención de los científicos y técnicos de hoy.

En este capítulo estudiaremos brevemente los conceptos fundamentales de la Física del núcleo, daremos una idea de algunos modelos nucleares propuestos y pasaremos revista a las partículas elementales más importantes.

23.1 Algunas propiedades de los núcleos. Las primeras propiedades con que nos encontramos al estudiar un núcleo son su carga eléctrica y su masa. La primera se mide en cargas elementales (cfr. § 2.14) cuyo número Z recibe el nombre de *número atómico*. La segunda se mide en unidades de masa atómica (símbolo u) definiéndose esta unidad como la dozava parte de la masa de un átomo del núclido ^{12}C, lo que equivale a $1{,}66043 \cdot 10^{-27}$ kg. El número entero más próximo a la masa nuclídica expresada en unidades de masa atómica recibe el nombre de *número másico* y se representa por A.

Vimos en § 22.2 que para interpretar la estructura fina de las rayas del espectro hubo necesidad de introducir el concepto de spin del electrón. Pues bien, al observar más detalladamente cada una de las rayas componentes de una raya espectral, se vio que también estaban compuestas de varias, lo que constituye la llamada *estructura*

hiperfina del espectro. Esta estructura hiperfina sólo puede interpretarse admitiendo la existencia de un *spin nuclear,* es decir, el núcleo posee un momento cinético intrínseco de valor $I\,(h/2\pi)$, en donde I tiene valor entero cuando A es par y un valor igual a la mitad de un número impar cuando A es impar.

23.2 Radiactividad natural. En 1896, ANTOINE HENRI BECQUEREL (1852-1908) notó que la presencia de ciertas sustancias velaba las placas fotográficas aun estando protegidas de la luz. A dichas sustancias se las llamó *radiactivas.* Más tarde, los esposos CURIE aislaron, del mineral llamado pechblende, un nuevo elemento al que llamaron *radio* por presentar radiactividad. En la actualidad se conocen muchos elementos radiactivos y todos ellos emiten radiaciones que al ser sometidas a un campo magnético pueden desviarse o no. Las que se desvían, pueden hacerlo como lo hacen las cargas positivas o como lo hacen las negativas. Las primeras son los *rayos* α y las segundas los *rayos* β. Las que no se desvían reciben el nombre de *rayos* γ y son radiaciones electromagnéticas de longitud de onda muy corta, análoga a la obtenida con un tubo de rayos X al que se aplicara una tensión de centenares de kilovolt (cfr. ec. 12.16) o más. Pronto se comprobó que los rayos α estaban constituidos por partículas que son núcleos de He ($Z = 2$, $A = 4$) llamadas *partículas* α y que las *partículas* β eran electrones rápidos.

Cada elemento radiactivo, salvo unos pocos que pueden emitir en unos casos una partícula α y en otros una β, se *desintegran* siempre de la misma manera (dando siempre α o siempre β), yendo acompañada dicha desintegración de radiación γ. Se comprende que si un elemento emite una partícula α, su núcleo disminuirá su carga positiva en $2e$ y su número másico en 4 u, lo que podemos simbolizar escribiendo

$$ {}_{Z}X^{A} \rightarrow {}_{Z-2}X^{A-4} + {}_{2}\alpha^{4} \qquad (23.1) $$

Químicamente, ello significa que el elemento *padre* se ha transformado en otro elemento (hijo) diferente. Análogamente, en la desintegración β el núcleo no varía su número másico, pero pierde una carga $-e$, lo que significa que Z aumenta en 1, o sea,

$$ {}_{Z}X^{A} \rightarrow {}_{Z+1}X^{A} + {}_{-1}e^{0} \qquad (23.2) $$

Las ecuaciones 23.1 y 23.2 resumen las *leyes de Soddy* de las transmutaciones radiactivas. Como ejemplo de ellas, mencionaremos la desintegración α del polonio ${}_{84}Po^{210}$ y la β del uranio Y ${}_{90}Th^{231}$

$$ {}_{84}Po^{210} \rightarrow {}_{82}Pb^{206} + {}_{2}\alpha^{4} \qquad {}_{90}Th^{231} \rightarrow {}_{91}Pa^{231} + {}_{-1}e^{0} $$

En la primera se alcanza el plomo, que es ya estable, mientras que en la segunda se alcanza el protoactinio que es inestable y se desintegra emitiendo una partícula α y dando Ac que también se desintegra, etc. Las desintegraciones sucesivas llevan siempre al plomo, elemento que ya no se desintegra, y los elementos radiactivos existentes en la naturaleza resultan pertenecer, cada uno de ellos, a una de las tres familias radiactivas llamadas del uranio, del actinio y del torio, respectivamente (fig. 23.1). Los elementos de la primera tienen números atómicos que cumplen con la relación $A = 4n + 2$, los de la segunda con $A = 4n + 3$ y los de la tercera con $A = 4n$. Es posible que haya existido en la naturaleza la serie del neptunio en la que $A = 4n + 1$, pero en tal caso sus elementos se habrían desintegrado totalmente hace tiempo a causa de la brevedad de su existencia, por lo que hoy sólo pueden obtenerse artificialmente bombardeando núcleos con ciertas partículas.

23.3 Desintegración radiactiva; período y vida media. Separemos N_0 átomos de un elemento radiactivo (p. ej. RaF). Uno por uno, dichos átomos se van desintegrando transformándose en otro elemento (plomo en nuestro ejemplo) y al cabo de un cierto tiempo, solamente quedan sin desintegrar la mitad de los N_0 átomos. A este tiempo, se le da el nombre de *período de semidesintegración* y es característico del elemento considerado (para el RaF 140 días). Veamos de relacionar este período con el mecanismo de la desintegración. Podemos suponer que, en un instante cualquiera, el número de desintegraciones que sufra un elemento sea proporcional al tiempo y al número de átomos presentes. Si éste es igual a N en el instante t, entre t y $t + dt$ el número de desintegraciones será igual a la disminución de N en el tiempo dt, o sea,

$$dN = -\lambda N\, dt \tag{23.3}$$

y al coeficiente de proporcionalidad λ le llamaremos *constante radiactiva* del elemento. Luego $dN/N = -\lambda\, dt$, que integrando da

$$\ln N = -\lambda t + \text{const.} \tag{23.4}$$

y como para $t = 0$, $N = N_0$

$$\ln N_0 = \text{const.} \tag{23.5}$$

y restando (23.5) de (23.4)

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t \quad \text{o sea} \quad N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{23.6}$$

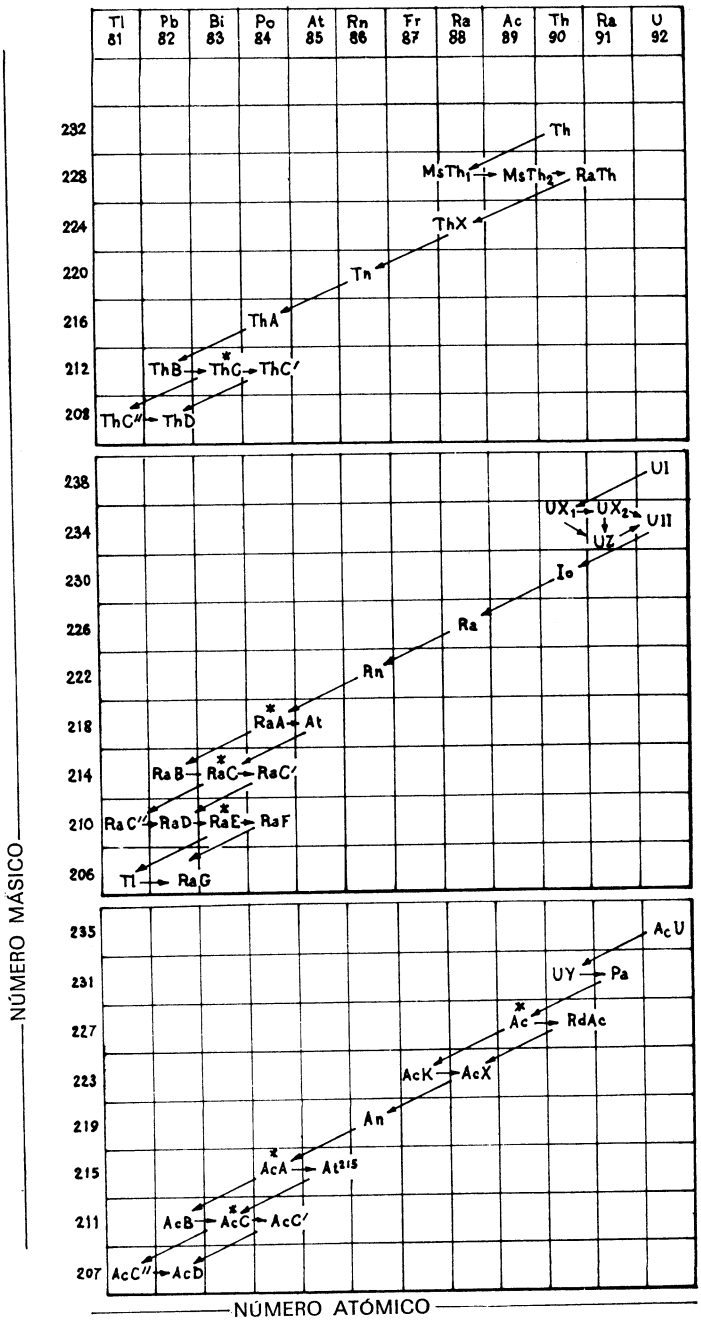


FIG. 23.1 Series radiactivas: *a*) familia del uranio; *b*) familia del actinio, y *c*) familia del torio.

Los N_0 átomos existentes al principio tienen «vidas» muy variadas, pues unos se desintegran pronto y otros tardarán mucho en desintegrarse. Como entre los instantes t y $t + dt$ desaparecen $|dN|$ átomos, podemos decir que el número de átomos que han vivido un tiempo t es (cfr. ec. 23.3)

$$|dN| = \lambda N \, dt$$

Sumando sus vidas tenemos, en total, un tiempo

$$t \, |dN| = \lambda N t \, dt = \lambda N_0 e^{-\lambda t} t \, dt$$

donde se ha tenido en cuenta la ecuación 23.6. Los N_0 átomos existentes al principio darán, entre todos, una existencia de

$$\int_{N_0}^{0} t \, |dN| = \int_0^{\infty} \lambda N_0 e^{-\lambda t} t \, dt$$

lo que da una *vida media* por átomo

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} \lambda N_0 e^{-\lambda t} t \, dt = \frac{1}{\lambda} \tag{23.7}$$

según puede verse integrando por partes. Como, por lo visto anteriormente, τ es el tiempo probable de desintegración por átomo, la ecuación 23.7 nos indica que la constante radiactiva λ representa la probabilidad de que un átomo se desintegre en la unidad de tiempo. Estas cantidades pueden relacionarse fácilmente con el período de semidesintegración T, pues haciendo $t = T$ en la ecuación 23,6, el primer miembro será igual a $N_0/2$ y tomando logaritmos neperianos queda

$$-\ln 2 = -\lambda T \quad \text{o sea} \quad T = \frac{\ln 2}{\lambda} = (\ln 2)\,\tau$$

23.4 Neutrón. Los trabajos realizados en Alemania por W. Bothe y H. Becker en 1930 indicaban la presencia de una radiación muy penetrante que se emitía al bombardear el berilio con partículas α. Dicha radiación, al hacerla incidir sobre la parafina, arrancaba de ésta núcleos de hidrógeno (*protones*) de energía 5,7 MeV, según descubrieron los esposos Joliot-Curie, quienes, al comprobar que la radiación no era desviada por el campo magnético, supusieron que se trataba de rayos γ muy energéticos. El proceso de arranque de un protón es análogo al efecto Compton (cfr. § 12.7) y si consideramos un choque frontal, es decir, que el fotón se refleje regresando

por donde vino, en la ecuación 12.19 tendríamos $\theta = 180°$ y $\varphi = 0$ con lo que, siendo $p = m\,v$ la cantidad de movimiento del protón arrancado, resulta

$$\frac{h\,f}{c} = -\frac{h\,f'}{c} + m\,v \tag{23.8}$$

y como $m\,v = \sqrt{2\,m\,E_c}$, siendo E_c la energía cinética del protón, la ecuación 23.8 da

$$h\,f = -h\,f' + \sqrt{2\,m\,c^2\,E_c} \tag{23.9}$$

Por otra parte, la conservación de la energía impone que

$$h\,f = h\,f' + E_c \tag{23.10}$$

y sumando (23.9) y (23.10) tenemos

$$h\,f = \tfrac{1}{2}\,E_c + \sqrt{\tfrac{1}{2}\,m\,c^2\,E_c}$$

y como $E_c = 5{,}7$ MeV y la energía en reposo * del protón es $m\,c^2 = 939$ MeV, el fotón emitido por el berilio debería tener una energía $h\,f = 55$ MeV. Pero obtener fotones de esta energía cuando la de las partículas α que bombardeaban el berilio era sólo de 5 MeV, indujo a JAMES CHADWICK a recoger en 1932 una vieja idea de RUTHERFORD, quien había considerado la posibilidad de existencia en el núcleo de una partícula neutra de masa igual a la del protón. Junto con N. FEATHER experimentó haciendo incidir la misteriosa radiación sobre diferentes materiales y los resultados podían siempre interpretarse considerándola constituida por partículas de masa casi igual a la del protón y carga eléctrica nula, por lo que se le dio el nombre de *neutrón*. Los valores admitidos actualmente para las masas en reposo del protón y del neutrón son, respectivamente,

$$m_p = 1{,}00727663 \text{ u} \quad \text{y} \quad m_n = 1{,}0086654 \text{ u}$$

El bombardeo del berilio por partículas α, que condujo al descubrimiento del neutrón, daba lugar a un isotopo del carbono que era inestable, es decir, que se comportaba como radiactivo, y se estabili-

* La teoría de la Relatividad enseña que energía y masa son manifestaciones de una misma cosa y que la masa de una partícula depende de su celeridad. Por ello es necesario especificar la masa en reposo (o la energía en reposo) de una partícula, que será una característica intrínseca de la misma.

zaba al emitir el neutrón. Se trataba, pues, de una *reacción nuclear* que puede expresarse en la forma

$$ {}_4\mathrm{Be}^9 + {}_2\alpha^4 \rightarrow {}_6\mathrm{C}^{13} \rightarrow {}_6\mathrm{C}^{12} + {}_0n^1 \qquad (23.11) $$

donde hemos simbolizado el neutrón por n, asignándole $Z = 0$ y $A = 1$, como le corresponde. Obsérvese que en todos los miembros de la anterior reacción se mantiene invariable la suma de los números atómicos de sus componentes, así como la de sus números másicos. Esto se cumple en todas las reacciones nucleares que se producen al bombardear diversos núcleos con partículas α, electrones, neutrones, protones, etc.

23.5 Energía nuclear de enlace; fisión y fusión. El descubrimiento del neutrón, junto al hecho de que las masas atómicas son muy aproximadamente múltiplos de la masa del protón o del neutrón, llevaron a considerar que el núcleo está compuesto de Z protones y $A - Z$ neutrones. Protones y neutrones se conocen bajo el nombre genérico de *nucleones,* y un núcleo tendrá, por tanto, A nucleones. Las masas de éstos se han consignado en § 23.4, y dado un núcleo, podríamos creer que su masa se obtendría sumando las de sus nucleones. Sin embargo, las medidas de aquélla resultan ser siempre inferiores a la suma mencionada. Ello indica que *al unirse los nucleones separados para formar un núcleo, se produce una pérdida de masa.* La interpretación de esto sólo puede lograrse atendiendo a la teoría de la Relatividad. Según ella, masa y energía no son más que manifestaciones de una misma cosa, y el principio de conservación correspondiente exige que la masa desaparecida se transforme en una energía llamada *energía nuclear de enlace,* que es la que mantiene unidos los nucleones en un espacio tan reducido como es el núcleo. La relación entre masa y energía es $W = m\,c^2$ (§ 12.7) y por tanto la energía de enlace ΔW estará relacionada con el *defecto de masa* Δm por $\Delta W = c^2\,\Delta m$.

Así, por ejemplo, en el caso del ${}_5\mathrm{B}^{10}$, que contiene 5 protones y 5 neutrones, las masas de éstos, tomando los valores dados en § 23.4, suman 10,07971 u, mientras que la masa del núclido es 10,01019 u. Ello representa un defecto de masa de 0,06952 u, y como 1 u es igual a $1{,}6604 \cdot 10^{-27}$ kg, dicho defecto de masa equivale a $1{,}154 \cdot 10^{-28}$ kg, que multiplicado por $c^2 = 9{,}00 \cdot 10^{16}$ m·s^{-1} da una energía de enlace de $1{,}038 \cdot 10^{-11}$ J, que expresada en MeV da 64,7 MeV.

Hemos dicho que la energía de enlace mantiene unidos a los nucleones, y ello debe interpretarse en el sentido de que para descom-

poner un núcleo en sus nucleones, dejándolos libres, es necesario entregarle una energía igual a la de enlace. El cociente entre ésta y el número de nucleones A es la *energía media de enlace por nucleón* $\bar{E}$, que hemos representado en la figura 23.2 para los núcleos estables, es decir, para los que no se desintegran espontáneamente. Se ve que para los núclidos en los cuales $A > 25$, $\bar{E}$ tiene un valor que

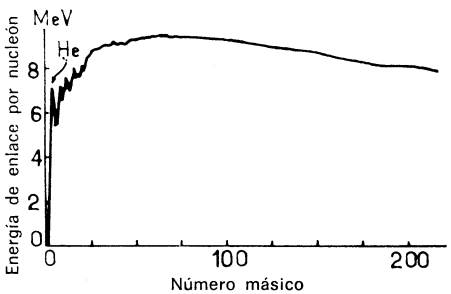


FIG. 23.2 Energía de enlace por nucleón de los núcleos estables.

varía poco, presentando un máximo de unos 8,75 MeV para los núclidos de número másico del orden de 50. Entre los núclidos más ligeros se observan irregularidades en la distribución de los valores de $\bar{E}$, y así resulta que los nucleones constitutivos del núcleo de He (partícula α) están unidos mucho más fuertemente que los nucleones de los demás núclidos ligeros.

En la fig. 23.2 podemos ver que el U^{235} presenta una $\bar{E} = 7{,}6$ MeV por nucleón. Si dicho núcleo se partiera en dos partes aproximadamente iguales, se tendrían dos núclidos de la región del máximo de la curva, por lo que poseerían ambos mayor energía de enlace por nucleón, lo que hace que en este proceso, llamado *fisión*, se libere una gran energía. Éste es el fundamento de la *bomba atómica* primitiva en la que se aprovechaba la fisión del U^{235}.

El efecto es más impresionante si pasamos de la región izquierda de la curva de la figura 23.2 al centro, ya que entonces es mayor el aumento de energía de enlace por nucleón. Así, cuatro protones pueden unirse para dar lugar a un núcleo de He^4 y a dos *positones* (electrones positivos), liberando una energía de 27,7 MeV. Este es el efecto que se aprovecha para realizar la bomba de hidrógeno o *bomba H*. Para que se realice dicho proceso de *fusión* es necesario una temperatura elevadísima, que suele obtenerse mediante una bomba atómica de fisión que hace las veces de fulminante.

23.6 Modelos nucleares. Como en el núcleo hay neutrones y protones, éstos deberán repelerse fuertemente ya que la repulsión electrostática será muy intensa a causa de la pequeñez de las separaciones entre ellos. Si no se ejercieran entre los nucleones fuerzas atractivas que compensaran dicha repulsión, el núcleo no podría persistir, pues «explotaría». Es, pues, un hecho la existencia de unas *fuerzas nucleares* que mantengan unidos los nucleones. Ahora bien, al bombardear la materia con protones, se comprueba experimentalmente que cuando un protón pasa a una distancia del núcleo superior a un valor r_0 del orden de 10^{-15} m, su desviación indica que se halla repelido por la fuerza de repulsión coulombiana (ec. 1.4), mientras que a distancias más cortas el protón es atraído por las llamadas *fuerzas internas*. Si, en vez de protones, se lanzara un neutrón contra el núcleo, no se hallaría repelido por las fuerzas electrostáticas y a distancias mayores que r_0 no se desviaría. En cambio, a distancias menores se siente atraído por fuerzas análogas a las que se ejercen sobre el protón cuando éste se halla a distancias similares. Esto nos indica que estas fuerzas atractivas son de *corto alcance* (pues a distancias mayores que r_0 no se hacen sentir) y mucho más intensas que las fuerzas que puedan existir debidas a campos gravitatorios, electrostáticos, magnéticos, etc., pues el efecto de éstas es despreciable, a distancias cortas, frente al de las fuerzas nucleares de corto alcance. Estos hechos, unidos a que la energía de enlace por nucleón es casi constante (fig. 23.2) sugieren que las fuerzas nucleares sólo se ejerzan eficazmente entre nucleones inmediatos (no alejados) y que un nucleón interno se halla sometido a una fuerza resultante nula como la molécula *A* del líquido en la figura 13.12 del tomo I. El caso es análogo, a escala diferente, al de las fuerzas de cohesión (cfr. § 13.10, tomo I) y también, cuando el nucleón se moviera hacia la superficie del núcleo se hallaría sometido a fuerzas por sus vecinos, como lo es la molécula *C* o la *B* de la figura 13.12 del tomo I. A causa de ello, NIELS BOHR y JOHN ARCHIBALD WHEELER (n. 1911) propusieron para el núcleo el *modelo de la gota*, según el cual el núcleo se compara a una gota de líquido y los nucleones a las moléculas que constituyen la gota. Claro está que en una gota pequeñísima hay un gran número de moléculas, mientras que los mayores núcleos tienen sólo unos 250 nucleones. Esto hace que el modelo de la gota, con el que se puede interpretar aceptablemente la curva de la figura 23.2 para los núcleos de $A > 25$, falle para los núcleos ligeros y es incapaz de explicar las irregularidades que éstos introducen en la mencionada curva.

Las reacciones nucleares análogas a la de la ecuación 23.11, en las que al incidir una partícula rápida en un núcleo se forma otro que es inestable (vive unos 10^{-14} s) y luego emite otra partícula, se interpretan con este modelo imaginando que una molécula de gran energía cinética que penetra en una gota elevará la temperatura de ésta, lo que originará la evaporación de otra molécula en la superficie de la gota. También describe bien la fisión originada por la incidencia de un neutrón lento en el núcleo del U^{235}. Como los diversos estados energéticos de un núcleo excitado se interpretan en este modelo como estados vibratorios de la gota, la penetración del neutrón haría oscilar la «gota» de manera tal que se parta en dos partes grandes desiguales y en varias gotitas que corresponden a los tres neutrones que se liberan en la fisión. El modelo, sin embargo, no permite calcular los niveles energéticos nucleares ni dice nada acerca de la fuerza entre nucleones.

A los daneses AAGE BOHR (n. 1922) y BEN ROY MOTTELSON (n. 1926) se debe la idea del *modelo estratiforme*, según el cual cada nucleón puede considerarse en movimiento en un campo de fuerzas de simetría esférica creado por los

demás nucleones. Los *protones*, a distancias mayores que r_0, se hallan repelidos electrostáticamente por los demás, mientras que a la distancia r_0 del centro del núcleo se hallan sometidos a fuerzas nucleares intensísimas, mientras que a distancias menores no se hallan sometidos a fuerza alguna. En cambio, los *neutrones* sólo resultan estar sometidos a las intensas fuerzas nucleares a la distancia r_0, mientras que a distancias suficientemente diferentes de ésta no se hallan sometidos a fuerzas. De todo ello resultan las energías potenciales representadas en la figura 23.3. Como las energías *totales* de los nucleones sólo son superiores a la potencial a distancias menores que r_0, sus energías cinéticas sólo podrán ser positivas a dichas distancias, lo que significa que los

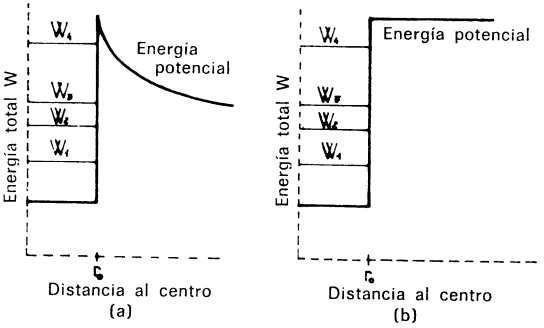


FIG. 23.3 La curva de trazo grueso representa la energía potencial, mientras que W_1, W_2, W_3 y W_4 representa la energía total de *a*) los protones nucleares, *b*) los neutrones nucleares.

nucleones podrán moverse hasta una distancia r_0 del centro del núcleo, como máximo, pues al superar r_0 la energía potencial sería mayor que la total, lo que implicaría una energía cinética negativa según la idea clásica. En la figura 23.3 se ha representado el concepto cuántico de que el nucleón sólo puede tener ciertos valores discretos, W_1, W_2, ..., de la energía, lo que lleva a considerar a los nucleones distribuidos según capas parecidas a las que forman los electrones en los átomos. De manera análoga al caso atómico en que los gases inertes tienen completas sus capas electrónicas con 2, 8, 18, etc., electrones, los núcleos más estables son los que tienen 2, 8, 20, 50, 82 y 126 neutrones, o protones, lo que indica la existencia de una capa completa. A dichos números se les llama *números mágicos*. Por ejemplo, el núcleo de He tiene dos protones y dos neutrones, con lo que estos nucleones estarán tan fuertemente unidos que se emiten formando una sola partícula (partícula α) en las desintegraciones radiactivas, en vez de emitirse en forma de cuatro partículas sueltas. Este modelo, basado en el «pozo de energía potencial» (fig. 23.3), con una estructura estratiforme, puede ayudar a progresar en el conocimiento del núcleo y permite interpretar los valores del spin nuclear (§ 23.1), pero, en cambio, no permite explicar la fisión, al revés de lo que sucede con el modelo de la gota. El día en que se conozca mejor la naturaleza de las fuerzas nucleares se podrá, posiblemente, crear un modelo más satisfactorio que los actualmente existentes.

23.7 Partículas elementales. Hemos visto que los átomos están constituidos por tres tipos de partículas: electrones, protones y neutrones. La emisión de partículas β por parte del núcleo, sin embargo, presentaba ciertas dificultades de interpretación, de las cuales sólo citaremos alguna. En primer lugar, FERMI consideró que la desintegración β tenía lugar porque uno de los neutrones nucleares se hacía inestable y se transformaba en un protón y un electrón. Ahora bien, los electrones emitidos poseen energías muy variadas, mientras que los núcleos hijos de un mismo elemento radiactivo β son todos iguales. Por otra parte, en la desintegración β permanece invariable el número de nucleones que si fuera impar daría para el spin nuclear un valor de I igual a la mitad de un número impar (cfr. § 23.1) antes y después de la desintegración β. Pero como el momento cinético del electrón es $\frac{1}{2}\ (h/2\pi)$, I tendría que haber variado en 1/2, cosa que no se observa. Esta contradicción se obviaba con la idea formulada por WOLFGANG PAULI (1900-1958) de que junto con el electrón se debía emitir otra partícula sin carga eléctrica ni masa en reposo, pero con un momento cinético $\frac{1}{2}\ (h/2\pi)$ y una cierta energía que sumada a la del electrón hace que se conserve la energía, si bien ésta puede repartirse entre esta partícula y el electrón de infinitas maneras diferentes. No diremos que existan estas dos partículas en el núcleo, como no decimos que existan fotones en un átomo, a pesar de que los emita, porque su longitud de onda es tan superior al tamaño del átomo que no podría permanecer en su interior. El principio de incertidumbre de Heisenberg también hace imposible la existencia de electrones en el núcleo. La partícula que PAULI había previsto, se conoce hoy en día por el nombre de *antineutrino*.

Ya en 1928, el científico inglés PAUL ADRIEN MAURICE DIRAC (n. 1902), al desarrollar la teoría cuántica relativista del electrón halló un sistema de estados energéticos negativos exactamente igual, salvo el signo, al de estados positivos, que podía interpretarse si se admitía la existencia de una partícula de igual masa en reposo que el electrón y de carga positiva de igual valor absoluto. Esta partícula, llamada *positón*, fue detectada experimentalmente en 1932 por CARL DAVID ANDERSON (n. 1905). En la figura 23.4 pueden verse las trayectorias seguidas por un positón y un electrón a causa de un campo magnético que las desvía en sentidos opuestos a causa de tener signos opuestos sus cargas.

El par de partículas ha sido generado por un fotón de energía superior a 1,02 MeV, ya que la masa en reposo de cada una de las partículas equivale a 0,51 MeV. Es decir, se ha *materializado* la energía en este proceso llamado de *producción de un par*.

La abundancia de electrones libres en la materia hace que un positón no pueda vivir largo tiempo, pues pronto se encontrará con uno de aquéllos y se *aniquilarán* transformando la energía asociada a su masa en energía electromagnética de fotones que entre todos sumarán 1,02 MeV. Antes de aniquilarse, girarán uno alrededor del otro formando un sistema llamado *positonio* de vida media 10^{-7} s, del que ha podido observarse su espectro constituido por rayas espec-

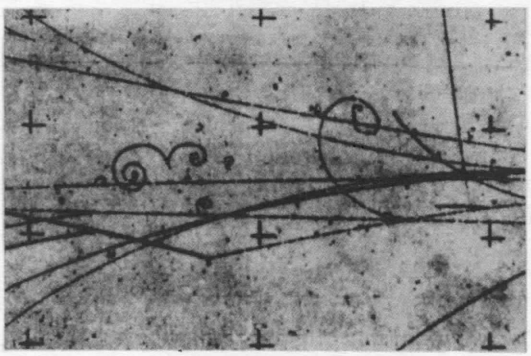


FIG. 23.4 Al generarse en un mismo punto un positón y un electrón, un campo magnético los desvía en sentidos opuestos, dando las trayectorias en forma de 3 que se aprecian en la fotografía tomada en una cámara de burbuja.

trales de longitudes de onda dobles que las del espectro del hidrógeno, debido a que la masa reducida del electrón es doble en el átomo de H que en el positonio.

En 1955 OWEN CHAMBERLAIN, EMILIO SEGRÈ, CLYDE WIEGAND y THOMAS YPSILANTIS produjeron pares protón-*antiprotón* materializando *fotones* de más de 1,88 GeV (cfr. § 2.14), que es el doble de la energía en reposo del protón. El antiprotón es una partícula de igual masa que el protón, pero de carga eléctrica opuesta. Con el antiprotón y un positón podría formarse un átomo de *antihidrógeno* y ello lleva a considerar la posibilidad de formar otros átomos de *antimateria,* si bien aún no se ha logrado formar ni el antihidrógeno. El protón y el antiprotón también se aniquilan mutuamente dando un cierto número de partículas subatómicas de las que hablaremos en seguida.

La Mecánica Cuántica prevé que cada partícula tenga su *antipartícula* con la que pueda *aniquilarse transformando en fotones su energía en reposo.* Sus masas en reposo serán, pues, iguales y sus cargas eléctricas, opuestas, con lo que se conservan la energía y la carga. Las partículas neutras tendrán antipartículas también neutras. Así

pues, el neutrón se aniquilaría con el antineutrón y el antineutrino que hemos citado es la antipartícula del *neutrino*. La evidencia experimental de la existencia de estas partículas, introducidas de manera un tanto artificiosa, no llegó hasta 1956 cuando FREDERIC REINES y CLYDE COWAN consiguieron manejar numerosos antineutrinos que incidiendo sobre protones efectuaban la siguiente reacción prevista por la teoría de Fermi:

$$\bar{\nu} + {}_1H^1 \rightarrow {}_0n^1 + {}_{+1}e^0$$

donde $\bar{\nu}$ representa el antineutrino.

Hacia 1910, VICTOR HESS (1883-1964) estudia una radiación muy penetrante que parece provenir del exterior de la Tierra y a la que MILLIKAN dio en 1927 el nombre de *rayos cósmicos*. En dicha radiación descubren en 1936 ANDERSON y NEDDERMEYER una partícula de masa unas 207 veces mayor que la del electrón que por ser intermedia entre las masas del electrón y del protón se le llamó *mesón* μ. Hoy en día se llama mesones a otros tipos de partículas, por lo que a la partícula citada se la conoce por el apócope *muón*. El muón es inestable, su período de semidesintegración es de $1{,}5 \cdot 10^{-6}$ s y se desintegra dando un electrón y dos neutrinos

$$\mu^- \rightarrow {}_{-1}e^0 + \nu + \bar{\nu}$$

estas partículas, junto con sus antipartículas $\bar{\mu}^+$, ${}_{+1}e^0$ tienen spin 1/2 y reciben el nombre genérico de *leptones*.

En 1947, C. F. POWELL, G. P. S. OCCHIALINI y C. M. G. LATTES descubren en los rayos cósmicos una partícula que recibe el nombre de *mesón pi* o *pión* y que puede tener carga positiva, negativa o nula (π^+, π^-, π^0). La masa de π^+ y π^- es 273 veces mayor que la del electrón y la de π^0 es 264 veces mayor, solamente. El pión carece de spin y π^- es la antipartícula de π^+ mientras que π^0 es su propia antipartícula. Estas propiedades concuerdan con las de una partícula cuya existencia había postulado en 1935 HIDEKI YUKAWA (n. 1907) para explicar las fuerzas nucleares de corto alcance.

Además de estos piones, se han descubierto otras partículas más pesadas que ellos, pero menos que el protón cuyos momentos cinéticos de spin son 0 ó 1 $h/2\pi$ y que aparecen cada una de ellas en las variedades neutra, positiva o negativa. Todas ellas reciben el nombre de *mesones* y se transmutan en otros mesones, leptones y fotones, quedando al final sólo leptones y fotones. La mayor de sus vidas medias es de 10^{-8} s, aproximadamente.

Siguiendo en orden creciente de masas, nos encontramos con el

protón, el neutrón y sus antipartículas, que agruparemos bajo la denominación genérica de *nucleones*. Con masas superiores a las de éstos se encuentran los *hiperones*, el primero de los cuales fue descubierto en 1947 por GEORGE D. ROCHESTER y CLIFFORD C. BUTLER en los rayos cósmicos dándole el nombre de hiperón Λ^0 que se transmuta en un protón y un mesón π^-. También se ha observado el antihiperón $\overline{\Lambda}^0$ que da un antiprotón y un mesón π^+. Otros hiperones se han descubierto y nos remitimos a la tabla 23.1 para las características de algunos de ellos. Junto con los nucleones, constituyen la clase de partículas elementales pesadas conocidas por *bariones*. De ellas sólo son estables el protón y el antiprotón. Se transmutan dando protones, leptones y fotones.

23.8 Interacciones fuertes y débiles. Las intensas fuerzas de corto alcance que se ejercen entre los nucleones y que YUKAWA había interpretado mediante la existencia del mesón π se extienden también a las que se ejercen entre todos los nucleones e hiperones y entre los propios mesones y se agrupan bajo el nombre genérico de *interacciones fuertes*. Los hiperones pueden considerarse como nucleones excitados por absorción de mesones y éstos son los quanta de interacción de estos campos de fuerza, al igual que los fotones lo son del campo electromagnético. Las fuerzas electromagnéticas ya hemos señalado (§ 23.6) que son menos intensas que las nucleares de corto alcance (unas cien veces).

Otro tipo a considerar son las *interacciones débiles* que explican las desintegraciones en las que se obtienen leptones como productos de desintegración (por ejemplo, radiactividad β).

Como ejemplo de interacción fuerte, podemos citar la que se produce al incidir un mesón π^- sobre un protón, dando lugar a un neutrón en estado excitado n*. Como la interacción es de corto alcance, sólo tendrá lugar durante el tiempo que tarde el mesón en cruzar el protón y como el diámetro de éste es del orden de $3 \cdot 10^{-15}$ m y el mesón lleva una celeridad del orden de la de la luz, el tiempo de interacción será sólo de 10^{-23} s aproximadamente. Esta brevedad es característica de las interacciones fuertes.

En cambio, las interacciones débiles tienen lugar en tiempos que son billones de veces mayores (la desintegración $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$ tiene lugar en 10^{-8} s). Es lógico que al actuar las fuerzas durante tiempos tan enormemente mayores, sean proporcionalmente más débiles.

23.9 Paridad. Las reacciones entre partículas elementales están sometidas a ciertos principios de conservación que rigen sus interacciones y sus modos de desintegración. Entre ellos se cuentan los de conservación de la masa-energía, de la cantidad de movimiento, del momento cinético y de la carga eléctrica. El primero de los citados es consecuencia inmediata de la homogeneidad del tiempo, el segundo de la homogeneidad del espacio y el tercero de la isotropía del espacio.‡ Es decir, las propiedades de *simetría* del espacio llevan consigo

‡ El lector interesado en esto puede consultar la excelente obra: L. D. LANDAU y E. M. LIFSHITZ, *Mecánica*, cap. 2. Ed. Reverté. Barcelona, Buenos Aires, Méjico, 1965.

TABLA 23.1. PARTÍCULAS ELEMENTALES.

Partícula	Masa (en masas electrónicas)	Carga	Spin (en $h/2\pi$)	Vida media (segundos)	Antipartícula
Fotón	0	0	2	Estable	Fotón
Leptones					
Neutrino ν	0	0	$\frac{1}{2}$	Estable	$\bar{\nu}$ (antineutrino)
Electrón $_{-1}e^0$	1	—e	$\frac{1}{2}$	Estable	$_{+1}e^0$ (positón)
Muón μ^-	206,8	—e	$\frac{1}{2}$	$2{,}21\times10^{-6}$	μ^+ (muón)
Mesones					
Pión π^0	264	0	0	2×10^{-16}	π^0 (pión)
Pión π^+	273	+e	0	$2{,}5\times10^{-8}$	π^- (pión)
Mesón K^+	967	+e	0	$1{,}2\times10^{-8}$	K^- (mesón)
Mesón K^0	974	0	0	K_1^0 $1{,}0\times10^{-10}$ K_2^0 $6{,}1\times10^{-8}$	$\bar{K}^0$ (mesón)
Bariones					
Protón $_1H^1$	1836,1	+e	$\frac{1}{2}$	Estable	$_{-1}H^1$ (antiprotón)
Neutrón $_0n^1$	1838,6	0	$\frac{1}{2}$	$1{,}0\times10^{3}$	$_0\bar{n}^1$ (antineutrón)
Hiperón Λ^0	2183	0	$\frac{1}{2}$	$2{,}5\times10^{-10}$	$\bar{\Lambda}^0$ (antilambda)
Hiperón Σ^+	2327	+e	$\frac{1}{2}$	$0{,}8\times10^{-10}$	$\bar{\Sigma}^-$ (antisigma —)
Hiperón Σ^0	2332	0	$\frac{1}{2}$	$<10^{-11}$	$\bar{\Sigma}^0$ (antisigma 0)
Hiperón Σ^-	2340	—e	$\frac{1}{2}$	$1{,}6\times10^{-10}$	$\bar{\Sigma}^+$ (antisigma +)
Hiperón Ξ^0	2565	0	$\frac{1}{2}$	$\simeq10^{-10}$	$\bar{\Xi}^0$ (antixi 0)
Hiperón Ξ^-	2580	—e	$\frac{1}{2}$	$1{,}3\times10^{-10}$	$\bar{\Xi}^+$ (antixi +)

los principios mencionados, entendiendo por simetría que exista cierta propiedad que no se altere al variar otra.

En matemáticas, se dice que $f(x)$ es función *par* si $f(x) = f(-x)$ cualquiera que sea x y que es función *impar* si $f(x) = -f(-x)$. Si en la figura 23.5 *a* y *b* consideramos que los ejes de ordenadas son espejos, la gráfica a un lado es exactamente la imagen especular de la gráfica al otro lado. Esto equivaldría a decir que la expresión matemática que define la función tiene la misma forma cuando invertimos el sentido positivo de las abscisas. En tres dimensiones tendríamos algo semejante. Al poner frente a un espejo la palma de la mano

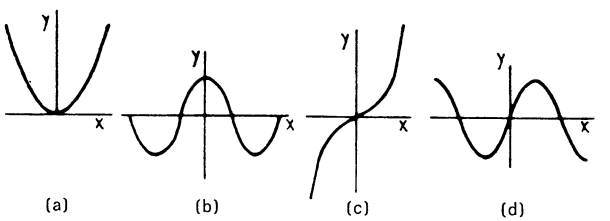


FIG. 23.5 Funciones pares: *a*) $y = ax^2$, *b*) $y = \cos x$; funciones impares: *c*) $y = ax^3$, *d*) $y = \text{sen } x$.

derecha, la imagen parece ser la palma de la mano izquierda. Es algo parecido a lo que sucede con las funciones impares. Lo que ocurre es que si consideramos un triedro dextrogiro *Oxyz* solidario a la mano, su imagen en el espejo sería un triedro levogiro *O'x'y'z'* cuyo eje *O'x'* normal al espejo tiene sentido opuesto al de *Ox*, mientras los otros dos ejes conservan el sentido. Un cambio del sistema de referencia consistente en invertir el sentido de uno sólo de los ejes, convierte el triedro de dextrogiro en levogiro o recíprocamente. Lo mismo ocurriría si invirtiéramos el sentido de los tres. En cambio, si invirtiéramos el sentido de *dos* de los ejes, tendríamos un nuevo triedro dextrogiro (o levogiro, si lo fuera el primitivo).

Pues bien, el principio de *conservación de la paridad* postula que las leyes fundamentales de la Física deben ser invariantes ante una transformación que lleve de un sistema de coordenadas dextrogiro a otro levogiro. En tal caso, la imagen especular de un fenómeno físico debe ser otro fenómeno tan real

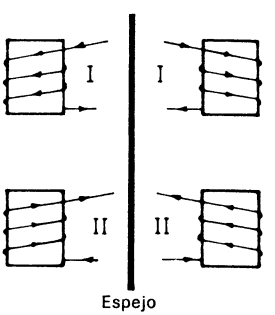


FIG. 23.6 Al intensificarse en el primario I la corriente en el sentido indicado, se induce en el secundario II una corriente del sentido indicado.

como el primero y no habría manera de saber cuál es el «objeto» y cuál la «imagen». Por ejemplo, en la figura 23.6 al aumentar la intensidad de la corriente en la bobina I se induce en la II una corriente del sentido indicado y esto es cierto tanto para uno de los sistemas como para su imagen especular.

En Mecánica cuántica se aplica el concepto de paridad a los problemas que tienen simetría de reflexión. Invertir los signos de las coordenadas de las partículas equivale a permutarlas. Si con ello no varía el sistema, su paridad es par. En cambio, si con ello se invirtiera el signo de la función de onda ψ (§ 22.4) la paridad del sistema sería impar.

Parece lógico, pues, que la paridad de un sistema aislado se conserve y así se ha comprobado que ocurre en las interacciones fuertes y en las electromagnéticas. En cambio, las interacciones débiles no cumplen el principio de conservación de la paridad, según dedujeron en 1956 TSUNG DAO LEE (n. 1926) y CHEN NING YANG (n. 1922) y comprobaron experimentalmente un año después CHIEN-SHIUNG WU (n. 1915) y sus colaboradores al observar la desintegración β del Co^{60} a temperaturas muy bajas.

23.10 Otros principios de conservación. Los principios de conservación mencionados en § 23.9 pueden servirnos para desechar la posibilidad de que exista una reacción que no cumpla alguno de ellos. En esa labor de selección intervienen otros principios de conservación de los que vamos a dar cuenta.

Si a cada leptón que interviene en una reacción le asignamos un número $+1$ y a cada una de sus antipartículas un número -1, la suma algebraica de los que intervienen en uno u otro miembro de la ecuación de la reacción, llamado *número leptónico* debe conservarse. Así por ejemplo, se ha observado la reacción

$$\bar{\nu} + {}_1H^1 \rightarrow {}_0n^1 + {}_{+1}e^0$$

en la que al antineutrino y al positón les corresponden números leptónicos -1 por ser *antileptones*.

También, si a cada barión asociamos el valor $+1$ y a las antipartículas respectivas el -1, la suma algebraica de los que reaccionen recibe el nombre de *número bariónico* y ha de ser igual al de los productos de reacción. Es decir, la reacción

$${}_1H^1 + {}_1H^1 \rightarrow {}_1H^1 + {}_0n^1 + \pi^+$$

es posible, pues el número bariónico es 2 en ambos miembros, pues π^+ no es barión; ni leptón, por lo que el número leptónico se conserva siendo 0.

Las partículas de igual nombre de la primera columna de la tabla 23.1 pueden considerarse como una sola partícula que puede tener cargas diversas. Así por ejemplo, podemos hablar del *nucleón* con carga nula o positiva en vez de considerar el neutrón y el protón, respectivamente. Análogamente, consideremos el hiperón Σ como una partícula que puede tener carga positiva, nula o negativa. En tal caso se dice que el nucleón es un doblete de carga y que el hiperón Σ es un triplete. La simetría que presentan las fuerzas intensas entre partículas elementales la expresa la Mecánica cuántica de manera semejante a como expresa los estados energéticos de los multipletes en Física Atómica a través del spin de los electrones. Es decir, introduce un nuevo número cuántico llamado *spin isotópico*, tal que a una partícula de spin isotópico I correspondan $2I + 1$ estados de carga. Así, por ejemplo, como al nucleón corresponden 2 estados de carga, $I = 1/2$. En las interacciones fuertes entre mesones y bariones se conserva el spin isotópico. En las interacciones electromagnéticas se

conservan sólo aproximadamente y en las débiles pueden encontrarse divergencias considerables respecto al principio de conservación.

En 1953, MURRAY GELL-MANN (n. 1929) descubre otra propiedad de las partículas, llamada *extrañeza*, que se conserva en las interacciones fuertes y electromagnéticas. La extrañeza se expresa por un número que se asigna a cada tipo de partícula de tal manera que en todas las reacciones conocidas (no en las desintegraciones), la extrañeza total sea la misma antes que después de la reacción. Asignada a cada partícula su extrañeza, la antipartícula correspondiente tiene una extrañeza de igual valor absoluto, pero de signo contrario. A los piones y nucleones corresponde una extrañeza 0, a los mesones K +1, a los hiperones Λ y Σ —1, al hiperón Ξ —2 y al hiperón Ω —3.

Este último resultaba imprescindible para una nueva teoría debida a GELL-MANN y NE'EMAN en la que se agrupan mesones y bariones en multipletes de 1, 8, 10 ó 27 partículas, pues debía figurar en el multiplete de 10. Hasta entonces no se había registrado ninguna partícula de extrañeza —3, pero en 1964 pudo detectarse su presencia en una cámara de burbuja a la que se lanzaban protones de 30 GeV. La reacción que se producía era

$$K^- + {}_1H^1 \rightarrow \Omega^- + K^0 + K^+$$

obsérvese la conservación de la extrañeza

$$-1 + 0 \rightarrow -3 + 1 + 1$$

el —1 del primer miembro se debe a que K^- es la antipartícula de K^+. Las medidas efectuadas indicaron que la masa de Ω^- era 3300 veces mayor que la del electrón. Su spin isotópico es nulo.

A medida que progresa la técnica de las energías elevadas, se van produciendo nuevas reacciones y descubriendo nuevas partículas que es preciso clasificar y de las que va obteniéndose información. Todo ello servirá, algún día, para edificar una teoría que permita interpretar todos los fenómenos observados y hacer predicciones que luego verifique la experiencia. El campo a explorar es vastísimo.

CAJA DE AHORROS DE ALICANTE Y MURCIA
BIBLIOTECA GABRIEL MIRÓ
ALICANTE

24

Teoría de la relatividad restringida

La Física de finales del siglo pasado, de tendencia claramente mecanicista,* consideraba que los procesos físicos tienen lugar en el espacio y en el tiempo, quedando establecidas en la Mecánica clásica las propiedades de uno y otro. Las propiedades del espacio se reducían a:

1) Equivalencia en todas direcciones (el espacio es isótropo).
2) Equivalencia en todos sus puntos (el espacio es homogéneo).
3) Su carácter euclídeo.

Por lo que se refiere al tiempo, la Mecánica clásica aceptaba un tiempo universal único, el cual transcurre uniformemente y de igual manera cualquiera que sea el estado de movimiento de los cuerpos.

La idea mecanicista de los científicos de la época les llevó a considerar que las ondas luminosas necesitaban un sustrato material que «ondulase», al cual llamaron *éter* (v. § 13.1, p. 274). El éter nunca pudo ponerse de manifiesto experimentalmente y sus propiedades debían ser contradictorias (densidad prácticamente nula y rigidez parecida a la del acero para que se puedan propagar por él las ondas luminosas, que son transversales). De los experimentos de Bradley (§ 13.3, p. 277), acerca de la aberración de la luz, se desprendía que el éter debía ser estacionario, con lo que al moverse la Tierra alrededor del Sol tiene que atravesar el éter y crear algo parecido a un «viento», por la misma razón que un motorista, en un día de calma, siente un «viento» atmosférico.

De la teoría de Maxwell se desprende que la velocidad de la luz en el vacío es una constante universal y se planteó la cuestión de respecto a qué sistema de referencia se mide la velocidad de la luz. La teoría Electrodinámica clásica de Maxwell-Lorentz daba la res-

* Decía LORD KELVIN: «Para entender algo, hay que poder construir un modelo mecánico de ello».

puesta siguiente: *respecto al medio hipotético* éter, *que se encuentra en reposo, es homogéneo, isótropo y llena todo el espacio.*

LORENTZ aceptaba la existencia de un sistema de referencia *absoluto* o privilegiado. Movimiento significaba desplazarse en el tiempo respecto al éter; y la velocidad de un móvil respecto al éter era su velocidad absoluta. El problema fundamental del Electromagnetismo de finales del siglo pasado era determinar experimentalmente una velocidad absoluta y obtener pruebas directas de la existencia del éter.

Ya hemos indicado que del experimento de Bradley se deducía que el éter debía ser estacionario. Ahora bien, del experimento de Michelson-Morley, que veremos más adelante, se concluía que el éter debía moverse con la Tierra. Esta contradicción ya obliga a revisar la teoría, hasta entonces aceptada, del éter y del movimiento absoluto, pues una teoría mantiene su vigencia hasta que los hechos obligan a abandonarla y crear otra nueva, la cual debe abarcar los hechos explicados por la antigua y los nuevos que estaban al margen de la anterior. Éste es el caso de la Mecánica newtoniana. El gran científico POINCARÉ decía que *el marco de la Física clásica no se había roto; por ser elástico, simplemente, se había ensanchado para dar cabida a las nuevas ideas.* Según veremos, la nueva Mecánica se reduce a la clásica cuando las velocidades sean pequeñas frente a la de la luz y como su desarrollo exige abandonar los conceptos de espacio y tiempo absolutos, todas las leyes de la Física deberán formularse en forma adecuada, tal como se recoge en la teoría de la Relatividad de Einstein.

24.1. Relatividad galileana y Electrodinámica. Vamos a efectuar un estudio comparativo de los fenómenos físicos tal como aparecen a dos observadores O y O' en movimiento rectilíneo y uniforme uno respecto a otro. Introduzcamos dos sistemas de referencia, S de coordenadas x, y, z para el observador O y S' de coordenadas x', y', z' para el observador O' y supongamos que son inerciales (§ 7.3, tomo I). En el caso de dos sistemas de referencia inerciales, el origen de coordenadas de uno debe estar en movimiento rectilíneo y uniforme respecto al otro y los ángulos que forman entre sí los ejes de coordenadas deben mantenerse inalterados en el transcurso del movimiento.

El sistema de Copérnico al que nos demos referido en el § 7.3 del tomo I, parece suficientemente adecuado para que en él se consideren válidas las leyes de Newton *a fines prácticos.* Pero para los científicos a quienes interesa la naturaleza de las cosas y que bus-

can la Verdad, la incertidumbre acerca del sistema de referencia representa un fallo de la estructura lógica de la Física clásica. Resulta asombroso que esta cuestión, aparentemente secundaria, condujera al descubrimiento de cómo liberar la energía del núcleo atómico.

Si los sistemas de ejes son cartesianos rectangulares, las relaciones entre las coordenadas y el tiempo deberán ser, en los dos sistemas, funciones lineales, es decir, debe cumplirse

$$\begin{aligned} x'_i &= \textstyle\sum_j c_{ij} x_j + v_i t + d \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \\ t' &= t + t_0 \end{aligned} \tag{24.1}$$

siendo

$$x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv y, \quad x_3 \equiv z;$$
$$x'_1 \equiv x', \quad x'_2 \equiv y', \quad x'_3 \equiv z'$$
$$v_1 \equiv v_x, \quad v_2 \equiv v_y, \quad v_3 \equiv v_z$$

Las ecuaciones (24.1) constituyen la llamada *transformación de Galileo.*

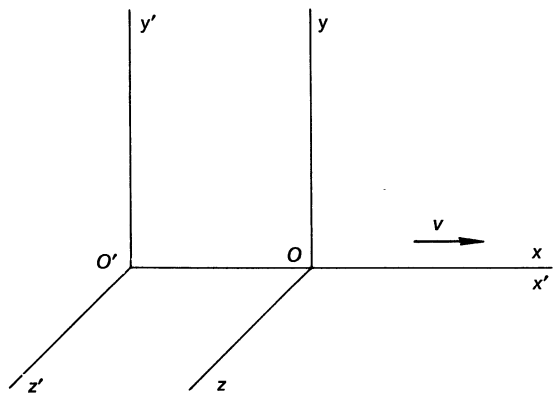


FIG. 24.1

Si tomamos el mismo origen de tiempo y los ejes del sistema S se mantienen paralelos a los correspondientes en el sistema S', las

ecuaciones (24.1) se reducen a

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} + \mathbf{v}t \\ t' &= t \end{aligned} \tag{24.2}$$

Si, además, consideramos que los ejes Ox y $O'x'$ coinciden siempre en el movimiento y que inicialmente coincidían Oy con $O'y'$ y Oz con $O'z'$, las ecuaciones (24.2) se escribirán

$$\begin{aligned} x' &= x + vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{24.3}$$

Derivando las ecuaciones (24.3) dos veces respecto a t (o a t') hallamos $\ddot{x}' = \ddot{x}$, lo que nos dice que la aceleración de un punto referido al sistema S o al S' es la misma. Si la masa del punto es m, será la misma en cada sistema S o S' y por tanto, se cumplirá $F' = m'a' = F = ma$. Es decir, las leyes a las cuales están sometidas las experiencias de Mecánica hechas por el observador en el sistema S son las mismas que las que rigen las experiencias hechas por el observador en S'. Es imposible, mediante experimentos mecánicos realizados en el sistema S', poner de manifiesto su movimiento de traslación rectilíneo y uniforme. Todos los sistemas inerciales son equivalentes. En esto consiste el *principio de relatividad de Galileo.*

Todo lo dicho se refiere a experiencias mecánicas. En Electrodinámica surgen dificultades. Admitamos que los experimentos electrodinámicos efectuados en el sistema S se rigen por las ecuaciones de Maxwell y supongamos que el observador en el sistema S' efectúa experimentos electrodinámicos ignorando el movimiento de su sistema. Sea el punto $M(x, y, z)$ referido a S y $M'(x', y', z')$ al S'. En el instante t existen los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ para S y $\mathbf{E}'$ y $\mathbf{B}'$ para S'. Desde el punto de vista clásico, admitimos que estos campos son los mismos para los dos observadores:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}'$$

Las relaciones a las que deben satisfacer los campos $\mathbf{E}'$ y $\mathbf{B}'$ observados en el sistema S' se obtienen sustituyendo en las ecuaciones de Maxwell las variables x, y, z, t por las x', y', z', t' definidas por (24.3) y los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ por $\mathbf{E}'$ y $\mathbf{B}'$. Las derivadas parciales respecto a las coordenadas espaciales son iguales en ambos sistemas, cosa que

no sucede con las derivadas respecto al tiempo con lo que las ecuaciones de Maxwell y por tanto las leyes del Electromagnetismo, no son las mismas para el observador O que para el O'.

24.2. Consecuencias y experimentos fundamentales de comprobación. Como el principio de relatividad de Galileo es aplicable a las leyes de la Mecánica pero no a la Electrodinámica, nos vemos obligados a elegir entre las alternativas siguientes:

a) *Existe un principio de relatividad para la Mecánica, pero no para la Electrodinámica. En Electrodinámica existe un sistema de referencia privilegiado.*

b) *Existe un principio de relatividad para la Mecánica y la Electrodinámica, pero ésta no es correcta en su formulación maxwelliana.*

c) *Existe un principio de relatividad para la Mecánica y la Electrodinámica pero las leyes de la Mecánica, en su forma newtoniana, necesitan modificación.*

La elección entre estas alternativas sólo puede hacerse a partir de resultados experimentales. Experimentos notables indican que la alternativa c) (en la forma que veremos más adelante) es la correcta y la teoría que para ello se formula se denomina *Relatividad restringida.*

Los experimentos fundamentales para elegir una de las tres alternativas anteriores caen dentro de tres tipos principales:

1. *Intentar localizar un sistema inercial preferente para las leyes de la Electrodinámica.*
2. *Intentar obtener desviaciones respecto a las leyes de la Electrodinámica clásica.*
3. *Intentar observar desviaciones respecto a la Mecánica clásica.*

Para tener en cuenta el tipo 1 vamos a analizar el concepto de sistema inercial preferente o «referencia absoluta». Admitiendo las leyes de la Cinemática clásica y las de la Electrodinámica, vamos a tener en cuenta la ley de composición de velocidades de la Cinemática y vamos a aplicarla a la luz (onda electromagnética). Sea una señal luminosa que se propaga por el vacío en la dirección del eje x. Para el observador O se propaga con celeridad c y para el observador O' lo hace con celeridad $c \mp v$, según se propague en el sentido positivo del eje x (signo de diferencia) o en el opuesto (signo de adición). Por ello, si para el observador O la luz se propaga con la misma celeridad en todos los sentidos, para el observador O' no suce-

derá así. Recíprocamente, si para O la propagación se realiza con celeridad c' en el sentido positivo y con c'' en el negativo, bastará que la celeridad de O' sea $\frac{1}{2}(c'-c'')$ para que la luz se propague con igual celeridad en los dos sentidos:

$$\text{hacia la derecha} \quad c' - \frac{1}{2}(c'-c'') = \frac{1}{2}(c' + c'')$$

$$\text{hacia la izquierda} \quad c'' + \frac{1}{2}(c'-c'') = \frac{1}{2}(c' + c'')$$

Extendiendo el razonamiento a los otros dos ejes, se llega a la conclusión que: «*Admitiendo la Cinemática clásica, debe existir un sistema de referencia y sólo uno, con respecto al cual la luz de un manantial dado se propague en el vacío con igual celeridad en todas direcciones*». A un tal sistema le llamaremos *ópticamente isótropo*. Podría suponerse que, para cada foco luminoso, fuese ópticamente isótropo el sistema de referencia en el cual estuviese en reposo dicho foco, como sucedería si la luz estuviera constituida por proyectiles lanzados desde él. Tal hipótesis está en contradicción con la experiencia.

Podemos considerar probado experimentalmente que la velocidad de la luz, respecto a un sistema dado, es independiente de la velocidad del foco emisor: a partir de las observaciones del astrónomo holandés DE SITTER de las estrellas dobles, se llegó a la conclusión de que la celeridad de la luz no puede depender de la del foco emisor. El teórico de la Electrodinámica H. A. LORENTZ indica que *las experiencias electrodinámicas conducen necesariamente a una teoría electromagnética que tiene como consecuencia inevitable la constancia de la celeridad de la luz en el vacío*. Por tanto, un sistema de referencia ópticamente isótropo debe serlo para luz de cualquier origen. Tal sistema sería físicamente privilegiado respecto a todos los demás sistemas de referencia y por ello se le da el nombre de «referencia absoluta».

Ahora bien, si existiera dicho sistema, se podría detectar el movimiento de la Tierra respecto a él mediante experimentos efectuados desde la propia Tierra y para ello se idearon algunos experimentos, de entre los cuales destacamos el de Trouton y Noble por un lado y el de Michelson y Morley por otro.

TROUTON y NOBLE * consideraron que si dos cargas separadas una cierta distancia se mueven con la misma velocidad **v**, deberán aparecer efectos magnéticos además de los electrostáticos. Sin embargo, no apareció ningún efecto.

El otro experimento, el efectuado por MICHELSON en 1879 y el experimento de Michelson-Morley, repetido numerosas veces entre 1880 y 1930, va encaminado a determinar, mediante experimentos ópticos terrestres, si la velocidad de la luz relativa a la Tierra es o no igual en todas direcciones. Dicho experimento consiste en lo siguiente:

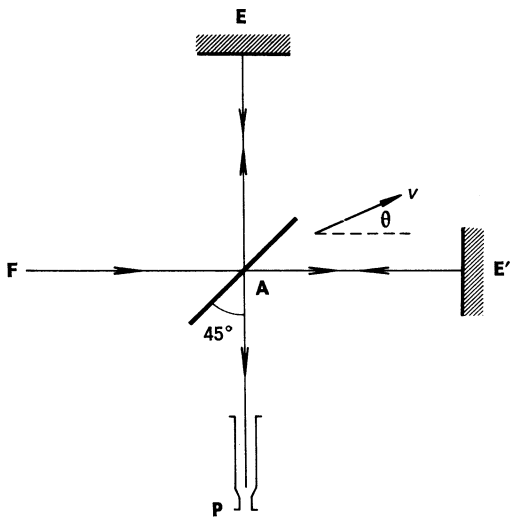


FIG. 24.2 Versión simplificada de la fig. 17.10.

Un rayo luminoso parte de F en dirección FA y encuentra una lámina de vidrio semiplateada que forma un ángulo de 45° con la dirección FA. Parte del rayo la atraviesa y parte se refleja. Los dos rayos AE y AE' en los que se divide FA se reflejan en los espejos E y E' y vuelven a la lámina donde cada uno de ellos se vuelve a dividir en dos rayos. Solamente nos interesan los dos rayos que se superponen en la dirección AP (uno de los cuales ha efectuado el recorrido $FAEAP$ y el otro $FAE'AP$). Los fenómenos de interferencia a que dan lugar (observables en P en forma de franjas) permiten determinar la diferencia de los tiempos empleados por la luz en recorrer los dos trayectos AEA y $AE'A$.

* TROUTON y NOBLE, *Phil. Trans. Roy. Soc.* A, **202**, 165 (1903).

Supongamos que la Tierra se mueva respecto al sistema de referencia absoluto y sea **v** la componente de su velocidad según el plano $FEE'P$ del aparato y θ el ángulo que forma **v** con AE'. La velocidad de la luz relativa al aparato en el trayecto AE' sería $c-v\cos\theta$ y en el trayecto $E'A$ sería $c+v\cos\theta$. Haciendo $AE'=l$, el tiempo t_1 empleado por la luz en recorrer el trayecto $AE'+E'A$ sería

$$t_1=\frac{l}{c-v\cos\theta}+\frac{l}{c+v\cos\theta}=$$

$$=\frac{l}{c}\left(\frac{1}{1-\beta\cos\theta}+\frac{1}{1+\beta\cos\theta}\right)$$

donde $\beta=v/c$. Efectuando operaciones

$$t_1=\frac{2\,l}{c}\;\frac{1}{1-\beta^2\cos^2\theta}$$

Como β es muy pequeña (del orden de 10^{-4}), podemos desarrollar en serie y despreciar las potencias de grado superior a 3, con lo que tendremos

$$t_1=\frac{2\,l}{c}\,(1+\beta^2\cos^2\theta)$$

Análogamente podemos calcular el tiempo t_2 que emplea el otro rayo en el trayecto AEA y resulta

$$t_2=\frac{2\,l}{c}\,(1+\beta^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta)$$

La diferencia de tiempos será

$$\Delta t=t_2-t_1=-\frac{2\,l}{c}\,\beta^2\cos 2\theta \qquad (24.4)$$

Si ahora se hace girar todo el aparato alrededor de A, al variar θ varía Δt y se desplazan las franjas de interferencia. Del valor de dicho desplazamiento se deduce β y de ésta v. Ahora bien, la experiencia realizada repetidamente con gran precisión, a distintas horas

y con distintas orientaciones del aparato ha dado siempre el mismo resultado: $v = 0$, dentro de los límites de error experimental (que en ciertos casos no superaba los 0,3 km/s).

El resultado del experimento de Michelson-Morley y del de Trouton y Noble indican que los fenómenos electromagnéticos no se ven afectados por el movimiento de la Tierra respecto al eventual sistema de referencia absoluto. Puede considerarse comprobado experimentalmente que el sistema de referencia ligado a la Tierra es ópticamente isótropo. Ahora bien, si se admiten los postulados de la Mecánica clásica (de los cuales se desprende la unicidad del sistema ópticamente isótropo), debe concluirse que el experimento de Michelson y otros confieren a la Tierra una posición privilegiada en el Universo, cosa sorprendente desde el punto de vista de Copérnico. Además, si se admite que el único sistema ópticamente isótropo sea el ligado a la Tierra, se hace inexplicable el fenómeno de la aberración de las estrellas utilizado por BRADLEY para la medida de la celeridad de la luz. Resumiendo:

La unicidad del sistema ópticamente isótropo, reclamada por la Cinemática clásica, acarrea consecuencias incompatibles con hechos experimentales y no es satisfactoria desde el punto de vista especulativo.

Modernamente, JASEVA, JAVAN, MURRAY y TOWNES* han efectuado un experimento, equivalente al de Michelson-Morley, pero con dos laser. Admitiendo la existencia del «viento del éter», citada en la introducción, deberían haber hallado determinada variación de frecuencia. La variación hallada experimentalmente era inferior a un 1/1000 de la esperada. Esta comprobación es la más sensible efectuada hasta la fecha acerca de la isotropía del espacio respecto a c.

De los experimentos citados y de otros efectuados hasta la fecha, se deduce lo siguiente:

1. *La existencia de un* éter *a la vez estacionario y arrastrado es inaceptable e indemostrables sus propiedades específicas.*
2. *Las modificaciones de las leyes de la Electrodinámica son insostenibles.*

Es, pues, plausible concluir que las leyes básicas de la Mecánica necesitan modificación. Esto representa la aceptación de la alternativa c) de la página 512, tal como habíamos anticipado.

24.3. Principio de relatividad de Einstein. En 1905, ALBERT EINSTEIN, a los 26 años, estaba empleado en la Oficina Suiza de Pa-

* JASEVA, T. S., JAVAN, A., MURRAY, J. y TOWNES, C. H., *Physical Review*, 133 A, 1221 (1964).

tentes de Berna. En dicho año publicó en la revista alemana *Annalen der Physik* unos trabajos que cambiaron la faz de la Ciencia. Dichos trabajos eran tres y todos de gran categoría científica. El primero dedicado al *movimiento browniano*. El segundo al *efecto fotoeléctrico* (por el cual recibió el Premio Nobel en 1921) y el tercero, el que ahora nos interesa, se titulaba «Acerca de la Electrodinámica de los cuerpos en movimiento». En este artículo de treinta páginas, carente de citas bibliográficas y referencias (lo que lo hace distinto de los demás artículos) expresó las líneas generales de la Teoría de la Relatividad Restringida, así llamada porque en ella se estudian transformaciones entre sistemas inerciales. La Relatividad Generalizada considera el caso en que los sistemas estén acelerados uno respecto a otro.

Los postulados propuestos por EINSTEIN, compatibles con los hechos experimentales, fueron:

1. *Las leyes de la Electrodinámica (incluida la propagación de la luz en el vacío), al igual que las de la Mecánica, son las mismas en todos los sistemas inerciales.*
2. *Es imposible idear un experimento que defina un estado de movimiento absoluto o determinar por cualquier fenómeno físico un sistema inercial preferente que tenga propiedades especiales.*

A partir de estos postulados se expresa el Principio de Relatividad Restringida:

Las leyes de todo fenómeno físico son las mismas en los distintos sistemas inerciales.

En estos sistemas, la celeridad de la luz en el vacío c *es una constante universal.*

Si las leyes físicas están de acuerdo con estos postulados, todos los experimentos citados anteriormente tienen explicación.

EINSTEIN enunció sus postulados tras analizar los conceptos de *espacio* y de *tiempo*, así como algunos ingeniosos experimentos ideales. Su punto de partida fue la validez universal de las ecuaciones de Maxwell. Fue, precisamente, estudiando las propiedades de transformación de las ecuaciones de Maxwell cuando descubrió LORENTZ la transformación que hace invariantes a dichas ecuaciones, transformación que lleva su nombre y que veremos en breve.

24.4. Constancia de la celeridad de la luz en el vacío. Cuando EINSTEIN propuso el postulado de la constancia de c no existía prueba directa experimental del mismo. Lo postuló exclusivamente por necesidad lógica.

Podemos considerar que la verificación experimental de este postulado consiste en medir la celeridad de la luz emitida por un foco luminoso en movimiento rápido. Si la celeridad medida es independiente de la del foco, queda comprobada la validez. Como la comprobación directa es muy complicada, se ha buscado otra lo más directa posible. Tendremos en cuenta tres tipos de pruebas:

1. Observación de estrellas dobles, propuesta originalmente por DE SITTER*.
2. Medida de la celeridad de la radiación que resulta de la destrucción de positones a gran velocidad**.
3. Medida de la celeridad de los fotones emitidos en la desintegración de mesones pi neutros (π^0) en movimiento rápido ***.

El primer tipo de experimento se basa en la medida de la velocidad de acercamiento o de alejamiento de una estrella binaria ****. En ella no se observa la distorsión que sería de esperar si la luz tuviera una celeridad dependiente del acercamiento o alejamiento de la fuente, lo cual nos indica que tal celeridad no depende de la fuente.

El segundo tipo de experimento, el de la destrucción de positones en movimiento rápido, consiste en lo siguiente: Hoy día pueden producirse positones, en los grandes aceleradores de partículas, cuya celeridad es una fracción grande de la celeridad de la luz. Dichos positones, al chocar con electrones se aniquilan produciendo fotones, dos por cada choque, que pueden marchar en sentidos opuestos. Si la celeridad de los fotones dependiese de la de la fuente, el que se mueve en el sentido de marcha del positón lo haría con celeridad mayor que el que lo hace en sentido opuesto. Colocando dos detectores a la misma distancia del lugar del choque, uno recibiría el fotón antes que el otro. Efectuado el experimento, no se observó diferencia alguna en el tiempo de recepción; lo que indica que la celeridad es la misma para los dos fotones y es independiente de la celeridad de la fuente.

El tercer experimento es el más próximo a la prueba directa. Los piones neutros (π^0) se producen en gran número mediante aceleradores de muy alta energía. Estos mesones solamente viven unos 10^{-16} s y se desintegran luego en dos fotones. En el experimento, se medía la celeridad de los fotones emitidos en el mismo sentido de movimiento que los mesones (que se movían a 0,9998 c), determinan-

* DE SITTER, *Proc. Amsterdam Acad.*, **16**, 395 (1913).

** SADEH, *Phys. Rev. Letters*, **10**, 271 (1963).

*** ALVAGER, FARLEY, KJELLMAN y WALLIN, *Phys. Rev. Letters*, **12**, 260 (1964).

**** JOY, A. H. y SANFORD, R. F., *Astrophys. J.*, **64**, 250 (1926).

do el tiempo que empleaban en recorrer 31 m. El valor hallado fue $v = (2{,}9977 \pm 0{,}0004) \times 10^8$ m/s, valor muy próximo al aceptado para c, $c = 2{,}9979 \times 10^8$ m/s, medido con la fuente en reposo. Este experimento parece decisivo. Sin embargo, la comprobación experimental de los postulados de la Relatividad no descansa solamente en las pruebas directas, como las indicadas, tanto como en la comprobación de las consecuencias que se indicarán más adelante.

El hecho de que la luz tenga una celeridad independiente de la fuente, hace que tenga el mismo valor en todos los sistemas inerciales. En cierto modo, esto equivale a decir que el medio en el cual se propaga la onda se halla en reposo respecto de cualquier sistema de referencia inercial. El éter ya no representa papel alguno en la propagación de la luz y no existe razón alguna para suponer su existencia.

24.5. Simultaneidad. Para construir una Física coherente, basada en los principios de Einstein, debemos revisar los conceptos fundamentales de *espacio* y de *tiempo*. Estos conceptos básicos e intuitivos no se habían definido en la Física hasta entonces. Se les consideraba demasiado evidentes para que necesitaran un análisis crítico. Sin embargo, al intentar definirlos nos encontramos con dificultades imprevistas que sólo se pueden resolver con la teoría de la Relatividad.

Consideremos un sistema de coordenadas en el cual sean válidas las ecuaciones de la Mecánica newtoniana, al cual llamaremos «sistema estacionario». Un punto material que se halle en reposo respecto a este sistema tendrá definida su posición respecto al mismo mediante coordenadas cartesianas. Para medir longitudes, utilizaremos reglas rígidas y los métodos de la Geometría euclídea.

Si el punto se *mueve*, deberemos especificar sus coordenadas en función del «tiempo». Pero, ¿qué entendemos por *tiempo*? En el artículo de EINSTEIN *Acerca de la Electrodinámica de los cuerpos en movimiento*, en la parte I, definición de simultaneidad, dice:

Hay que tener en cuenta que todos aquellos juicios en los que interviene el tiempo son siempre juicios referentes a SUCESOS SIMULTÁNEOS. Por ejemplo, si digo «Este tren llega a las 7», lo que intento decir es algo así como: «la posición de la manecilla pequeña de mi reloj en las 7 y la llegada del tren son sucesos SIMULTÁNEOS».

Éste es un caso extraordinariamente simple de sucesos simultáneos (coincidencia de la aguja del reloj con el número 7 y llegada del tren) que ocurren en recíproca vecindad. Pero, ¿qué significa

afirmar que son simultáneos dos sucesos que ocurren en Barcelona y en Buenos Aires? La respuesta inmediata es que son simultáneos si dos relojes, uno en Barcelona y otro en Buenos Aires, nos demuestran que lo son. Evidentemente, los relojes deben ser iguales y «perfectos» pero, además, deben estar *sincronizados*. Dada la velocidad finita de las ondas electromagnéticas, la sincronización perfecta de relojes alejados tiene sus problemas. Sin embargo, podemos imaginar un experimento simple para averiguar si dichos relojes están sincronizados. Supongamos un punto equidistante de los dos relojes y que en este punto se capten las señales de televisión emitidas por la ciudad considerada donde tenemos el reloj (en el estudio de TV). Si en la pantalla aparecen cada uno de los relojes marcando en todo momento la misma hora, teniendo en cuenta la diferencia de horario oficial, los relojes están sincronizados. De esta manera podemos situar relojes sincronizados en todo el mundo. Cada par de estos relojes nos dará imágenes iguales de los mismos, por TV, en el punto medio entre ellos (comprobación de la sincronización).

Con estas estipulaciones podemos juzgar si dos acontecimientos que ocurren en dos sitios diferentes son, o no, simultáneos. En realidad, todo lo dicho hasta aquí es igualmente cierto en la Mecánica clásica que en la Mecánica relativista. La divergencia entre estas teorías surge al considerar la simultaneidad de acontecimientos que tienen lugar en sistemas de referencia distintos. Desde el punto de vista clásico, dos hechos simultáneos en un sistema son simultáneos en otro sistema que se mueva con velocidad constante respecto al primero. Los clásicos, siguiendo a Newton, consideran el tiempo absoluto, el cual no varía de un sistema a otro; transcurre uniformemente para todos los observadores. Cualquier reloj, al ponerse en movimiento, no debería modificar su ritmo. El físico relativista podría preguntar al clásico: ¿Cómo se sabe que un reloj no cambia de ritmo en su movimiento? El relativista considera que sí cambia el ritmo, que no hay tiempo absoluto y que dos hechos simultáneos en un sistema no lo son en otro. Si en un sistema S se fija la posición de un punto por las coordenadas x, y, z y el tiempo por t, en otro sistema S' la posición se fijará por x', y', z' y el tiempo por t'. Nuestro objetivo es determinar las relaciones analíticas existentes entre (x, y, z, t) y (x', y', z', t') desde el punto de vista de los postulados de la Relatividad restringida, para los sistemas S y S' citados. Si un punto material, no sometido a fuerzas, se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme para el observador en S, para el observador en S' también deberá ser rectilíneo y uniforme el movimiento de dicho punto; así cumple el principio de relatividad. Esto sólo es

posible si x', y', z', t' son funciones lineales de x, y, z, t. Además, si los dos orígenes O y O' coincidían en el instante inicial ($x = y = z = t = 0$ y también $x' = y' = z' = t' = 0$), las citadas relaciones lineales deben ser homogéneas. Estas relaciones lineales y homogéneas constituyen la llamada *transformación de Lorentz.*

24.6. Transformación de Lorentz. De los postulados de la Relatividad se deduce que las componentes de todos los vectores o ten-

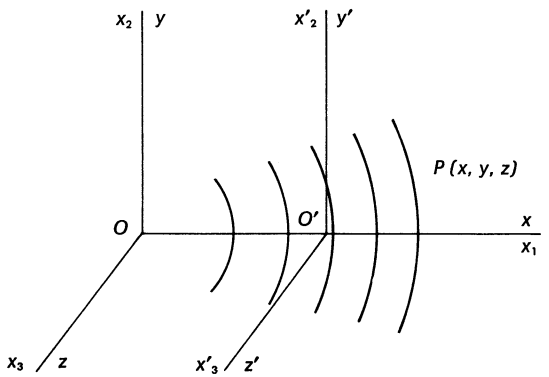


FIG. 24.3

sores que intervienen en la ecuación de una ley física deben transformarse de la misma manera, o sea, han de ser *covariantes* al pasar de un sistema a otro y además, la celeridad de la luz en el vacío ha de ser una constante universal c independiente del sistema de referencia.

Partiendo de esto, consideremos (fig. 24.3) un sistema $S(x, y, z)$. En el instante $t = 0$ se emite una onda esférica (por ejemplo, un destello) en el origen O del sistema. Un observador situado en O se cree en el centro de la onda y, en el instante t, la ecuación de la superficie de onda será

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \tag{24.5}$$

El sistema S', de origen O' que coincide con O en el instante inicial, se mueve con velocidad constante respecto a S. Supondremos coincidentes en el movimiento los ejes Ox y $O'x'$ y paralelos los ejes ho-

mólogos Oy y $O'y'$ así como Oz y $O'z'$. La velocidad relativa tendrá la dirección Ox y la representaremos por v.

Un observador situado en O' también se cree en el centro de la onda esférica, ya que para él también es c la celeridad de propagación de la luz (principio de relatividad restringida) y la ecuación de la superficie de onda será, para O',

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 \tag{24.6}$$

siendo t' el tiempo medido en S' por un observador solidario a S' (p. e. el O') utilizando instrumentos de S'. La relación analítica entre (x, y, z, t) y (x', y', z', t') debe ser lineal y homogénea (según indicábamos al final de § 24.5) y además debe dejar invariante la forma cuadrática (24.5), pues los dos observadores O y O' se sienten en el centro de la superficie esférica.

Para hallar dicha relación, vamos a trabajar en un espacio de cuatro dimensiones, llamado *espacio de Minkowski*. En él

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3, \quad ict = x_4$$

donde i es la unidad imaginaria.

El vector de posición de un punto $P(x_k)$, $(k = 1, 2, 3, 4)$ tiene por componentes x_k y el cuadrado de su módulo $|P-O|^2$ es

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \tag{24.7}$$

El postulado concerniente a la constancia de c se satisface por el grupo de transformaciones que deja invariante esta longitud. Igual se demuestra en el caso de vectores tridimensionales, y se extiende a los cuadrivectores, que la suma de los cuadrados de las componentes es un invariante para una transformación ortonormal, luego *la expresión (24.5) es invariante para el grupo de rotaciones en el espacio de Minkowski* y deducimos que las transformaciones que permiten pasar de las coordenadas de un suceso en S a las coordenadas del mismo en S' son de la forma

$$x'_j = \sum a_{jk}\, x_k \qquad (j = 1, 2, 3, 4) \tag{24.8}$$

y además, como los dos sistemas de referencia tienen el mismo sentido de rotación, el determinante de los coeficientes deberá ser:

$$|a_{jk}| = +1$$

Vamos a calcular los coficientes a_{jk}. Los cálculos se simplifican si suponemos que la rotación se aplica solamente a los ejes x_1 y x_4. La falta de generalidad que resulta de esta hipótesis no tiene consecuencia en el resultado. Por tanto, $x'_2 = x_2$, $x'_3 = x_3$. Con la hipótesis hecha, podemos escribir en forma matricial (24.8) de la manera siguiente:

$$\begin{Vmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Vmatrix} \tag{24.9}$$

o sea

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}\, x_1 + a_{14}\, x_4 \quad , \quad x'_2 = x_2 \\ x'_4 &= a_{41}\, x_1 + a_{44}\, x_4 \quad , \quad x'_3 = x_3 \end{aligned} \tag{24.10}$$

Las condiciones de ortonormalidad son:

$$\begin{aligned} a^2_{11} + a^2_{14} &= 1 \\ a^2_{41} + a^2_{44} &= 1 \\ a_{11}a_{14} + a_{41}a_{44} &= 0 \end{aligned} \tag{24.11}$$

Hagamos

$$a_{11} = \gamma \quad , \quad a_{14} = i\beta\gamma$$

De la primera de las ecuaciones (24.11) resulta

$$\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1 \quad \text{de donde} \quad \gamma = \pm\,(1-\beta^2)^{-1/2}$$

Ahora tenemos

$$\begin{aligned} a^2_{41} &= 1 - a^2_{44} \\ -i\beta\gamma^2 &= a_{41}a_{44} \end{aligned}$$

eliminando a_{41} entre estas ecuaciones hallamos

$$a_{44} = \pm\gamma$$

y sustituyendo este valor, obtenemos

$$a_{41} = \pm i\beta\gamma$$

Como el determinante de los coeficientes ha de valer $+1$, los dobles signos quedan determinados y obtenemos:

$$a_{11} = \gamma \quad , \quad a_{14} = i\beta\gamma \quad , \quad a_{41} = -i\beta\gamma \quad , \quad a_{44} = \gamma$$

Con esto, las expresiones (24.10) quedan en la forma

$$x'_1 = \gamma x_1 + i\beta\gamma x_4 \qquad x'_4 = -i\beta\gamma x_1 + \gamma x_4$$

como $x_4 = ict$, pasando a las coordenadas x, y, z, t, obtenemos:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ ict' &= -i\beta\gamma x + \gamma ict \end{aligned} \qquad \text{o sea} \qquad \begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \end{aligned} \tag{24.12}$$

Despejando x' y sustituyendo el valor de t en función de t', hallamos la transformación inversa:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + \beta ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right) \end{aligned} \tag{24.13}$$

Para hallar el significado del parámetro β (y con ello el de γ), consideremos un punto $P'(x', y', z')$ fijo en el sistema S' y móvil paralelamente a x con velocidad v respecto al sistema S. Entonces, $dx' = 0$ y $dx = v\,dt$ (pues el punto fijo en S' se mueve con velocidad v relativa a S). Diferenciando la primera de las ecuaciones (24.12), tenemos

$$dx' = \gamma(dx - \beta c\,dt) \quad \text{o sea} \quad 0 = dx - \beta c\,dt$$

de donde $dx/dt = c\beta$. Pero dx/dt es v, según lo dicho, luego

$$\beta = \frac{v}{c} \tag{24.14}$$

Las ecuaciones (24.12) se escribirán, pues, en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x-vt}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t-vx/c^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \end{aligned} \tag{24.15}$$

y las (24.13):

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + vx'/c^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \end{aligned} \tag{24.16}$$

El grupo de ecuaciones (24.15) y su inverso (24.16) reciben el nombre de *transformaciones de Lorentz*. Notemos que cuando v sea mucho menor que c, la transformación de Lorentz tiende a la de Galileo. Cuando podamos despreciar $(v/c)^2$ frente a la unidad, vemos que la primera de las ecuaciones (24.15) se convierte en la primera de las (24.3), pues en el caso actual se considera una v de sentido opuesto al considerado en § 24.1. Esto significa que la teoría de la Relatividad no desecha las transformaciones de Galileo por incorrectas, sino que las incluye en las leyes correspondientes a la transformación de Lorentz como caso particular ($v \ll c$).

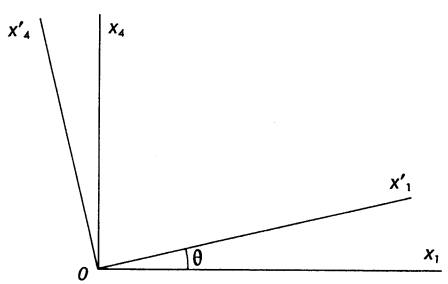


FIG. 24.4

24.7. Interpretación geométrica de la transformación de Lorentz. Podemos interpretar geométricamente las transformaciones de Lorentz y también el coeficiente β. Como en la rotación no intervienen ni el eje x_2 ni el x_3, es como si trabajásemos en el «plano» x_1x_4. Cuando los ejes giren un ángulo θ quedarán en la posición $x'_1x'_4$, según se indica en la figura 24.4.

Según las ecuaciones (24.10), tenemos

$$x'_1 = a_{11}\,x_1 + a_{14}\,x_4 \qquad x'_4 = a_{41}\,x_1 + a_{44}\,x_4 \tag{24.17}$$

pero

$$a_{11} = \cos\,(x'_1x_1) = \cos\,\theta \qquad a_{14} = \cos\,(x'_1x_4) = \operatorname{sen}\,\theta$$
$$a_{41} = \cos\,(x'_4x_1) = -\operatorname{sen}\,\theta \qquad a_{44} = \cos\,(x'_4x_4) = \cos\,\theta$$

con lo que las ecuaciones (24.17) se convierten en

$$x'_1 = x_1\,\cos\,\theta + x_4\,\operatorname{sen}\,\theta$$
$$x'_4 = -x_1\,\operatorname{sen}\,\theta + x_4\,\cos\,\theta$$

Tomando $\theta = i\varphi$ y poniendo $x_1 = x$, $x_4 = ict$, $x'_1 = x'$, $x'_4 = ict'$ podemos escribir

$$x' = x\,\cos\,i\varphi + ict\,\operatorname{sen}\,i\varphi$$
$$ict' = -x\,\operatorname{sen}\,i\varphi + ict\,\cos\,i\varphi$$

Ahora bien, $\operatorname{sen}\,i\varphi = i\,\operatorname{senh}\,\varphi$ y $\cos\,i\varphi = \cosh\,\varphi$, luego

$$x' = x\,\cosh\,\varphi - ct\,\operatorname{senh}\,\varphi$$
$$t' = t\,\cosh\,\varphi - x\,(\operatorname{senh}\,\varphi)/c$$

y comparando con las ecuaciones (24.12) vemos que

$$\cosh\,\varphi = \gamma \qquad \operatorname{senh}\,\varphi = \gamma\beta$$

y la transformación de Lorentz es una rotación de los ejes un ángulo $\theta = i\varphi$, tal que $\operatorname{th}\,\varphi = \beta$ o $\operatorname{tg}\,\theta = i\beta$.

Esta rotación es equivalente a la traslación del sistema S' a lo largo del eje x *con velocidad* v *(paralela al eje* x*) respecto al sistema S.*

24.8. Línea de universo y diagrama de Minkowski. La representación de la transformación de Lorentz por una rotación en el espacio de Minkowski es un concepto útil pero artificial, desde el punto de vista físico, dado el carácter imaginario de x_4. Algunos autores toman $x_4 = ct$ y las otras coordenadas igual que hemos hecho. El mantener $x'_2 = x_2$ y $x'_3 = x_3$ nos permite una representación plana. Un suceso que tenga lugar en un punto P de abscisa x en el instante t, viene representado por el punto $P\,(x, t)$ en el plano x, t. Si el punto se mueve en el transcurso del tiempo, describe en nuestro diagrama espacio-temporal una trayectoria que recibe el nombre de *línea de universo* de dicho punto y al diagrama se le llama *diagrama de Minkowski*. Si el punto es fijo, la línea de universo es paralela al eje t

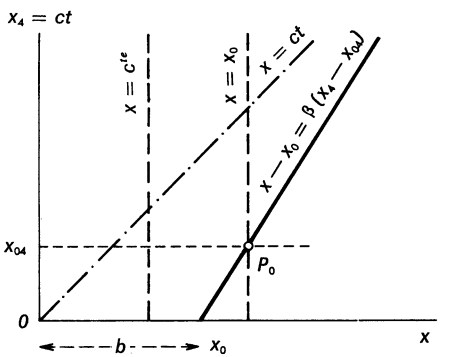


FIG. 24.5 Diagrama de Minkowski.

(o sea al $x_4 = ct$). Si se mueve a velocidad constante v a partir del punto $P_0\,(x_0, t_0)$ de la figura 24.5, la ecuación será

$$x - x_0 = v\,(t - t_0)$$

o sea

$$x = x_0 + vt - vt_0 = x_0 + \frac{v}{c}ct - \frac{v}{c}ct_0 = \beta x_4 + x_0 - \beta x_{04}$$

que representa una recta de pendiente $m = \beta$ y «ordenada» en el origen $b = x_0 - \beta x_{04}$.*

* Se supone el espacio en ordenadas y el tiempo en abscisas.

Un rayo luminoso en el vacío, para el cual $v = c$, que se emite en O en el instante $t = 0$, tiene por ecuación $x = ct = x_4$ (bisectriz del primer cuadrante). Éste es el caso particular de la ecuación anterior cuando $x_0 = 0$, $m = \beta = 1$, $x_{04} = 0$. Si $v \ll c$, la ecuación anterior tiene $m \simeq 0$ y representa una recta prácticamente «horizontal» $x = x_0$.*

La transformación de Lorentz

$$x' = \gamma\,(x - vt) \quad , \quad t' = \gamma\,(t - x/c)$$

al hacer $x_4 = ct$ da:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma x - \gamma\beta x_4 \\ x'_4 &= -\gamma x + \gamma x_4 \end{aligned} \tag{24.18}$$

Las ecuaciones de la rotación de ejes (24.17), que serían

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\theta + x_4 \operatorname{sen}\theta \\ x'_4 &= -x \operatorname{sen}\theta + x_4 \cos\theta \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\theta + ct \operatorname{sen}\theta \\ ct' &= -x \operatorname{sen}\theta + ct \cos\theta \end{aligned}$$

comparadas con las ecuaciones (24-18) nos dan

$$\cos\theta = \gamma \quad , \quad \operatorname{sen}\theta = \gamma\beta$$

Ahora bien, el signo de sen θ en una de ellas está cambiado, lo que indica que la rotación es $+\theta$ para el eje x y $-\theta$ para el x_4 (fig. 24.6).

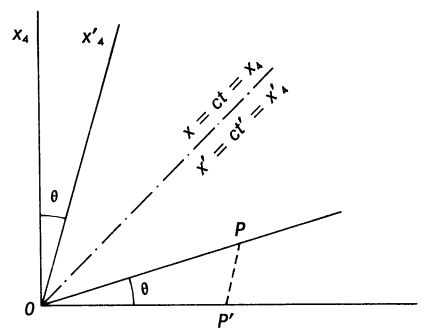


FIG. 24.6

* Se supone el espacio en ordenadas y el tiempo en abscisas.

En cambio, la línea de universo de un rayo luminoso no cambia. Basta hacer $x = x_4$ en (24.18) para ver que $x' = x'_4$.

Todos los sucesos localizados en el eje x' son simultáneos en la referencia S', pero no en S. Por tanto, un suceso en P' es simultáneo de uno en O para un observador en reposo en S' (para todos ellos es $t' = 0$). Para un observador en reposo en S, dichos sucesos no serían simultáneos. Para él, la x_4 de P' sería $PP' = ct$, luego $t = PP'/c$; o sea que ocurre al cabo de un tiempo $t = PP'/c$.

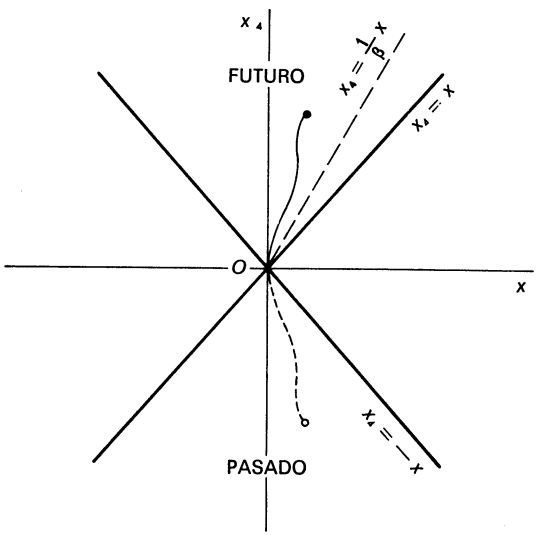


FIG. 24.7 Cono de luz.

Tomando x_4 por ordenada y x por abscisa en la ecuación de la recta que pasa por el punto (x_0, x_{04}) y se mueve con velocidad v, la ecuación es

$$x_4 = \frac{1}{\beta}(x - x_0) + x_{04}$$

Si el punto inicial es el origen $x_0 = 0$, $x_{04} = 0$, la ecuación es

$$x_4 = \frac{1}{\beta}x = \frac{c}{v}x$$

Si v fuese mayor que c, el valor de $\gamma = \sqrt{1-\beta^2}$ sería imaginario y, con él, las transformaciones de Lorentz. Por tanto, la recta $\beta = 1$ representa un límite para los sucesos físicos reales. Los puntos representativos deben estar dentro del cono $x_4 = \pm x$, llamado *cono de luz*. Al moverse el punto representativo de un suceso real, que esté inicialmente en O, su línea de universo debe ser interior al cono y no puede atravesarlo pues, si lo hiciera, v sería mayor que c. Al crecer el tiempo, la línea va hacia arriba; por esto al cono superior se le da el nombre de *futuro*. Si fuese un suceso ocurrido, la línea de universo procedería de un punto interior al cono inferior y se dirigiría hacia O. Es por eso que al cono inferior se le da el nombre de *pasado*. En la figura 24.7 se han representado las líneas de universo de sucesos pasados (línea de puntos) y de uno hacia el futuro (trazo continuo). En ambos casos la línea es siempre interior al cono. En el primero el tiempo es negativo (pasado) y en el segundo, positivo (futuro). El resto entre los dos conos recibe el nobre de «cualquier otro lugar».

Hemos visto que en el caso de $x_4 = ict$, se cumplía $R'^2 = R^2$ (§ 24.6). Vamos a desarrollar este hecho aplicando la transformación de Lorentz:

$$x'^2 = \gamma^2(x-vt)^2 = \gamma^2x^2 + \gamma^2v^2t^2 - 2v\gamma^2xt$$
$$x_4'^2 = -c^2\gamma^2(t-vx/c^2)^2 = -c^2\gamma^2t^2 + 2\gamma^2vxt - \gamma^2\beta^2x^2$$

sumando estas dos ecuaciones miembro a miembro:

$$x'^2 + x_4'^2 = (1-\beta^2)\gamma^2x^2 - \gamma^2(c^2-v^2)t^2 = x^2 - c^2t^2 = x^2 + x_4^2$$

o sea

$$x'^2 + x_4'^2 = x^2 + x_4^2 = \text{Cte.}$$

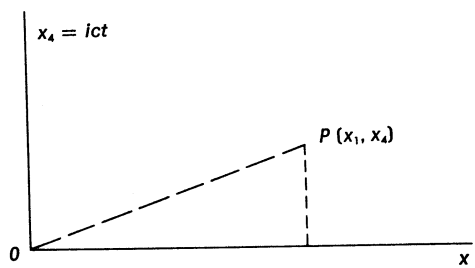


FIG. 24.8

En el diagrama (ict, x) de la figura 24.8 vemos que la «distancia» OP es

$$OP = \sqrt{x^2 + x_4^2} = \sqrt{x'^2 + x_4'^2}$$

Tenemos una Geometría «euclídea» artificial, en la que el cuadrado de la «distancia» es igual a la suma de los cuadrados de las coordenadas.

En el caso de $x_4 = ct$, tenemos:

$$x'^2 = \gamma^2(x - vt)^2 \qquad x_4'^2 = \gamma^2 c^2(t - vx/c)^2$$

Restando miembro a miembro estas dos ecuaciones y aprovechando el desarrollo anterior, obtenemos:

$$x'^2 - x_4'^2 = x^2 - c^2t^2 = x^2 - x_4^2$$

o sea

$$x^2 - x_4^2 = x'^2 - x_4'^2 = k^2 = \text{Cte.} \tag{24.19}$$

Esta ecuación es la de una hipérbola de semiejes $a = b = k$ y asíntotas las bisectrices $x_4 = \pm x$. Aquí no tenemos una geometría «euclídea» y para la métrica habrá que utilizar un diagrama hiperbólico. Veamos un ejemplo:

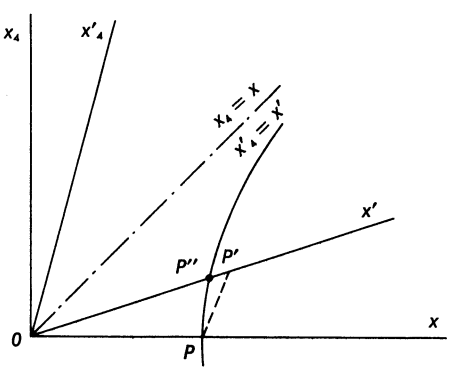


FIG. 24.9 Diagrama hiperbólico.

Supongamos que en el sistema de referencia S tenemos una varilla de longitud igual a la constante k de la ecuación 24.19. El extremo de la izquierda está en O y el derecho P en $x = k$. Tomemos una regla de igual longitud (en S) que la varilla anterior y mantegá-

mosla inmóvil en S'. En el instante inicial coinciden O y O', así como los extremos P y P'. Al moverse la referencia S' con velocidad relativa v en la dirección x, la línea de universo del extremo P' se mueve paralelamente al eje $x'_4 = ct'$, ya que está en reposo respecto S'. Para determinar la longitud hay que utilizar la métrica hiperbólica. Vemos que la hipérbola corta al eje x' en el punto P'', con lo que la distancia OP'' es menor que la OP'. Este acortamiento se debe al movimiento y recibe el nombre de *contracción de Lorentz.*

24.9. Caso general. En el caso en el que la velocidad relativa no fuese paralela al eje Ox, la transformación de Lorentz toma la forma general

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \frac{\mathbf{v}}{v^2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}) + \gamma\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}}{v^2} - t\right)\mathbf{v} \\ t' &= \gamma[t-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})/c^2] \end{aligned} \tag{24.20}$$

Para obtener la transformación inversa, basta sustituir $\mathbf{v}$ por $-\mathbf{v}$ (pues para pasar de S' a S basta invertir la velocidad relativa) y permutar las cantidades sin acento con las que lo tienen. Así

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}' - \frac{\mathbf{v}}{v^2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}') + \gamma\left(t' + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}'}{v^2}\right)\mathbf{v} \\ t &= \gamma[t' + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}')/c^2] \end{aligned} \tag{24.21}$$

No lo vamos a demostrar, pero si se considera el caso en que $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ tengan la misma dirección, las ecuaciones (24.20) y (24.21) se reducen, respectivamente, a las (24.15) y (24.16).

A continuación vamos a considerar algunos aspectos interesantes de los efectos cinemáticos de la transformación de Lorentz.

CINEMÁTICA RELATIVISTA

24.10. Contracción de Lorentz. Al final de § 24.8 hemos visto cualitativamente la contracción de Lorentz y ahora vamos a calcularla partiendo de la transformación (24.21). Consideremos una regla graduada de longitud L_0 en el sistema S. En este sistema, los vectores de posición de los extremos de dicha regla los representaremos por $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_1$, mientras que en el sistema S' dichos vectores los denotamos

por $\mathbf{r}'_2$ y $\mathbf{r}'_1$, respectivamente. Aplicando a cada uno de ellos la ecuación (24.21) y restando, obtenemos:

$$\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_2-\mathbf{r}'_1-\frac{\mathbf{v}}{v^2}\mathbf{v}\cdot(\mathbf{r}'_2-\mathbf{r}'_1)+\gamma\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot(\mathbf{r}'_2-\mathbf{r}'_1)\,\mathbf{v} =$$

$$= \mathbf{r}'_2-\mathbf{r}'_1-\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot(\mathbf{r}'_2-\mathbf{r}'_1)(1-\gamma)\mathbf{v}$$

Llamando $\Delta\mathbf{r}$ a $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ y $\Delta\mathbf{r}'$ a $\mathbf{r}'_2-\mathbf{r}'_1$, la anterior se escribe en la forma

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta\mathbf{r}'-(\mathbf{v}\cdot\Delta\mathbf{r}')(1-\gamma)\frac{\mathbf{v}}{v^2} \tag{24.22}$$

En el caso particular en que $\mathbf{v}$ tenga la dirección del eje Ox y colocando la regla sobre éste, las componentes de $\Delta\mathbf{r}$ serán $(\Delta x, 0, 0)$ y las de $\Delta\mathbf{r}'$ $(\Delta x', 0, 0)$. Entonces, la ecuación (24.22) nos da

$$\Delta x = \Delta x'-v\Delta x'(1-\gamma)\frac{v}{v^2} = \gamma\Delta x'$$

Pero $\Delta x = L_0$ y $\Delta x' = L$, luego:

$$L_0 = \gamma L \qquad \text{o sea} \qquad L = \frac{1}{\gamma}L_0 = \sqrt{1-\beta^2}\,L_0 \tag{24.23}$$

La longitud L_0 se ha acortado, ya que $\sqrt{1-\beta^2} < 1$. A este acortamiento se le llama *contracción de Lorentz.*

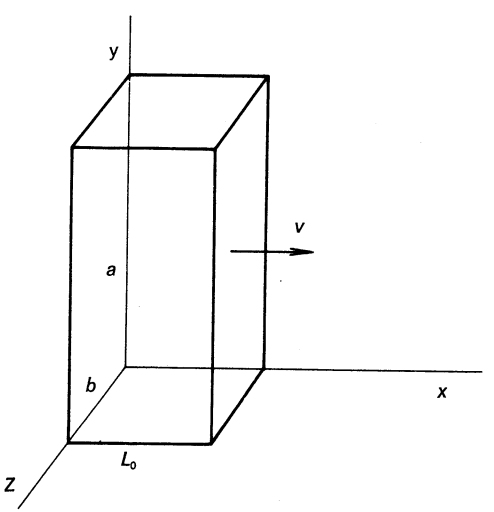


FIG. 24.10

Si consideramos un paralelepípedo rectángulo que se mueva con velocidad v paralela al eje Ox y cuyas aristas a, b, L_0 sean paralelas a los ejes y, z, x (fig. 24.10), respectivamente, según lo visto, L_0 se contraerá, mientras que a y b no variarán. Para ver esto tengamos en cuenta que al aplicar la ecuación (24.22) a a (o a b), por ser perpendiculares $\mathbf{v}$ y $\Delta\mathbf{r}'$ tendremos $\Delta\mathbf{r} = \Delta\mathbf{r}'$.

El volumen en el sistema S es $V_0 = abL_0$ y en el S' es

$$V = abL = abL_0/\gamma = V_0/\gamma = \sqrt{1-\beta^2}\, V_0 \qquad (24.24)$$

En una esfera de radio R_0 en S, que se moviese con velocidad v paralelamente al eje Ox, se acortaría el diámetro en esta dirección y no variaría en las direcciones perpendiculares, con lo que se convertiría en un elipsoide de revolución de semiejes R_0, R_0, R_0/γ. Un observador fijo respecto al Sol vería el diámetro terrestre acortado en

$$D_0 - D_0/\gamma = D_0\,(1-\sqrt{1-\beta^2})$$

y como la velocidad de traslación de la Tierra alrededor del Sol es de unos 30 km/s, $\beta = 10^{-4}$ y el acortamiento sería

$$\Delta D = D_0\,[1-(1-10^{-8})^{1/2}]$$

y desarrollando en serie y quedándonos con los términos de grado inferior al cuarto, queda

$$\Delta D = D_0\, 10^{-8}/2 = R_0 \cdot 10^{-8} = 6{,}37 \text{ cm}$$

Una longitud o un volumen, no sometidos a fuerzas, son valores relativos. La distancia entre dos puntos no tiene sentido si no se indica a qué sistema de referencia corresponde, pues depende del movimiento del sistema de referencia.

Debe advertirse que el acortamiento de una longitud L_0 en la dirección de su movimiento tiene un carácter puramente cinemático. No tiene lugar ningún tipo de tensión interna que produzca la deformación.

24.11. Relatividad de la simultaneidad. Una consecuencia de la transformación de Lorentz es que la simultaneidad de dos sucesos (no coincidentes en el lugar) es relativa al sistema de referencia. Es decir, dos sucesos que para un observador situado en S son simultáneos, no lo son para otro observador situado en S' y viceversa. Con-

sideremos dos puntos P_2 y P_1 en los que ocurren dos sucesos en los instantes t_2 y t_1, respectivamente. Para el observador en S' tendrán lugar en los instantes (v. la segunda de las ecuaciones 24.20)

$$t'_2 = \gamma\left(t_2 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_2}{c^2}\right) \quad \text{y} \quad t'_1 = \gamma\left(t_1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_1}{c^2}\right)$$

y el intervalo de tiempo transcurrido entre los dos sucesos, medido por el observador en S' será

$$t'_2 - t'_1 = \gamma\left[t_2 - t_1 - \frac{\mathbf{v}}{c^2}\cdot(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\right] \tag{24.25}$$

De donde resulta que si los dos sucesos eran simultáneos para el observador situado en S, o sea si $t_2 = t_1$, no lo son para el situado en S', a menos que $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$, o sea, que ocurran en el mismo lugar. Además, si el suceso en P_2 es posterior al ocurrido en P_1 para el observador en S ($t_2 > t_1$), para el observador en S' puede suceder que

$$t'_2 - t'_1 \gtreqless 0$$

basta para ello que

$$t_2 - t_1 \gtreqless \frac{\mathbf{v}}{c^2}\cdot(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \tag{24.26}$$

Por tanto, el orden de sucesión de dos fenómenos que ocurran en lugares diferentes puede invertirse para un observador que se mueva en condiciones determinadas.

Ejemplo. Dos estrellas A y B mantienen constante una separación de 15 minutos-luz. Un observador O situado siempre en el punto medio del segmento AB observa una explosión en B seguida, al cabo de 2 minutos, de otra en A. Otro observador O' que se mueve a lo largo de la recta definida por las estrellas ve primeramente la explosión en A y al cabo de 1 minuto observa la de B. ¿Qué velocidad lleva O'?

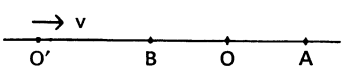


FIG. 24.11

En la figura 24.11 se ha representado la situación en un instante genérico. Midiendo las distancias en minutos-luz y los tiempos en minutos, será

$$t_A - t_B = 2, \quad t'_B - t'_A = 1, \quad \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = -15\ v$$

La ecuación (24.25) da

$$1 = \gamma \left[-2 + \frac{v(15 \text{ c-min})}{c^2} \right]$$

de donde

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2} = -2 + \beta\, 15$$

de donde resulta

$$226\beta^2 - 60\beta + 3 = 0$$

y las raíces de esta ecuación son $\beta_1 = 0{,}20$ y $\beta_2 = -0{,}07$. Esto significa que para que se den las condiciones del problema, O' debe moverse *hacia BOA* con una celeridad de 0,20 c. La otra solución no tiene significado físico, pues correspondería al valor negativo de $\sqrt{1-\beta^2}$ y se ha introducido al elevar al cuadrado.

De lo anteriormente visto, parece desprenderse que un observador podría observar después el nacimiento de una mujer que la jura de bandera de su hijo, vulnerando así el principio de causalidad. Sin embargo, ello no es así. La inversión del orden de dos sucesos se produce en casos en que dichos sucesos son independientes, como lo eran los del ejemplo anterior. Démonos cuenta que, según (24.26), para que se produzca dicha inversión debe cumplirse

$$\frac{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}{c\,(t_2 - t_1)} > \frac{c}{v}$$

donde hemos supuesto $\mathbf{v}$ y $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ de igual dirección. Es decir, en tal caso la distancia entre P_1 y P_2 es mayor que la que recorre la luz en el tiempo $t_2 - t_1$, si admitimos que siempre es $c > v$. Por tanto, si un suceso es consecuencia de otro, podemos considerar que tiene lugar cuando recibe una señal del suceso *causa* y esta señal no podrá alcanzar al suceso consecuencia si se propaga a una celeridad inferior a la de la luz. Como nadie ha hecho el servicio militar antes de que naciera su madre, la celeridad de la luz en el vacío deberá ser superior a la celeridad de cualquier otra señal.

24.12. Dilatación de los intervalos de tiempo. Consideremos dos sucesos que ocurran en el mismo lugar en tiempos distintos. El intervalo de tiempo transcurrido para el observador en S será $t_2 - t_1$ y

el transcurrido para el observador en S' será (haciendo $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$ en ec. 24.25)

$$t'_2 - t'_1 = \gamma\,(t_2 - t_1) = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{24.27}$$

Es decir, es mayor que el determinado por el observador en S.

Según esto, si f_0 es la frecuencia de un fenómeno periódico que ocurre en un sistema S, para un observador en S' sería

$$f = f_0\sqrt{1-\beta^2} \tag{24.28}$$

Es decir, los observadores O y O' poseen relojes que, si estuvieran en un mismo sistema, marcarían igualmente los segundos. El observador O mira su reloj y le observa la frecuencia f_0. Pero cuando mira al reloj de O', que está en movimiento relativo a S, le observa una frecuencia f que, según la ecuación (24.28), es menor que f_0. Luego, cree que el reloj en movimiento respecto a él atrasa. Los «segundos» en S' le parecen más largos que los que él observa en S.

Ahora bien, O' cree, por el contrario, que el reloj que atrasa es el de O, pues éste se mueve respecto a él con una velocidad relativa opuesta y si en la ecuación (24.27) cambiamos el signo de v (o sea de β) como está elevada al cuadrado, el resultado será el mismo.

24.13. Comprobación experimental de la dilatación del tiempo. Para todo tipo de desintegración radiactiva es posible determinar qué fracción de una muestra observada en el instante t_0 sobrevive en un instante posterior t. Desde el punto de vista estadístico, las partículas *inestables* son una especie de reloj; la fracción superviviente al cabo de un intervalo de tiempo dado nos proporciona información precisa acerca del tiempo transcurrido. Si las partículas que se desintegran llevan una gran velocidad relativa al observador, la dilatación del tiempo (ec. 24.27) hará que este observador mida menos desintegraciones por segundo que otro observador respecto al cual las partículas estuvieran en reposo.

Se realizó la experiencia con muones, los cuales se desintegran dando lugar (§ 23.7, p. 502) a un electrón o positón, un neutrino y un antineutrino. Se disponía de una tabla que da los muones supervivientes con el tiempo, si están en reposo. En el experimento,* llegaban 563 muones por hora a una altura de 2000 m y sus velocidades

* D. H. Frisch y J. H. Smith, *Am. J. Phys.*, 31 (1963).

eran próximas a la de la luz, con lo que tardaban $6{,}5 \times 10^{-6}$ s en llegar al nivel del mar. Según la tabla, al cabo de este tiempo deberían quedar 25 supervivientes y, sin embargo, se encontró que llegaban más de 400. Esto significa que el tiempo *para los muones* debía ser de $0{,}7 \times 10^{-6}$, con lo cual

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = 9 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

de donde se deduce $\beta = 0{,}994$, cosa que concuerda con el valor correspondiente a la velocidad de los muones.

En el experimento que acabamos de describir, el proceso se observaba desde un sistema de referencia fijo en el laboratorio. Hemos visto que el reloj que representaba la desintegración de mesones, observado desde el laboratorio atrasa (indicaba 0,7 μs cuando el del laboratorio medía 6,5 μs). Veamos qué sucedería si intentásemos describir la situación de acuerdo con las medidas efectuadas en un sistema inercial que se mueva con los mesones.

Respecto a este sistema, los mesones se desintegran en reposo. Desde el punto de vista de uno de los mesones, la Tierra y su atmósfera se mueven hacia arriba con una velocidad casi igual a la de la luz (0,994 *c*). Primeramente pasa la cima de la montaña y después el suelo o el mar. Como ahora los muones están en reposo respecto al sistema, deberán ser aplicables los valores de la tabla antes citada. El resultado anterior prevalece: el 75 % de los muones sobrevive (en lugar del 5 %) desde la cima de la montaña a 2000 m hasta el nivel del mar. La explicación es la siguiente: desde el punto de vista de los muones, la montaña sufre la contracción de Lorentz y la distancia entre su cima y el nivel del mar viene modificada por dicha contracción, observada desde el sistema de referencia de los mesones. El resultado, de acuerdo con las medidas experimentales, puede atribuirse a la dilatación del tiempo o a la contracción de Lorentz, según se considere desde la referencia del laboratorio o desde el sistema inercial solidario a los mesones. Constituye, pues, una comprobación experimental de las consecuencias directas del principio de Relatividad.

24.14. Composición de velocidades. Supongamos que el sistema de referencia S' se mueva con velocidad $\mathbf{v}$ respecto al sistema S y consideremos un punto móvil en este sistema cuyo vector de posición sea $\mathbf{r}$ y su velocidad $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$. En el sistema S', el vector de posición

de este punto será $\mathbf{r}'$ y su velocidad $\mathbf{u}' = d\mathbf{r}'/dt'$. Diferenciemos las ecuaciones (24.20):

$$d\mathbf{r}' = d\mathbf{r} - \frac{\mathbf{v}}{v^2}(\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}) + \gamma\left(\frac{\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}}{v^2} - dt\right)\mathbf{v}$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}}{c^2}\right)$$

Ahora bien, $d\mathbf{r}' = \mathbf{u}'dt'$ y $d\mathbf{r} = \mathbf{u}\,dt$, por lo que sustituyendo y simplificando

$$\mathbf{u}'\gamma\left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right) = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{v}}{v^2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}) + \gamma\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{v^2} - 1\right)\mathbf{v}$$

o sea

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{v^2} + \gamma\,\mathbf{v}\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{v^2} - \gamma\mathbf{v}}{\gamma\left(1 - \dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)} \tag{24.29}$$

Para hallar la velocidad con que se mueve respecto a la referencia S un punto que, respecto a S', lleva la velocidad $\mathbf{u}'$, procederíamos como antes, pero diferenciando las ecuaciones (24.21). Se obtiene así

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}' - \mathbf{v}\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{v^2} + \gamma\,\mathbf{v}\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{v^2} + \gamma\,\mathbf{v}}{\gamma\left(1 + \dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)} \tag{24.30}$$

Recordando que $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, sustituyendo en (24.30) y efectuando operaciones,

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} + \sqrt{1-\beta^2}\,\mathbf{u}' + \mathbf{v}\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}(1-\sqrt{1-\beta^2})}{1 + \dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}} \tag{24.31}$$

Casos particulares:

a) $v \ll c$:

En tal caso, $\sqrt{1-\beta^2} \simeq 1$ y $1-\sqrt{1-\beta^2} \simeq 0$ y la ecuación (24.31) daría, aproximadamente,

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{u}' \tag{24.32}$$

que es la fórmula clásica de composición de velocidades.

b) $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}'$ paralelas y del mismo sentido:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} + \sqrt{1-\beta^2}\,\mathbf{u}' + \mathbf{u}' - \mathbf{u}'\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{vu'}{c^2}}$$

o sea

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{u}}{1 + \dfrac{vu'}{c^2}} \quad ; \quad u = \frac{v + u}{1 + \dfrac{vu'}{c^2}} \tag{24.33}$$

c) En el caso anterior, supongamos $u' = c$:

$$u = \frac{v + c}{1 + \dfrac{v}{c}} = c \tag{24.34}$$

Es decir, si el observador O' que se mueve respecto al O a la velocidad de la luz c emite una señal luminosa, ésta llevará respecto a O una velocidad c y no $2c$, como resultaría de la teoría clásica. Esto está de acuerdo con el hecho de que todos los observadores miden la misma velocidad c para la luz (§ 24.3).

d) $\mathbf{v}$ es parelala al eje Ox, es decir $\mathbf{v}\,(v, 0, 0)$, $\mathbf{u}'(u'_1, u'_2, u'_3)$. En este caso $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = vu'_1$. Proyectando el vector $\mathbf{u}$ definido por la ecuación (24.31) sobre x, y, z, o sobre x', y', z' (que es lo mismo que x'_1, x'_2, x'_3)

$$u_x = \frac{v + \sqrt{1-\beta^2}\, u'_1 + \dfrac{v^2 u'_1}{v^2} - \dfrac{v^2 u'_1}{v^2}\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{v u'_1}{c^2}} =$$

$$= \frac{v + u'_1}{1 + \dfrac{v u'_1}{c^2}}$$

$$u_y = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\, u'_2}{1 + \dfrac{v u'_1}{c^2}} \qquad (24.35)$$

$$u_z = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\, u'_3}{1 + \dfrac{v u'_1}{c^2}}$$

Si en este caso $v = c$:

$$u_x = \frac{c + u'_1}{1 + \dfrac{u'_1}{c}} = c$$

$$u_y = 0$$

$$u_z = 0$$

la componente x de la velocidad resultante es igual a c independientemente de cuál sea la velocidad del punto y las otras dos componentes son nulas.

24.15. La luz en un medio en movimiento: coeficiente de arrastre de Fizeau. Por un medio material de índice de refracción n, la luz se propaga con una celeridad $u' = c/n$ (§ 13.3, p. 279). Si el medio se mueve con velocidad **v** relativa al laboratorio, FIZEAU halló experimentalmente que la celeridad de un rayo luminoso de igual dirección que **v** se obtiene sumando o restando (según que la luz y el medio se muevan en el mismo sentido o en sentidos opuestos) una fracción de v tal que

$$u = \frac{c}{n} \pm \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v \qquad (24.36)$$

A $1 - \frac{1}{n^2}$ le llamó FRESNEL *coeficiente de arrastre.*

Este resultado experimental se puede obtener a partir de la ley relativista de composición de velocidades (24.33), pues **v** y **u'** son paralelas

$$u = \frac{v + u'}{1 + \frac{vu'}{c^2}} = \frac{v + \frac{c}{n}}{1 + \frac{v}{nc}}$$

y desarrollando en serie

$$u = \left(v + \frac{c}{n}\right)\left(1 - \frac{v}{cn} + \ldots\right)$$

y como $v \ll cn$, podemos quedarnos con sólo los dos primeros términos del desarrollo y resulta

$$u = v - \frac{v^2}{cn} + \frac{c}{n} - \frac{v}{n^2}$$

La pequeñez de v nos permite despreciar el segundo término frente a los demás y queda

$$u = \frac{c}{n} + v - \frac{v}{n^2} = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v$$

que coincide con la ecuación (24.36).

Conviene señalar que FRESNEL y otros teóricos de su época tuvieron que hacer unas hipótesis muy artificiales para interpretar este hecho experimental, el cual aparece de manera natural en la teoría de la Relatividad.

24.16. Efecto Doppler. Consideremos un foco luminoso F que se mueva con velocidad **v** (fig. 24.12). El instante inicial se toma cuando F está en cierta posición en la cual la elongación de la onda emitida es máxima. Este máximo alcanza al observador O al cabo de un tiempo $t_1 = r_1/c$. El segundo máximo lo emite el foco cuando está en

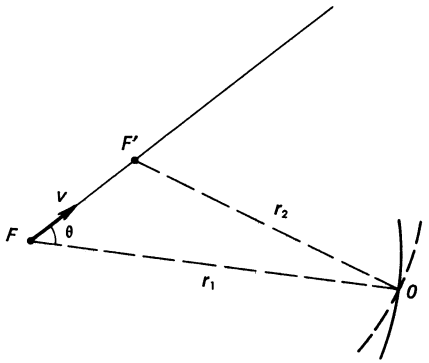


FIG. 24.12

la posición F' al cabo de un tiempo T igual al período de la onda luminosa. Este máximo llega a O al cabo de un tiempo $t_2 = r_2/c$, cosa que ocurre en el instante $t' = T + \dfrac{r_2}{c}$; el intervalo de tiempo que transcurre entre la llegada de estos dos máximos consecutivos es, para el observador,

$$\Delta t' = t' - t_1 = T + \frac{r_2}{c} - \frac{r_1}{c} \tag{24.37}$$

Para hallar r_2 aplicaremos el teorema del coseno:

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 + FF'^2 - 2r_1\, FF' \cos\theta} =$$

$$= r_1 \left(1 - 2\frac{FF'}{r_1}\cos\theta + \frac{FF'^2}{r_1^2}\right)^{1/2}$$

Ahora bien, $FF' = vT$. Para la luz, T es muy pequeño (para la luz amarilla vale, aproximadamente, 2×10^{-15} s) y por ello FF' será mucho menor que r_1, por lo que podremos desarrollar en serie la anterior expresión y despreciar las potencias de FF'/r_1 de grado igual o mayor que 2. Queda entonces

$$r_2 \simeq r_1 \left(1 - \frac{FF'}{r_1}\cos\theta\right) = r_1 - FF'\cos\theta \tag{24.38}$$

Por tanto,

$$\Delta t' = T - \frac{1}{c} FF' \cos\theta = \frac{1}{f} - \frac{v}{fc} \cos\theta =$$
$$= \frac{1}{f}\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)$$

Pero $\Delta t'$ es el período que percibe el observador. Es, por tanto, $T' = 1/f'$, luego

$$f' = \frac{1}{T'} = \frac{f}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta} \tag{24.39}$$

Si **v** tuviera el sentido opuesto (foco luminoso alejándose):

$$f' = \frac{f}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta} \tag{24.39 bis}$$

Este efecto es clásico y tiene lugar para una referencia en reposo respecto al observador. La frecuencia f del foco luminoso medida en la referencia del mismo, que está en movimiento respecto a O, es $f = f_0\sqrt{1-\beta^2}$ (ec. 24.28), así pues:

$$f' = \frac{f_0\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta} \tag{24.40}$$

y si el foco está alejándose

$$f' = \frac{f_0\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta} \tag{24.40 bis}$$

Si **v** tiene la dirección FO, $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$ y

$$f = \frac{f_0\sqrt{1-\beta^2}}{1 \mp \frac{v}{c}} \tag{24.41}$$

que podemos escribir en la forma:

$$f = \frac{f_0\sqrt{1-\beta}\ \sqrt{1+\beta}}{(\sqrt{1\mp\beta})^2} = f_0\sqrt{\frac{1\pm\beta}{1\mp\beta}} \tag{24.42}$$

que nos da la frecuencia observada, según que el foco se acerque al observador (el superior de los dos signos dobles) o se aleje de él (signo inferior).

24.17. Formulación cinemática cuadrivectorial. Para obtener magnitudes invariantes en el espacio de Minkowski debemos formularlas en forma cuadrivectorial.

Recordemos que un suceso en el punto $(x_1, x_2, x_3, x_4 = ict)$ dista del origen O una cantidad r tal que

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

que es un invariante ante la transformación de Lorentz. También lo será un elemento de línea de universo

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2}$$

Lo mismo le ocurrirá al *tiempo intrínseco de Minkowski*

$$d\tau = \frac{ds}{ic} = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)} =$$

$$= dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma} \tag{24.43}$$

Si quisiéramos definir el *cuadrivector velocidad*, no podríamos definirlo en la forma

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, ic = (\mathbf{v}, ic)$$

pues dt no es invariante. En cambio, podemos definir la cuadrivelocidad en la forma

$$\mathbf{w} = \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, ic\frac{dt}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}(\mathbf{v}, ic) \tag{24.44}$$

pues su norma es

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2}{d\tau^2} = -c^2 \qquad (24.45)$$

que es un invariante el cual, además, tiene el mismo valor para todos los cuadrivectores velocidad **w**. De la definición (24.44) se deduce inmediatamente que

$$w_1 = \gamma v_1,\ w_2 = \gamma v_2,\ w_3 = \gamma v_3,\ w_4 = \gamma\, ic \qquad (24.44\ \text{bis})$$

Su módulo vale ic, según se ve al extraer la raíz cuadrada de $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$.

La *cuadriaceleración* se define, análogamente, por

$$\mathbf{j} = \frac{d\mathbf{w}}{d\tau} = \frac{d^2x}{d\tau^2}, \frac{d^2y}{d\tau^2}, \frac{d^2z}{d\tau^2}, ic\frac{d^2t}{d\tau^2} \qquad (24.46)$$

lo que equivale a escribir

$$j_i = \frac{dw_i}{d\tau} = \gamma \frac{dw_i}{dt} \qquad (24.47)$$

es decir

$$\begin{aligned} j_i &= \gamma \frac{d(\gamma v_i)}{dt} = \gamma \left(\gamma \dot{v}_i + v_i \frac{d\gamma}{dt} \right) (i = 1, 2, 3) \\ j_4 &= \gamma \frac{d(ic\,\gamma)}{dt} = \gamma\, ic \frac{d\gamma}{dt} \end{aligned} \qquad (24.48)$$

y como

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\dfrac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c^2}}{(1-\beta^2)^{3/2}} = \gamma^3 \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c^2} \qquad (24.49)$$

resulta

$$j_i = \gamma^2 \left(v_i + \gamma^2 v_i \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c^2} \right) \quad (i = 1, 2, 3)$$
$$j_4 = \frac{i}{c} \gamma^4 (\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \tag{24.50}$$

Si $v \ll c$, $\gamma \simeq 1$ y vemos que las componentes espaciales de (24.30) se convierten en

$$j_1 = \dot{v}_1, \; j_2 = \dot{v}_2, \; j_3 = \dot{v}_3, \; j_4 = 0$$

La expresión simbólica de (24.50) la escribimos separando la parte espacial de la temporal, de la siguiente manera

$$\mathbf{j} = \gamma^2 \left[\dot{\mathbf{v}} + \gamma^2 \mathbf{v} \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c^2} \; , \; \frac{i}{c} \gamma^2 (\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \right] \tag{24.51}$$

Por último, derivando la ecuación (24.45) respecto al tiempo intrínseco, resulta

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{24.52}$$

lo que indica que la cuadrivelocidad y la cuadriaceleración son ortogonales en el espacio de Minkowski.

24.18. Dinámica relativista. En la Dinámica relativista, el punto material se considera de igual manera que en la Mecánica clásica. El principio de la inercia (§ 7.1, tomo I), es invariante respecto a las transformaciones de Lorentz. En efecto, si un punto material se encuentra en movimiento rectilíneo y uniforme, con velocidad $\mathbf{u}$ respecto a un sistema de referencia inercial S, la ecuación (24.29) nos indica que también se moverá con movimiento rectilíneo y uniforme (de velocidad $\mathbf{u}'$) respecto a otro sistema inercial S'.

En cambio, la segunda ley de Newton ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$), que es invariante en relación con las transformaciones de Galileo, no lo es para las de Lorentz. Para hallar la fórmula relativísticamente invariante de la segunda ley de Newton, será necesario formularla cuadrimensionalmente. Ahora bien, los puntos materiales, o los cuerpos formados por

ellos, poseen una magnitud invariante, llamada *masa en reposo* m_0, que es una constante característica de cada tipo de partícula.

Para la formulación cuadridimensional de la Dinámica, comenzaremos por definir la cuadricantidad de movimiento $\mathbf{P} = m_0\mathbf{w}$, cuyas componentes son

$$P_i = m_0 w_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{24.53}$$

es decir

$$\begin{aligned} P_i &= m_0\gamma v_i \quad (i = 1, 2, 3) \\ P_4 &= m_0\gamma ic \end{aligned} \tag{24.54}$$

en donde las componentes espaciales se convierten, para $v \ll c$, en las componentes tridimensionales ordinarias de la cantidad de movimiento clásica, $p_i = m_0 v_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

En la Dinámica clásica, la fuerza es la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento (§ 7.8, ec. 7.15, tomo I). Podemos generalizar a cuatro dimensiones y definir la cuadrifuerza por la derivada de la cuadricantidad de movimiento $\mathbf{P}$ respecto al tiempo intrínseco τ:

$$\mathcal{F} = \frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = m_0\gamma \frac{d\mathbf{w}}{dt} = m_0\mathbf{j} \tag{24.55}$$

que para $v \ll c$ se reduce a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i &= F_i = m_0 \frac{dv_i}{dt} \quad (i = 1, 2, 3) \\ \mathcal{F}_4 &= 0 \end{aligned} \tag{24.56}$$

La expresión (24.55) puede expresarse simbólicamente

$$\mathcal{F} = (\gamma f_1, \gamma f_2, \gamma f_3, \mathcal{F}_4) \tag{24.57}$$

donde f_1, f_2, f_3 son las componentes espaciales de $m_0 \dfrac{d\mathbf{w}}{dt}$, o sea de la fuerza $\mathbf{f}$. O lo que es igual:

$$\mathcal{F} = (\gamma\mathbf{f}, \mathcal{F}_4) \tag{24.58}$$

Para hallar el significado físico de $\mathscr{F}_4$, multipliquemos escalarmente $\mathscr{F}$ por $\mathbf{w}$:

$$\mathscr{F} \cdot \mathbf{w} = m_0 \mathbf{j} \cdot \mathbf{w} = 0 \tag{24.59}$$

en virtud de la ecuación (24.52).

La ecuación (24.59) podemos escribirla en la forma

$$\mathscr{F}_1 w_1 + \mathscr{F}_2 w_2 + \mathscr{F}_3 w_3 + \mathscr{F}_4 w_4 = 0$$

y sustituyendo en esta ecuación las componentes que figuran por las expresiones (24.44 bis) y (24.57) resulta

$$\gamma^2(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) + \mathscr{F}_4 ic\gamma = 0$$

de donde

$$\mathscr{F}_4 = \frac{i}{c}\gamma(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) \tag{24.60}$$

Esta misma componente, teniendo en cuenta la ecuación (24.55) y la cuarta de las ecuaciones (24.44 bis) nos da

$$\mathscr{F}_4 = m_0\gamma \frac{dw_4}{dt} = m_0\gamma ic \frac{d\gamma}{dt} \tag{24.61}$$

Igualando los últimos miembros de las ecuaciones (24.60) y (24.61) resulta

$$m_0c^2 \frac{d\gamma}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$$

y como $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$ es el trabajo por unidad de tiempo (potencia) efectuado por la fuerza espacial sobre la partícula, la anterior ecuación la podemos escribir en la forma

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \frac{d\,(c^2 m_0 \gamma)}{dt} \tag{24.62}$$

que nos da la energía entregada a la partícula por unidad de tiempo.

Definiremos, pues, la energía total de una partícula en la forma

$$E = \gamma m_0 c^2 \tag{24.63}$$

Esto significa que para $v = 0$, la energía de la partícula se reduce a m_0c^2, valor que se denomina *energía en reposo* de la partícula.

24.19. Masa relativista. Vamos a introducir una magnitud m, o $m(v)$, llamada *masa relativista*, que sea, por definición, el coeficiente de proporcionalidad entre $\mathbf{p}$ y $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{p} = m(v)\,\mathbf{v} \tag{24.64}$$

donde $\mathbf{p}$ tiene por componentes las espaciales de $\mathbf{P}$; o sea $p_i = P_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Según las ecuaciones (24.54), será

$$m(v) = \gamma\, m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{24.65}$$

La masa relativista $m(v)$ depende de la velocidad y, por tanto, no sólo del tipo de partícula considerado sino también de su velocidad, es decir, de su estado de movimiento. Cuando $v \ll c$, la masa relativista tiende a la masa en reposo. En la figura 24.13 hemos representado la masa relativista en función de la velocidad. Vemos que tiende a infinito cuando $v \to c$ y que a partir de $v = 5 \times 10^7$ m/s, $m \neq m_0$.

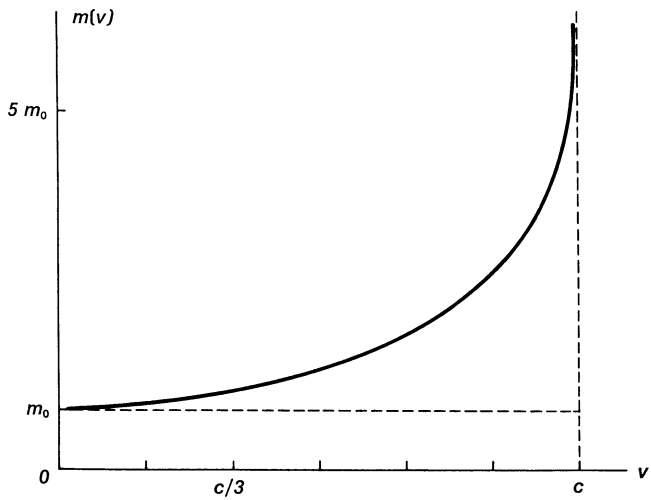


FIG. 24.13 Variación de la masa relativista con la celeridad.

La relación (24.65) entre la masa y la velocidad de una partícula ha sido comprobada experimentalmente por diversos investigadores. Los primeros fueron KAUFMANN,* quien halló el resultado antes de que se conociera la teoría de la Relatividad y BUCHERER.† Ambos desviaban, mediante campos eléctricos y magnéticos, electrones emitidos por cuerpos radiactivos y determinaban así el valor de e/m y hallaban discrepancias respecto al valor hallado anteriormente por J. J. THOMSON (v. § 6.5, p. 114). Llevando los valores de m así medidos a una gráfica que tenga en abscisas las celeridades, se obtiene una gráfica coincidente con la teórica de la figura 24.13. La discrepancia respecto al resultado obtenido por THOMSON se debía a que éste operaba con electrones mucho más lentos.

La masa relativista no será relativísticamente invariante por no serlo γ.

Si una partícula se mueve respecto a dos sistemas S y S' con velocidades distintas v y v', respectivamente, la masa medida con instrumentos situados en los sistemas respectivos será $m(v)$ en S y $m'(v')$ en S'.

Según la última de las ecuaciones (24.54) y teniendo en cuenta la ecuación (24.63), podemos escribir

$$P_4 = m_0\gamma ic = m(v)ic = i\frac{E}{c} \tag{24.66}$$

o sea que P_4 es igual (salvo un factor constante i/c) a la energía total E de la partícula. Ello nos permite escribir P en la forma simbólica de componentes espaciales y temporal:

$$\mathbf{P} = \left(\mathbf{p}, \frac{i}{c} E \right) \tag{24.67}$$

que define el cuadrivector cantidad de movimiento-energía. Para hallar las componentes después de aplicarle la transformación de Lorentz, tendremos en cuenta la transformación de cuadrivectores, tomando la matriz (24.9) con los valores hallados de a_{ij} en § 24.6:

$$a_{11} = \gamma \quad , \quad a_{14} = -a_{41} = i\gamma\beta \quad , \quad a_{44} = \gamma$$

* W. KAUFMANN, *Göttingen Nach.*, **2**, 143 (1901).
† A. H. BUCHERER, *Ann. der Phys.*, **28**, 513 (1909).

con lo que la matriz así escrita se aplica a la transformación del cuadrivector (24.67)

$$\begin{Vmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ P'_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \gamma P_1 + i\gamma\beta P_4 \\ P_2 \\ P_3 \\ -i\beta\gamma P_1 + \gamma P_4 \end{Vmatrix} \tag{24.68}$$

o sea:

$$\begin{aligned} P'_1 &= \gamma \left(p_1 - \frac{v}{c^2} E \right) \\ P'^2 &= p_2 \\ P'_3 &= p_3 \\ P'_4 &= \frac{i}{c} \gamma \left(-v p_1 + E \right) \end{aligned} \tag{24.69}$$

y como P'_4 es $\dfrac{i}{c} E'$, sustituyendo en la última de las ecuaciones (24.69) y simplificando, resulta:

$$E' = \gamma \left(-v p_1 + E \right) \tag{24.70}$$

Veamos que el módulo de **P** es invariante:

$$\begin{aligned} P^2 &= p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - \frac{E^2}{c^2} = \gamma^2 m_0^2 v^2 - \frac{E^2}{c^2} \\ &= \gamma^2 (m_0^2 v^2 - m_0^2 c^2) = -\gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v_2}{c^2} \right) m_0^2 \end{aligned}$$

o sea

$$P^2 = -m_0^2 c^2 \tag{24.71}$$

Las expresiones (24.69) y (24.70) dan las fórmulas de transformación para la cantidad de movimiento y la energía.

24.20. Energía de una partícula; fórmulas de Einstein. Hemos visto que la energía E de una partícula viene dada por la ecuación (24.63) y que la partícula posee una energía en reposo

$$E_0 = m_0c^2 \tag{24.72}$$

Así pues, el exceso de energía sobre E_0 será la energía cinética T de la partícula, que será

$$T = mc^2 - m_0c^2 = (m - m_0)c^2$$

Si sustituimos aquí m por su expresión (24.65) resulta

$$E = m_0c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Desarrollando en serie y despreciando las potencias de v/c superiores a la tercera, resulta

$$E = m_0c^2 + \frac{1}{2} m_0v^2$$

con lo que resulta que a velocidades no comparables con la de la luz, la energía cinética se reduce a la que clásicamente tendría una partícula de masa m_0.

Volviendo al caso general, vemos que la masa y la energía están relacionadas por las *fórmulas de Einstein* (ec. 24.63 y 24.72), en las que entre aquéllas existe una relación de proporcionalidad en la cual el coeficiente de proporcionalidad es la constante universal c^2. Es algo análogo a lo que sucede en Termodinámica entre el trabajo y el calor, que están relacionados por el equivalente mecánico J (v. § 16.2, p. 289, tomo *I*). Así pues, las fórmulas de Einstein establecen una equivalencia entre masa y energía.

La fórmula de Einstein (24.63) podemos escribirla en la forma

$$E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

de donde

$$E^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=m_0^2c^4 \quad \text{es decir} \quad E^2c^2-E^2v^2=m_0^2c^6 \tag{24.73}$$

y como, por ser $m = p/v$,

$$E=\frac{p}{v}c^2 \tag{24.74}$$

sustituyendo (24.74) en (24.73) resulta

$$E^2c^2-\frac{p^2}{v^2}c^4v^2=m_0^2c^6$$

y por tanto

$$E^2=p^2c^2+m_0^2c^4 \tag{24.75}$$

Esta relación entre la energía total, la cantidad de movimiento y la energía en reposo de una partícula nos permite una representación gráfica sencilla: Tomemos la energía en reposo como cateto de un triángulo rectángulo (fig. 24.14) y el producto pc como otro cateto. La relación (24.75) nos indica que la hipotenusa mide la energía total de la partícula.

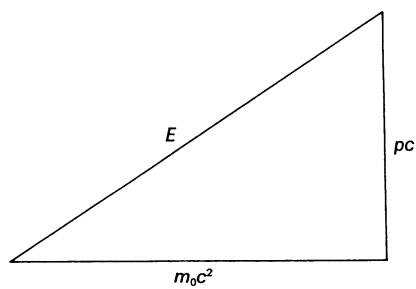


FIG. 24.14

La relación (24.75) tiene un interés extraordinario, ya que nos dice que la diferencia $E^2-(pc)^2$ se mantiene constante. Expresa, pues, un nuevo principio de conservación según el cual la diferencia entre el cuadrado de la *energía total* y el cuadrado de la *cantidad de*

movimiento total, escrita en la forma pc para que las magnitudes sean homogéneas, es *constante en todo sistema inercial de referencia.*

La equivalencia entre masa y energía ha tenido comprobaciones espectaculares. La *materialización* de la energía, o conversión de la energía en materia, tiene su primer antecedente en 1932, cuando ANDERSON consigue transformar energía radiante (un fotón de rayos X) en dos partículas: un electrón y un positón. La energía del fotón era de 1,02 MeV y la masa de cada una de las partículas es equivalente a 0,51 MeV. Más tarde se crearon piones por el proceso

$$p + p \rightarrow p + n + \pi^+$$

empleando protones de energía 3 GeV que al chocar con otro protón de una cámara de hidrógeno líquido daban lugar a un protón, un neutrón y el pión. Otro proceso importante fue la creación de un *antiprotón* (v. § 23.7, p. 501).

24.21. Sistemas de partículas. Hasta ahora hemos considerado solamente la Mecánica del punto. Ahora vamos a considerar la Mecánica de un sistema de partículas. Un tal *sistema de partículas* se caracteriza por su energía E, su cantidad de movimiento $\mathbf{P}$ y su masa en reposo M_0. Si prescindimos de los procesos internos que tienen lugar en el sistema y de su extensión en el espacio, podemos considerar un punto material en el cual

$$E = M_0 c^2 \tag{24.76}$$

donde M_0 es la masa en reposo de todo el sistema. Como $M_0 > 0$, será $E > 0$ al igual que en el caso de una partícula libre.

Vamos a considerar tres casos que pueden presentarse:

1.° Un sistema *sin interacción mutua.* En él

$$E = \sum_1^N \gamma_k m_{0k} c^2 \quad , \quad \mathbf{P} = \sum_1^N \gamma_k m_{0k} \mathbf{u}_k$$

2.° Un sistema en el cual las partículas están *alejadas* mutuamente y se mueven a gran velocidad.

3.° Sistemas con *interacción débil.*

En el caso 2.°, la energía de interacción será pequeña frente a la suma de las energías individuales $\sum E_k = \sum m_{0k} c^2$ y podemos ad-

mitir que, como en el caso de partículas libres,

$$E = \sum \gamma_k m_{0k} c^2 \tag{24.77}$$

$$\mathbf{P} = \sum \gamma_k m_{0k} \mathbf{u}_k \tag{24.78}$$

Ahora bien, cuando las partículas se aproximan mucho (colisión), la interacción ya no es pequeña y no se pueden aplicar las relaciones (24.77) y (24.78). No obstante, al separarse las partículas después del choque, a partir de cierta distancia volverán a ser aplicables las expresiones (24.77) y (24.78). Además, E y $\mathbf{P}$ han de ser iguales antes y después de la interacción o choque. Podremos, pues, escribir leyes de conservación del tipo

$$\sum_1^N \gamma_k m_{0k} c^2 = \sum_1^{N'} \gamma_k m_{0k} c^2 \tag{24.79}$$

$$\sum_1^N \gamma_k m_{0k} \mathbf{u}_k = \sum_1^{N'} \gamma_k m_{0k} \mathbf{u}_k \tag{24.80}$$

en las que en los primeros miembros k toma valores de 1 a N y en los segundos puede tomarlos de 1 a N', pues el número de partículas antes de la interacción puede ser diferente que después de ella.

Las magnitudes $\mathbf{P}$ y E relativas a las partículas, antes y después de la interacción, constituyen el cuadrivector cantidad de movimiento-energía, cuyas componentes serán la suma, respecto a k, de las componentes de dicho cuadrivector para cada partícula (ec. 24.67). Análogamente a lo que decía la ecuación (24.71), el módulo de $\mathbf{P}$ es invariante:

$$P^2 = \sum P^2_{1k} + \sum P^2_{2k} + \sum P^2_{3k} + \sum P^2_{4k} = -M_0 c^2 \tag{24.81}$$

Este carácter constante de P^2 expresa la ley general de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía. Podemos expresarla mediante el invariante

$$I = p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -M_0 c^2 \tag{24.82}$$

que se corresponde con la ecuación (24.75) para el caso de una par-

tícula. La ecuación (24.82) implica que

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = (p')^2 - \frac{(E')^2}{c^2} \tag{24.83}$$

donde los valores con acento y entre paréntesis indican los valores de dichas magnitudes después de la interacción.

Las componentes P_j del cuadrivector se transforman según las fórmulas generales (24.68) cuando se pasa de un sistema inercial S a otro S'.

En ocasiones, conviene utilizar un sistema de referencia en el cual la cantidad de movimiento total sea nula. Al igual que en la Mecánica clásica, dicho sistema se llama *sistema del centro de masa* y lo simbolizaremos por $S^{(cdm)}$ o S^g.

Consideremos un sistema inercial S en el cual la cantidad de movimiento del sistema de partículas sea $\mathbf{P}$ y la energía E. La velocidad del cdm del sistema de partículas relativa al sistema inercial S la simbolizaremos por V_g y será una característica del sistema global. Aplicando la transformación del cuadrivector $\mathbf{P}$ de S a S^g hallamos:

$$P_1{}^g = 0 = \frac{P_1 - V_g \dfrac{E}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{V_g{}^2}{c^2}}} \tag{24.84}$$

$$P_2{}^g = 0 = P_2 \qquad P_3{}^g = 0 = P_3 \tag{24.85}$$

$$E^g = \frac{E - V_g P_1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \tag{24.86}$$

Con el supraíndice g indicamos las magnitudes referidas al sistema del cdm.

De la ecuación (24.84) resulta:

$$P_1 = V_g \frac{E}{c^2} \quad \text{o sea} \quad V_g = P_1 \frac{c^2}{E} \tag{24.87}$$

y en el caso general encontraríamos:

$$\mathbf{V}_g = \mathbf{P}\frac{c^2}{E} \tag{24.88}$$

En Mecánica clásica, la velocidad del cdm era $\mathbf{V}_g = d\mathbf{r}_g/dt$ (v. § 8.3, p. 118, tomo I); aquí no ocurre lo mismo, ya que el segundo miembro de la ecuación (24.88) no es la derivada respecto al tiempo de magnitud conocida alguna. Por ello, el concepto de coordenadas del cdm no se puede introducir en Mecánica relativista para un sistema arbitrario de partículas en interacción mutua. Cuando la interacción sea débil, se podrá utilizar el concepto de cdm con cierta aproximación. A continuación vamos a considerar la masa en reposo de un sistema de partículas.

Para el sistema del cdm, el cuadrivector cantidad de movimiento-energía tendrá módulo invariante (ec. 24.81) que en virtud de la ecuación (24.82) puede escribirse en la forma

$$(P^g)^2 c^2 - (E^g)^2 = -M_0^2 c^4 \tag{24.89}$$

Como, para el sistema del cdm, $P^g = 0$, la expresión (24.89) se reduce a

$$E^g = M_0 c^2 \tag{24.90}$$

donde M_0 es la masa en reposo.

Por otra parte, según la ecuación (24.77),

$$E_0 = \sum_i \gamma_i m_{0i} c^2 = \sum_i \frac{m_{0i}\, c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v_i^2}{c^2}}}$$

donde v_i es la velocidad de la i-ésima partícula referida al sistema del cdm. Sustituyendo E^g por su expresión (24.90), hallamos para la masa en reposo:

$$M_0 = \sum_i \frac{m_{0i}}{\sqrt{1 - \dfrac{v_i^2}{c^2}}} \tag{24.91}$$

De esta expresión deducimos que la masa en reposo de un sistema de partículas no es igual a la suma de las masas en reposo de las

partículas individuales ($M_0 \neq \sum m_{0i}$), sino que depende de las velocidades de su movimiento con relación al sistema del cdm.

La diferencia entre la masa en reposo M_0 de un sistema y la suma de las masas en reposo de las partículas que lo constituyen, tiene gran importancia en Física nuclear. Si entre las partículas existe interacción, la expresión (24.77) no da la energía total; hay que introducir la energía de interacción entre las partículas.

24.22. Algunas aplicaciones a la Física nuclear. Una de las relaciones más importantes en Física nuclear es la ley de conservación del cuadrivector cantidad de movimiento-energía. Vamos a limitarnos a los procesos más esenciales.

a) *Reacciones de desintegración de partículas.* La ley de conservación del cuadrivector **P** impone una limitación esencial a las reacciones posibles. Consideremos la desintegración de una partícula, o de un cuerpo, en dos partes. Se supone que la desintegración es espontánea, es decir, que tiene lugar sin que actúen fuerzas exteriores.

Sea M_0 la masa en reposo de la partícula que se desintegra. En el sistema del cdm, antes de la desintegración es $P = 0$. El invariante del cuadrivector cantidad de movimiento-energía es el dado por la expresión (24.89). Después de la desintegración aparecen las partículas de masas en reposo m_{01} y m_{02}, con cantidades de movimiento $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ y energías E_1, E_2.

En el sistema del cdm, la cantidad de movimiento total después de la desintegración es nula ($\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$) y el invariante (24.89)

$$I = (p_1 + p_2)^2c^2 - (E_1 + E_2)^2 = -M_0^2c^4$$

se convierte en

$$M_0c^2 = E_1 + E_2 \tag{24.92}$$

Dado que

$$E = \text{energía en reposo} + \text{energía cinética},$$

podemos escribir

$$E_1 = m_{01}c^2 + T^1$$
$$E_2 = m_{02}c^2 + T^2$$

con lo que

$$M_0c^2 = (m_{01} + m_{02})c^2 + T^1 + T^2 \tag{24.93}$$

Como las energías cinéticas son positivas, de la ecuación (24.93) se deduce que la desintegración espontánea sólo es posible si se cumple

$$M_0 > m_{01} + m_{02}$$

Recíprocamente, si la masa de un cuerpo es menor que la suma de las masas de los cuerpos que resultarían de la reacción, la desintegración espontánea es *imposible*. En este caso, para que tenga lugar la reacción de desintegración se necesita la aportación de energía externa.

Para hallar las energías de las partículas después de la reacción, usaremos las igualdades

$$E^2_1 = p^2_1 c + m^2_{01}c^4 \quad , \quad E^2_2 = p^2_2 c^2 + m^2_{02}c^4$$

(recordemos ec. 24.75) y teniendo en cuenta que $p_1 + p_2 = 0$, con lo que $p^2_1 = p^2_2$, restando las expresiones de las energías, tenemos

$$E^2_1 - E^2_2 = (m^2_{01} - m^2_{02})c^4 \tag{24.95}$$

y resolviendo el sistema de las dos ecuaciones (24.93) y (24.95), tenemos

$$E_1 = \frac{1}{2M_0}(M^2_0 + m^2_{01} - m^2_{02})c^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2M_0}(M^2_0 - m^2_{01} + m^2_{02})c^2$$

b) *Estabilidad de los núcleos atómicos.* Consideremos un núcleo atómico formado por Z protones y A-Z neutrones (§ 23.1, p. 490) y cuya masa en reposo sea M_0. Los protones y neutrones poseen, en el núcleo, energías cinéticas muy elevadas. Sin embargo, las fuerzas nucleares, extraordinariamente intensas, aseguran la estabilidad del sistema. La energía en reposo, M_0c^2, del núcleo, se compone de la energía en reposo de todas las partículas que se encuentran en él ($\sum m_{0i}c^2$) más las energías del movimiento interno y de interacción de las mismas. Para que el núcleo sea estable y el movimiento de las partículas nucleares no pueda producir desintegración espontánea, deberá cumplirse, en virtud de (24.93),

$$M_0c^2 < \sum_i m_{0i}c^2$$

A la diferencia

$$\Delta m_0 c^2 = \sum_i m_{0i} c^2 - M_0 c^2 \qquad (24.96)$$

se le da el nombre de *energía de enlace* del núcleo y es una medida de la estabilidad de éste. En particular, si dicha energía es negativa el núcleo es inestable y se desintegra espontáneamente. Para medir la estabilidad de un núcleo, además de (24.96) puede definirse la magnitud

$$m_0 = \sum_i m_{0i} - M_0$$

llamada *defecto de masa*. Para que un núcleo sea estable su defecto de masa debe ser positivo. Si así sucede, la ecuación (24.93) nos indica que el núcleo es estable respecto a su desintegración en las partículas que lo componen (protones y neutrones). Sin embargo, esto no significa que el núcleo sea absolutamente estable y pueda existir indefinidamente.

c) *Producción de energía en las reacciones nucleares*. Sea la reacción nuclear

$$A + B \rightarrow C + D$$

en la cual conocemos las masas de los núcleos de partida M_A, M_B y las de los productos de la reacción M_C, M_D. Si la masa en reposo total es menor después de la reacción que al principio, habrá disminuido la energía en reposo total y ello comporta que aparezca una cantidad equivalente de energía, pues ésta se conserva. Llamando Q a la cantidad de energía que aparece, tendremos

$$Q = [(M_A + M_B) - (M_C + M_D)]\, c^2$$

Se cumple la conservación de la energía, pero no la de la masa en reposo si $Q \neq 0$.

Un ejemplo importante, con el que se han comprobado experimentalmente las relaciones relativistas, lo constituye la reacción resultante de bombardear el litio con protones:

$$_3Li^7 + {}_1p^1 \rightarrow 2\,{}_2\alpha^4$$

La masa del núclido $_3Li^7$ es de 7,016004 u y la del protón 1,007825 u, con lo que la masa total inicial es 8,023829 u. La masa en reposo fi-

nal es 8,005206 u. Como resultado de la reacción, la masa en reposo de las partículas disminuye

$$\Delta m = 0{,}018623 \text{ u}$$

La correspondiente energía, que representa la energía cinética de las dos partículas α debe ser igual a

$$E = \Delta m c^2 = (0{,}018623 \text{ u})\, c^2$$

y como

$$1 \text{ u} = (931{,}48 \text{ MeV})\, c^{-2}$$

resulta

$$E = 17{,}3 \text{ MeV}$$

que coincide, con gran precisión, con los valores determinados experimentalmente para la energía. Aun cuando no se conserva la masa en reposo, sí se conserva la masa relativista

$$m(v)_{\text{Li}} + m(v)_{\text{p}} = 2\, m(v)_{\alpha}$$

Con el fin de que el lector fije las ideas adquiridas en el texto y sepa manejarlas, se proponen a continuación diversas cuestiones para ser analizadas y, a ser posible, discutidas entre varios lectores. Lo esencial es meditar y razonar sobre ellas, más que sacar las conclusiones a que hubiere lugar.

Para orientación de los lectores se da, en páginas posteriores, una solución muy escueta a algunas de las cuestiones. Dicha solución no debe considerarse más que como indicio de un resultado al que hay que llegar a través de un razonamiento prolijo basado en la teoría del texto.

CUESTIONARIO

1. ¿Es aplicable la fórmula de Coulomb para hallar la fuerza entre cuerpos cargados de dimensiones arbitrarias?
2. ¿Cuánto valdrá la constante de proporcionalidad de la fórmula de Coulomb, si se quisiera obtener la fuerza en toneladas, dando las cargas en unidades electrostáticas y la distancia en milímetros?
3. Al acercar a un péndulo eléctrico una barra de ámbar frotada con una piel de conejo, lo atrae; ¿quiere esto decir que el péndulo está cargado positivamente? Si lo repeliera, ¿significaría ello que estuviera cargado negativamente?
4. ¿Cómo podemos cargar negativamente un conductor sin comunicarle cargas?
5. ¿Por qué es nulo el campo eléctrico en el interior de un conductor en equilibrio?
6. Dos placas paralelas muy extensas están cargadas con distribuciones superficiales de carga iguales y del mismo signo. ¿Qué campo eléctrico existe entre las placas? ¿Y si las densidades superficiales fueran opuestas?
7. Dibujar las líneas de fuerza del campo electrostático creado por una carga puntiforme positiva situada frente a una placa cargada negativamente.
8. ¿Puede ser nulo el potencial en un punto de un campo eléctrico y no serlo la intensidad del campo en el mismo punto?
9. ¿Puede ser nula la intensidad del campo electrostático en un punto sin serlo el potencial en dicho punto?
10. Un cuerpo no puede tener nunca una carga de $2{,}0 \times 10^{-19}$ C. ¿Por qué?
11. ¿Por qué es constante el potencial de un conductor en equilibrio?
12. Cuando un electrón pasa de *A* a *B* siendo el potencial de *A* mayor que el de *B*, ¿el electrón gana o pierde energía? ¿Cuánta?
13. ¿Cómo influye la temperatura en la polarización de un dieléctrico?
14. Si a un condensador cargado le sacamos el dieléctrico, ¿qué le pasa a su energía?
15. ¿Qué ocurre cuando entre dos conductores hay influencia total?
16. Un condensador está cargado. ¿Qué habrá que hacer para cuadruplicar su energía?

17. Tenemos dos condensadores iguales. Hallar la razón entre las capacidades de la asociación paralelo y la serie. ¿Qué ventaja tiene ésta sobre la otra?

18. Se descarga un condensador a través de una resistencia. ¿Depende el calor desprendido en la resistencia del valor de ésta? ¿Y la potencia calorífica en cada instante?

19. Montando en serie dos bombillas de distinta potencia a una ddp doble de la que debe existir en los terminales de cada una por separado, puede fundirse una de ellas. ¿Cuál?

20. ¿Cuál debería ser la condición a cumplir por un generador para que su rendimiento eléctrico fuera del 100 %?

21. En un puente de Wheatstone equilibrado permutamos la pila y el galvanómetro. ¿Subsiste el equilibrio?

22. Un conductor metálico recorrido por una corriente ¿pierde o gana electrones?

23. ¿Cómo debe ser la resistencia exterior a un generador para que éste suministre al circuito exterior la máxima potencia posible?

24. Si cae agua sobre la resistencia de un hornillo eléctrico, la parte no mojada se funde con frecuencia. ¿Por qué ?

25. ¿Por qué en una pila en circuito cerrado es menor la ddp entre sus terminales que la fem?

26. Si el agua es no conductora de la electricidad, ¿por qué es peligroso tocar un cable con las manos mojadas?

27. Si a un cristal de germanio le ponemos impurezas de arsénico, ¿qué clase de conductibilidad presenta?

28. ¿A qué portadores se debe la conductibilidad de los gases?

29. ¿Qué diferencia hay entre ddp de contacto y fem Peltier? ¿Cuáles son sus órdenes de magnitud?

30. ¿Por qué hay que recargar los acumuladores de plomo antes de que se descarguen totalmente?

31. ¿Cuándo se produce la descarga disruptiva?

32. ¿Qué diferencia hay entre chispa eléctrica y arco eléctrico?

33. Se lanza un electrón perpendicularmente a un campo constante y se observa que en éste la trayectoria es: (*a*) circular, y (*b*) parabólica. ¿De qué clase de campo se trata?

34. Por medios magnéticos, ¿cómo se puede averiguar si por un hilo pasa corriente? ¿Y el sentido de la misma?

35. ¿Puede ocurrir que un campo magnético no ejerza fuerza alguna sobre un electrón en movimiento?

36. Dos electrones se mueven paralelamente a igual velocidad (en un instante). Comparar la fuerza electrostática de repulsión con la electromagnética de atracción si son iguales los sentidos de movimiento.

37. ¿Qué le ocurre a un muelle arrollado en espiral cuando lo atraviesa una corriente muy intensa. Despréciese el efecto calorífico.

38. ¿Por qué no sirve el ciclotrón para acelerar electrones?

39. Una cinta de goma de forma circular se recubre de una capa conductora. Se la coloca en un campo magnético normal al plano de la espira. ¿Qué le sucede a la cinta si por ella circula una corriente?

40. Colocamos un disco metálico ligero, que puede girar alrededor de un eje horizontal que pasa por su centro, en un campo magnético paralelo al eje y con un borde sumergido en mercurio (rueda de Barlow). Si hacemos circular una corriente del eje al mercurio, la rueda gira. Si invertimos el sentido de la corriente, se invierte el sentido de giro. Si invertimos simultáneamente el sentido de la corriente y el del campo magnético, ¿en qué sentido girará la rueda? Justifíquense las afirmaciones anteriores.

41. Tenemos dos varillas conductoras horizontales y unimos los extremos de la izquierda a los terminales de una pila. Cerramos el circuito con un trozo de alambre que se apoya sobre dichas varillas. El alambre tiende a moverse. ¿Por qué?

42. Dentro de un gran solenoide colocamos otro pequeño suspendido de un hilo. Si hacemos circular una corriente por cada uno de ellos, ¿qué ocurre?

43. Deducir la ley de Biot y Savart a partir de la ley de Ampère.

44. Explicar cómo puede determinarse si un semiconductor es tipo p o tipo n, aprovechando el efecto Hall.

45. Comparar los fenómenos asociados al efecto Hall, a la Magnetohidrodinámica y a la viscosidad, poniendo de relieve las diferencias fundamentales.

46. Cuando se mueve un electrón, crea un campo magnético. ¿Por qué no son imanes todas las sustancias, si en su interior hay muchísimos electrones en movimiento?

47. ¿De qué manera rápida se puede desimanar un imán?

48. Diseñar un dispositivo para desimanar un reloj.

49. ¿Está presente el diamagnetismo en todos los materiales? ¿Y el paramagnetismo?

50. Definir la intensidad de imanación, la susceptibilidad magnética y la permeabilidad magnética.

51. Al dibujar el ciclo de histeresis de un material se toma en ordenadas: (*a*) la intensidad de imanación, y (*b*) la inducción magnética. ¿En qué caso tiende a la horizontal la curva de saturación?

52. Disponemos de dos barras de acero de igual forma y dimensiones, una imanada y otra no. Sin utilizar ningún otro dispositivo, ¿cómo podríamos averiguar cuál es la imanada?

53. ¿Qué clase de material conviene emplear para imanes permanentes? ¿Y para núcleos de maquinaria electromagnética?

54. ¿En qué consiste y a qué se debe el efecto Barkhausen?

55. En las condiciones de trabajo ordinario de un circuito magnético su permeabilidad magnética relativa vale 1000. Se aumenta 1 mm la longitud de su entrehierro. ¿Cuánto habría que haber alargado el hierro

del circuito magnético (sin alterar el entrehierro) para obtener la misma variación de reluctancia?

56. Hallar las dimensiones de la fuerza magnetomotriz en el sistema Giorgi.

57. Un conductor rectilíneo vertical lo desplazamos en un plano vertical: (*a*) según un meridiano, y (*b*) según un paralelo. Si la celeridad es la misma en ambos casos, ¿en cuál de ellos será mayor la fem inducida?

58. La fem inducida por unidad de longitud puede considerarse como un campo eléctrico. ¿En qué se diferencia del campo electrostático?

59. ¿Por qué los núcleos de los transformadores no son de una pieza maciza?

60. ¿A qué se debe el efecto cortical que se produce en los conductores sometidos a campos que no varíen lentamente?

61. En un mismo campo magnético se hacen girar dos aros de igual radio y masa, uno de un material *A* de gran resistividad y otro de un material *B* de gran conductividad. ¿A cuál de los dos habrá que aplicar mayor momento para mantenerlo en un régimen dado de rotación?

62. El péndulo metálico de un radiestesista amortigua su oscilación cuando está próximo a un polo magnético. Dar una interpretación física del fenómeno.

63. Las piezas polares de un betatrón determinan una vertical. Mirando desde arriba la trayectoria electrónica en un instante en que se intensifica el campo magnético siendo la pieza polar superior el polo N, ¿en qué sentido se verán girar los electrones?

64. Dibujar una rueda de Barlow (cuestión 40) con el campo magnético supuesto existente solamente en la porción del borde sumergida en el mercurio. Sustituyamos el generador que la alimentaba por una resistencia y marquemos en la periferia de la rueda cuatro puntos: 1, 2, 3 y 4, que determinan los cuatro cuadrantes. ¿Entre qué par de puntos se induce mayor fem al hacer girar la rueda?

65. Expresar el coeficiente de autoinducción de un solenoide de *N* espiras en función del flujo instantáneo por espira y de la intensidad instantánea de la corriente.

66. Demostrar que el cociente entre el coeficiente de autoinducción y la resistencia eléctrica tiene, en el sistema giorgi, las dimensiones de un tiempo.

67. Cerramos el circuito de una pila con: (*a*) un condensador, (*b*) una bobina. Para que la corriente tienda rápidamente a su intensidad de régimen, ¿cómo deberán ser la capacidad de (*a*) y la autoinducción de (*b*), grandes o pequeñas? Si se duplicara la resistencia del circuito, ¿cómo deberían alterarse *C* y *L* para obtener la misma rapidez de crecimiento de la intensidad?

68. Para disminuir el efecto de los rayos en el camino que va del pararrayos a tierra se pone una bobina. ¿Por qué?

69. Por un conductor recto e indefinido circula una corriente. ¿Cuántas veces mayor será la densidad de energía del campo magnético en un punto situado a 1 m del conductor que en otro situado a 10 m?

70. Dos corrientes de igual intensidad circulan por conductores paralelos:

(*a*) en el mismo sentido, (b) en sentidos opuestos. Determinar, en uno y otro caso, los puntos en que es mínima la densidad de energía del campo magnético resultante.

71. Si descargamos un condensador mediante una resistencia pura o mediante una bobina no resistiva, ¿cuál de los dos procesos dura más?

72. ¿Qué sucede con la energía almacenada en un condensador cuando se descarga a través de una bobina sin resistencia? ¿Y cuando la descarga es oscilante amortiguada? ¿Y cuando es aperiódica?

73. ¿Puede ocurrir que la tensión eficaz entre dos puntos de un circuito recorrido por corriente alterna sea superior a la existente entre los terminales del generador que lo alimenta?

74. ¿Por qué el valor eficaz de una corriente alterna difiere del valor medio?

75. En un circuito resonante se aumenta la capacidad en un 100 %. ¿Qué hay que hacer con la autoinducción para que siga siendo resonante el circuito?

76. En una instalación de corriente continua basta disponer de un voltímetro, un amperímetro y un cronómetro para conocer la energía consumida. ¿Es ello también suficiente en una instalación de corriente alterna?

77. De dos condensadores de distinta capacidad conectados a una misma red de corriente alterna, ¿cuál consume más energía?

78. Para medir la intensidad de una corriente alterna se emplea el amperímetro térmico. ¿Por qué?

79. ¿Por qué a las compañías eléctricas les interesa que sus abonados tengan factores de potencia elevados?

80. Cuando se quiere aumentar el factor de potencia de una instalación inductiva, suele asociarse en paralelo con ella un condensador adecuado. ¿Por qué no se conecta en serie ?

81. En la cuestión anterior, si se conectara en serie el condensador, ¿qué habría que asociar además para que no varíen las condiciones de funcionamiento de la instalación (aparte del factor de potencia)?

82. Cuando se sintoniza una emisora con un aparato de radio se varía la capacidad de un condensador variable. Si queremos sintonizar una emisora de mayor frecuencia que la que estamos escuchando, ¿qué hemos de hacer con la capacidad?

83. ¿Se aumentaría la sensibilidad de un galvanómetro aumentando la intensidad del campo magnético en el plano del cuadro?

84. ¿Cómo se transforma un amperímetro en voltímetro?

85. Al hacer una medida, nos equivocamos y mantenemos un amperímetro como si fuera un voltímetro, ¿qué ocurre? ¿Y al revés?

86. ¿Por qué para medir la fem de un generador de c.c. conviene emplear un potenciómetro en vez de un voltímetro?

87. En una dinamo de excitación: (*a*) serie, (b) paralelo, ¿cómo ha de ser la resistencia del inductor?

88. Explicar cuál es la función del reostato de arranque en un motor de c.c.

89. ¿Qué condición debe cumplirse en un transformador con núcleo de hierro, para poder considerar que la razón de las intensidades del primario y secundario sea la recíproca de la razón de transformación?

90. Un transformador con el secundario en circuito abierto equivale a una reactancia pura. Si practicáramos en el núcleo un entrehierro, ¿cómo afectaría al coeficiente de autoinducción?

91. Tres impedancias iguales están conectadas en triángulo entre las tres fases de una línea trifásica. Si no hay nada más conectado a ésta, ¿por dónde circulará una corriente más intensa, por un hilo de la línea o por una impedancia? ¿Y si estuvieran en estrella?

92. ¿Por qué en la distribución urbana de la energía eléctrica es necesario emplear las tres fases y un hilo neutro?

93. Diseñar un dispositivo para generar un campo magnético giratorio con cuatro corrientes que se hallen en cuadratura de fase cada una respecto a otras dos.

94. Detallar las principales características de los motores de inducción.

95. ¿Cómo se puede aumentar la intensidad de saturación de un diodo dado?

96. Cuando un metal se pone incandescente, emite electrones. ¿De qué depende la cantidad de éstos que se emite?

97. ¿Qué ventajas presenta el cátodo de caldeo indirecto en las válvulas electrónicas?

98. Explicar el funcionamiento de un diodo de Zener.

99. ¿Cómo es la frecuencia de la onda rectificada por un rectificador de media onda, respecto a la de la onda que se rectifica? ¿Y si el rectificador fuera de onda completa?

100. ¿Qué ventaja presenta el rectificador de la figura 11.8 respecto al de la figura 11.7?

101. Explicar en qué consiste la acción de un filtro en L. ídem de un filtro en π.

102. ¿De dónde parten los electrones que alcanzan la placa de un triodo de vacío? ¿Cuándo lo harán desde el propio cátodo?

103. Por un punto Q de una de las características estáticas de placa de un triodo de vacío trazamos una recta horizontal. ¿Qué mide la longitud del segmento limitado por Q y la intersección de dicha horizontal con la característica correspondiente a una tensión de reja superior en 1 V a la que corresponde a Q?

104. Si la recta trazada fuera vertical, ¿qué mediría el segmento limitado entre las dos características mencionadas?

105. La resistencia de placa de una válvula de vacío *no* es el cociente entre una tensión continua aplicada a la placa y la intensidad de la corriente que atraviesa la válvula. ¿Por qué?

106. Poner ejemplos en los que figuren amplificadores de tensión y de potencia.

107. En un amplificador de triodo, ¿cuál es el valor máximo inaccesible que puede tener la amplificación?

108. Dibújense los tres tipos de circuito amplificador de transistor.

109. ¿Qué relación existe entre el factor de ganancia de intensidad α de un transistor y el factor de amplificación de intensidad del amplificador con emisor común?

110. ¿Cuál es el circuito de realimentación en los osciladores Armstrong y sintonizado en placa?

111. Dibujar un esquema simple de oscilador sintonizado *en reja*.

112. ¿Qué se deduce de las ecuaciones de Maxwell-Ampère y Maxwell-Faraday?

113. En una onda electromagnética, ¿qué posición relativa tienen los vectores **E**, **B** y **v** (velocidad de propagación)? ¿Es **E** newtoniano?

114. Significado físico del vector de Poynting.

115. Se irradia una superficie metálica con radiaciones de frecuencias cada vez menores. Si al disminuir la frecuencia se aumenta proporcionalmente la intensidad de las ondas incidentes, ¿se mantendrá constante el número de fotoelectrones emitidos?

116. ¿Qué diferencia hay entre la producción de rayos X y el efecto fotoemisor?

117. Enumérense los distintos efectos fotoeléctricos y dígase en qué consiste cada uno de ellos.

118. ¿Por qué no tienen la misma frecuencia todos los fotones emitidos por el anticátodo de un tubo de rayos X?

119. ¿Qué ocurriría si la luz se propagase con la misma celeridad en todos los medios?

120. ¿Y si el índice de refracción no dependiese de la longitud de onda?

121. Manteniendo constante la distancia entre dos puntos. ¿cómo podemos aumentar el camino óptico entre los mismos?

122. Dos puntos se encuentran a distancia constante en el vacío, ¿podemos disminuir el camino óptico entre los mismos?

123. En la teoría de la emisión de Newton, cuando la luz pasa del medio 1 al medio 2, la ley de la refracción es sen i/sen $r = v_2/v_1$. ¿Cómo puede ponerse de manifiesto que esta ley es incorrecta?

124. Si no existiera la atmósfera terrestre, ¿se vería salir el Sol antes o después de la hora habitual?

125. ¿Por qué nos parecen más cerca de la superficie los objetos sumergidos en una vasija con agua, observados por encima de la citada superficie?

126. ¿Aumentaría la profundidad aparente de un objeto en el fondo de una vasija con agua al sustituir el agua por otro líquido? (Véase tabla de índices de refracción.)

127. Un observador quiere ver un objeto sumergido. ¿En qué condiciones lo verá por reflexión total?

128. ¿Cómo podemos utilizar el fenómeno de la reflexión total para determinar el índice de refracción del líquido de manera sencilla?

129. Encima de un espejo plano colocamos una lámina de caras paralelas de vidrio y hacemos incidir oblicuamente un rayo luminoso. Determínese gráficamente la marcha del rayo. ¿Podría darse el caso de que no hubiera rayo emergente?

130. A un prisma le adaptamos una lámina de vidrio de caras paralelas y del mismo índice de refracción. ¿Varía la desviación del prisma?

131. Una de las caras del prisma la sumergimos en agua. ¿Varía su desviación?

132. Adaptamos un espejo plano a la cara de salida de un prisma. Dibújese la marcha de un rayo que incide normalmente a la cara de entrada.

133. La misma cuestión suponiendo que la luz incide oblicuamente a la cara de entrada.

134. Cítense algunos ejemplos de dioptrios planos y esféricos.

135. Tenemos una bola de vidrio y otra de latón. ¿Pueden considerarse dioptrios esféricos?

136. Un matraz lleno de agua, ¿puede considerarse un dioptrio o debe considerarse un sistema óptico?

137. ¿Cómo determinaremos de manera sencilla si un sistema óptico es convergente o divergente?

138. ¿Cómo determinar de manera sencilla la distancia focal de una lente delgada?

139. ¿Puede determinarse por el mismo método de la cuestión anterior la distancia focal de una lente gruesa? ¿En qué casos sería pequeño el error?

140. ¿Cuál es la mínima distancia a que podemos colocar un objeto de una lente delgada convergente para que forme una imagen real?

141. Si colocamos un objeto en el foco objeto de un sistema óptico convergente, ¿veremos su imagen? ¿Puede formarse sobre una pantalla? ¿Puede fotografiarse?

142. Una lente divergente, ¿puede formar imágenes reales?

143. ¿Podemos formar imágenes mayores que el objeto mediante un sistema óptico divergente?

144. Disponemos de dos lentes convergentes y dos divergentes de la misma distancia focal. Suponiendo lentes delgadas y colocándolas yuxtapuestas dos a dos, determínense los sistemas ópticos que podemos formar. ¿Y asociándolas en grupos de a tres?

145. Tenemos dos lentes delgadas convergentes de igual distancia focal. Las yuxtaponemos y luego vamos aumentando su separación. Discutir el sistema óptico obtenido estudiando la variación de la distancia focal con la distancia entre las lentes.

146. ¿Qué tipo de imagen da un espejo esférico convexo?

147. Si aumentásemos idealmente el radio de un espejo esférico convexo hasta convertirlo en plano, ¿qué le ocurriría a la imagen de un objeto fijo a distancia constante del espejo?

148. En un espejo esférico, ¿pueden coincidir imagen y objeto?

149. Un observador contempla su imagen en un espejo plano y en otro esférico convexo situado a la misma distancia. ¿En cuál de los dos es más luminosa la imagen?

150. ¿Son idénticas la imagen y el objeto en un espejo plano?

151. Observando las gafas que usa cierta persona, ¿cómo podremos saber si es miope o hipermétrope?

152. ¿Cómo debe usar una lupa una persona de presbicia muy acusada?

153. Un miope se ha hecho présbita con el tiempo. A corta distancia, ¿verá mejor o peor al quitarse las gafas de miope?

154. ¿Qué diferencia existe entre los anteojos construidos con dos lentes convergentes y los construidos con una convergente y otra divergente?

155. Para enfocar un microscopio, ¿qué se mueve, el objetivo o el ocular?

156. En un aparato de proyección obturamos la mitad inferior del objetivo. ¿Cómo veremos la imagen en la pantalla?

157. Diferencias fundamentales entre las ondas luminosas y las sonoras.

158. Al pasar una onda luminosa de un medio a otro, ¿qué magnitudes características de la misma varían y cuáles no?

159. Generalmente, una luz policromática se especifica por las longitudes de onda de sus componentes. ¿Sería mejor hacerlo por las frecuencias?

160. ¿Qué propiedades de las ondas luminosas se deducen del principio de Huygens?

161. ¿Podríamos realizar el experimento de Young con ondas sonoras?

162. Uno de los orificios del experimento de Young se cubre con una película delgada de celofán. ¿Qué le ocurre al máximo principal?

163. ¿Y si desplazamos el foco luminoso paralelamente a la pantalla que contiene los orificios?

164. Si los espejos de Fresnel no estuviesen casi en prolongación uno de otro, ¿qué les ocurriría a las franjas de interferencia?

165. En un espejo de Lloyd, ¿dónde hay que colocar el foco luminoso para que las franjas de interferencia se vean claras?

166. ¿Podríamos utilizar la superficie del agua del mar como espejo de Lloyd para observar interferencias con ondas de radar?

167. ¿Por qué no se utiliza luz blanca para observar las interferencias en el experimento de Young, espejos de Fresnel y espejo de Lloyd?

168. Explíquese la coloración de las pompas de jabón y de las manchas de aceite en un suelo húmedo.

169. ¿Qué diferencia existe entre los anillos de Newton vistos por reflexión o por transmisión?

170. Cítense algunas aplicaciones prácticas de los anillos de Newton.

171. ¿Cómo veríamos los anillos de Newton si iluminásemos con luz blanca o luz policromática?

172. En el experimento en el que se obtienen los anillos de Newton sumergimos una lente y el reflector en un líquido de índice de refracción superior al del vidrio de la lente y de la superficie reflectora. ¿Cómo se modifican los anillos?

173. ¿Cómo podríamos medir índices de refracción con el experimento de Young?

174. ¿Y con el espejo de Lloyd?

175. Con el interferómetro de Rayleigh, ¿podríamos determinar índices de refracción de líquidos? ¿Y la variación de los mismos con la temperatura?

176. ¿Cómo utilizar el interferómetro de Michelson como refractómetro para gases? ¿Y para medir variaciones de índice de refracción?

177. ¿Cómo influyen los fenómenos de difracción en la Óptica geométrica?

178. ¿Cómo explicar de manera sencilla las analogías y diferencias entre los fenómenos de interferencias y de difracción?

179. Con el principio de Huygens, ¿puede explicarse correctamente el fenómeno de la difracción?

180. Si disminuimos la anchura de una rendija, ¿se verán más separados o más próximos los máximos y mínimos de difracción?

181. La intensidad de los máximos, ¿aumentará o disminuirá?

182. Disminuyendo progresivamente la anchura de una rendija, ¿se llegaría a eliminar los máximos y mínimos? Si es así, ¿cuándo ocurriría?

183. ¿Qué condición debe cumplir una red de difracción?

184. ¿Podemos obtener una red de difracción fotografiando una regla graduada?

185. Dadas dos redes de difracción, ¿cómo podemos saber cuál tiene mayor número de trazos por unidad de longitud observando su espectro?

186. Tenemos un espectro solar obtenido por medio de un prisma y otro con una red de difracción. ¿Cómo podemos saber cuál es uno y otro?

187. ¿Cómo podemos aumentar el poder separador de un microscopio?

188. ¿Y el de una red de difracción?

189. ¿Cómo podemos observar objetos de fase?

190. ¿Cómo podemos averiguar si una luz está polarizada rectilíneamente?

191. ¿Puede determinarse el plano de polarización de una luz polarizada rectilíneamente?

192. ¿Difiere en algo la luz polarizada por reflexión de la polarizada por un prisma de Nicol?

193. El ángulo de incidencia brewsteriano, ¿depende de la longitud de onda?

194. ¿Pueden ocurrir los fenómenos de polarización en las ondas longitudinales?

195. ¿Cómo averiguar si un cristal es anisótropo?

196. El eje óptico de un cristal anisótropo uniáxico, ¿puede determinarse con un procedimiento óptico sencillo?

197. Dado un cristal uniáxico, ¿cómo distinguiremos el rayo ordinario del extraordinario?

198. ¿Podemos averiguar si una luz está polarizada circular o elípticamente?

199. ¿Qué hay que hacer para saber si un cristal es ópticamente activo?

200. Diferencias fundamentales entre espectroscopios y espectrógrafos.

201. Ventajas del espectrógrafo de red.

202. ¿Puede usarse una red de difracción para un espectrógrafo de rayos X?

203. Defínanse las magnitudes características de la emisión térmica, expresando las correspondientes unidades de medida en el sistema cgs.

204. La constante h, ¿la halló PLANCK teórica o experimentalmente?

205. Principales consecuencias de la ley de Planck.

206. ¿En qué sentido revolucionaron las ideas de PLANCK el pensamiento científico de su tiempo?

207. Difrencias fundamentales entre fosforescencia y fluorescencia.

208. ¿Por qué el rendimiento luminoso de un tubo fluorescente es superior al de una lámpara de incandescencia?

209. Si iluminamos un papel blanco, ¿en qué condiciones será su emitancia como foco secundario igual a su iluminación, supuesta uniforme?

210. Con un foco luminoso puntiforme, ¿cómo podemos iluminar uniformemente una pantalla?

211. ¿Qué significa una mezcla sustractiva de colores?

212. ¿Cuáles son los valores máximos de las coordenadas de cromaticidad?

213. ¿Pueden ser nulas a la vez las tres coordenadas?

214. ¿Vemos los mismos colores iluminando con una lámpara fluorescente que con una de incandescencia?

215. ¿Qué significa la pureza de un color?

216. Tenemos tinta roja y la diluimos en agua destilada. ¿Varía la pureza de su color? ¿Y la longitud de onda dominante?

217. ¿Qué inconvenientes tiene el modelo atómico de Rutherford?

218. En dicho modelo, ¿se utilizaban las ideas cuánticas?

219. Las hipótesis de Bohr respecto a su modelo atómico, ¿eran arbitrarias o se deducían de algún principio más general?

220. ¿Qué importancia tiene para la Física el principio de correspondencia de Bohr?

221. ¿Se han comprobado experimentalmente las ideas de De Broglie?

222. La Mecánica Cuántica, ¿parte de nuevos principios? ¿Formula de otra manera los principios de la Física clásica? ¿Mantiene alguno de ellos y propone otros nuevos?

223. ¿Cómo se resolvió el dualismo onda-corpúsculo?

224. ¿En qué difieren la emisión espontánea y la emisión estimulada?

225. ¿Cuáles son las características fundamentales de la luz procedente de un laser?

226. ¿Qué concepto físico permite explicar la estructura fina del espectro?

227. ¿Qué fenómeno interpreta el spin nuclear? ¿Cuánto vale el momento cinético correspondiente?

228. Escribir las transmutaciones que se producen en las familias radiactivas del uranio, del actinio y del torio.

229. ¿Qué relación existe entre la vida media τ de un elemento radiactivo y su período de semidesintegración T?

230. ¿Qué se obtiene al bombardear el berilio con partículas α?

231. Si la masa de un núclido es mucho menor que la suma de las masas de sus nucleones libres, el núclido ¿es estable o no?

232. Compárense los procesos de fisión y fusión nuclear, atendiendo a los modernos explosivos bélicos.

233. Ventajas e inconvenientes de los modelos nucleares de la «gota» y estratiforme.

234. ¿Qué son los números mágicos?

235. La reacción $\nu + {}_0n^1 \rightarrow \mu^- + {}_1H^1$ ¿corresponde a una interacción fuerte o débil?

236. Comprobar que en la reacción

$$ {}_1H^1 + {}_1H^1 \rightarrow {}_1H^1 + \Lambda^0 + K^+ $$

se conserva el número bariónico.

237. De las dos reacciones

a) $ {}_1H^1 + {}_1H^1 \rightarrow {}_1H^1 + \Xi^0 + K^0 + K^+ $ *b)* $ \pi^+ + {}_1H^1 \rightarrow \Sigma^+ + \pi^+ $

una es imposible. ¿Cuál y por qué?

RESPUESTAS AL CUESTIONARIO

1. No.
3. No. Sí.
5. Porque los electrones libres no han de absorber ni efectuar trabajo al moverse.
9. Sí. Ejemplo: Conductor cargado en equilibrio.
11. Igual contestación que en 5.
13. Si las moléculas son polares las desordena y a $\Delta T > 0$ corresponde disminución de P.
15. Tienen cargas opuestas de igual valor absoluto.
17. 4:1. Puede soportar doble tensión.
19. La de menor potencia, que tiene mayor resistencia.
21. Sí.
23. Igual a la interna.
25. Por desprenderse calor dentro de la pila.
27. Tipo n.
29. Volt; milivolt.
31. Cuando se produzcan por choque tantos electrones que puedan mantener la descarga.
33. (a) magnético; (b) electrostático.
35. Sí; si es paralelo al movimiento.
37. Se contrae.
39. Según el sentido, se alarga o se contrae.
41. Por la acción del campo magnético creado por la corriente en las varillas sobre la corriente en el alambre.
47. Calentándolo.
49. Sí. No.
51. En el (a).
53. Uno de gran campo coercitivo. Uno de ciclo de histeresis estrecho.
55. 1 m.
57. En (b).
59. Para evitar pérdidas por corrientes de Foucault.
61. Al B.
63. En el de las agujas del reloj.
65. $L = N \dfrac{d\Phi}{di}$.
67. (a) pequeña, (b) pequeña. Dividir C por 2. Multiplicar L por 2.
69. 100.
71. El segundo.
73. Sí. Caso de resonancia aguda (R pequeña).
75. Reducirla a la mitad.
77. Ninguno de los dos.
79. Para reducir las pérdidas en la línea al reducir la intensidad.
81. Una resistencia en serie que iguale la impedancia a la existente en ausencia de condensador.

para que circule la misma intensidad.

83. Sí.

85. Se quema. Se reduce mucho la intensidad.

87 (*a*) pequeña; (*b*) grande.

89. Que funcione a plena carga.

91. En triángulo, $\sqrt{3}$ veces mayor por la línea. En estrella, igual.

95. Elevando la temperatura del cátodo.

97. Todos sus puntos al mismo potencial constante. Con ello se evita el zumbido que originaría una c.a. calefactora.

99. Igual. Doble.

103. μ.

105. Porque las características no son rectas concurrentes en el origen.

107. μ.

109. $\alpha/(1-\alpha)$.

113. Mutuamente ortogonales. No.

115. Podría ser, mientras la frecuencia se mantenga superior a la umbral.

117. Fotoemisor, fotovoltaico y fotoconductor.

119. No existiría refracción ni, por tanto, lentes, etc.

121. Interponiendo un medio de índice de refracción superior.

123. Experimentalmente.

125. Por la marcha del rayo refractado agua-aire.

127. Si estuviese también sumergido.

131. Sí.

135. No.

137. Formando la imagen de un objeto sobre una pantalla.

139. Sí. Si los planos principales están muy próximos al centro de la lente.

141. Sí. No. Sí.

143. No.

147. Tendería a la posición simétrica respecto al espejo.

149. En el segundo.

151. Comprobando si es divergente o convergente (los ojos se ven menores o mayores, respectivamente).

153. Mejor.

155. El objetivo.

159. Sí; pero en el vacío es indistinto.

161. Con orificios adecuados, sí. Con los mismos, no.

163. Se desplaza en sentido contrario.

165. Muy cerca del espejo.

167. Porque se mezclarían los máximos y mínimos correspondientes a longitudes de onda diferentes.

169. En el mínimo o máximo central.

171. Confusos.

175. No. Sí.

179. No.

181. Disminuirá.

185. Por la separación de las rayas.

187. Aumentando la apertura numérica o disminuyendo la longitud de onda.

189. Transformando variaciones de fase en variaciones de intensidad.

191. Sí.

193. No.

195. Por la existencia de doble refracción.

197. Girando el cristal.

199. Mandar luz a lo largo del eje óptico, estando el cristal entre dos nicoles cruzados.

209. Si no absorbe.

213. No.

221. Sí.

225. Coherencia, intensidad concentrada, haz casi paralelo.

227. La estructura hiperfina del espectro. $I(h/2)$ siendo I entero si A es par, e $I = k + 1/2$ si A es impar.

229. $T = \tau \ln 2$.

231. Sí.

235. Débil.

237. La (b) no conserva la extrañeza.

PROBLEMAS

1. Determinar la relación entre las fuerzas repulsiva electrostática y atractiva gravitatoria de dos partículas alfa. Datos: $m = 4 \cdot 1{,}47 \cdot 10^{-27}$ kg; $q = 2e = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ C; $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2 $\cdot$ kg^{-2}; $1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ m/F.

   Resp. $F_e/F_g = 3 \cdot 10^{35}$

2. Hallar el valor de ε_0 en un sistema de unidades en el que la fuerza se mide en toneladas, la carga en microcoulomb y la distancia en km.

   Resp. $(9{,}8/4\pi)10^6$ $(\mu C)^2/km^2 \cdot Tm$

3. ¿Cuál sería la unidad de campo eléctrico en el sistema anterior y a cuánto equivale en V/m?

   Resp. 1 V/m $= (1/9{,}8)10^{-9}$ Tn/μC

4. Dos cargas puntiformes iguales $+e$ están situadas en los puntos $(b, 0, 0)$ y $(-b, 0, 0)$. Por efecto de las fuerzas que ejercen, una carga $-e$ gira alrededor del eje Ox describiendo en el plano Oxy una circunferencia de radio R. Determinar la velocidad angular de dicha carga, cuya masa es m.

   Resp. $$\omega^2 = \frac{1}{2\pi\,\varepsilon_0} \quad \frac{e^2}{m\,(R^2 + b^2)^{3/2}}$$

5. En cada uno de los vértices de un cuadrado de lado a tenemos una carga igual a q. Si colocamos otra carga puntiforme q (igual a las anteriores) de masa m, en un punto situado a una distancia $x \ll a$ del centro sobre la recta que pasa por éste y es paralela a la base, determinar el movimiento de dicha carga.

   Resp. El movimiento es armónico simple.

6. Un aro de radio R tiene una carga uniformemente distribuida cuyo valor total es Q. Determinar: *a*) el potencial y el campo electrostáticos en un punto de su eje perpendicular al plano del mismo. b) ¿En qué punto del eje es máximo el módulo del campo?

   Resp. a) $$V = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \quad \frac{Q}{\sqrt{R^2 + Z^2}}; \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad \frac{QZ}{(R^2 + Z^2)^{3/2}}$$

   b) $$Z_m = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

7. Dos cargas $+q$ y $-2q$ están separadas un metro. Sus coordenadas respectivas son (0, 0, 0) y (0, 1, 0). Determinar la superficie equipotencial de potencial nulo, considerando nulo el potencial del infinito.

Resp. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2y = 1$

8. Determinar el campo y el potencial, *a*) en un punto interior y *b*) exterior, a una esfera maciza uniformemente cargada con una densidad cúbica de carga de ρ C/m^3, siendo R el radio de la esfera expresado en metros.

Resp. *a*) $E = \dfrac{1}{3\varepsilon_0}\rho r$; $V = \dfrac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)$;

b) $E' = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}$; $V' = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$

9. Determinar el potencial, *a*) en un punto interior y *b*) en uno exterior a un cilindro indefinido, uniformemente cargado con la densidad cúbica de carga ρ.

Resp. *a*) $V = -\dfrac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2 + C$; *b*) $V' = -\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\left(\ln \dfrac{r}{R} + \dfrac{1}{2}\right) + C$

10. La diferencia de potencial entre dos cilindros metálicos coaxiales, de radios $R = 1$ mm y $R' = 2$ mm, es de 10^4 V. Suponiendo estos cilindros muy largos, determinar el campo eléctrico en un punto situado a $r = 1{,}5$ mm del eje.

Resp. $E = 0{,}5 \cdot 10^5$ V/m (radial)

11. Determinar el campo eléctrico en un punto interior a una esfera cargada con una densidad cúbica de carga $\rho = kr$. Se conoce la carga total Q de la esfera, su radio R y la distancia d del punto al centro.

Resp. $E = Qd^2/(4\varepsilon_0 R^4)$

12. Dos cargas eléctricas iguales q están separadas una distancia $2a$. Determinar, *a*) el campo eléctrico en un punto de la mediatriz del segmento que las une; *b*) el valor máximo de tal campo.

Resp. *a*) $E = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0} \dfrac{qx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$

b) $E_m = q/a^2 3\sqrt{3}$

13. Sean dos iones de carga $+e$ separados una distancia $2a$ grande frente a las dimensiones de los iones. En la mediatriz del segmento que los une y a una distancia pequeña de su punto medio colocamos un electrón. Determinar su movimiento.

Resp. M.a.s. de período $T = \dfrac{2\pi a}{e}\sqrt{\dfrac{2\pi\varepsilon_0 m a}{e}}$

14. En una esfera maciza uniformemente cargada con la carga Q, practicamos un orificio diametral de sección pequeña. Colocamos un electrón en el borde del orificio. Determinar el movimiento. La esfera tiene un radio R mucho mayor que el de la sección del orificio.

Resp. M.a.s. de pulsación $\omega = \sqrt{\dfrac{Qe}{4\pi\varepsilon_0 R^3}}$

15. En el vértice A del ángulo recto de un triángulo rectángulo ABC cuyos catetos miden $b = 3$ m y $c = 4$ m, colocamos una carga puntiforme de 10^{-9} C. *a*) Determinar el trabajo necesario para trasladar una carga $q' = 10^{-8}$ C, también puntiforme, desde el vértice B al C. *b*) ¿En qué posición estará la carga q' sometida a mayor fuerza?

Resp. *a*) $75 \cdot 10^{-5}$ J; *b*) A 2,4 m de A.

16. Un aro horizontal de 1 m de radio está cargado uniformemente. Desde un punto de su eje de simetría normal a su plano, distante 1 m, se deja caer una pequeña esfera de masa $m = 1$ g y carga $q = 10^{-3}$ C. ¿Cuánto debe valer la carga total del aro para que la esfera se detenga en el centro del mismo?

Resp. $3{,}8 \cdot 10^{-9}$ C

17. Una partícula de masa $m = 0{,}0002$ g y carga $q = 10^{-7}$ C, se lanza desde un punto muy alejado, con una velocidad de 2 km/s, hacia el centro de una esfera uniformemente cargada con densidad superficial $\sigma = \dfrac{1}{\pi} 10^{-3}$ C/m². Siendo el radio de la esfera $R = 1$ m, determinar a qué distancia se detiene la partícula.

Resp. A 9 m del centro

18. Determinar la velocidad mínima de una partícula alfa para que lanzada en la dirección de la mediatriz del segmento que une dos iones positivos de carga e atraviese la barrera de potencial.

Resp. $8{,}3 \cdot 10^3$ m/s

19. Una esfera está cargada uniformemente con densidad cúbica $\rho = 10^{-8}$ C/m³. En su interior existe una cavidad esférica cuyo centro dista del de la esfera cargada $d = 0{,}5$ m y su radio es tal que sumado con d da una longitud inferior al radio de la esfera. Calcular la intensidad del campo eléctrico en un punto interior a la cavidad.

Resp. 188,4 V/m

20. En la vertical del centro de una esfera con carga Q y a una distancia b de su centro C, por debajo de la misma, suspendemos un péndulo electrostático de masa m, longitud b y carga q. Colocado inicialmente en

posición horizontal y abandonándolo, determinar la velocidad del mismo en el instante en que ocupa la posición vertical.

Resp. $$v = \sqrt{2gb + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 m b}(\sqrt{2}-1)}$$

21. Un campo eléctrico tiene por componentes $E_x = ax$, $E_y = ay$, $E_z = 0$; (a es constante). Determinar el potencial en un punto, sabiendo que en el origen el potencial es nulo. Determinar, *a*) el trabajo realizado al desplazar una carga q del punto $(x, y, 0)$ al $(x', y', 0)$. b) La densidad cúbica de carga en un punto cualquiera del plano Oxy.

Resp. *a*) $$W = \frac{qa}{2}(x'^2 + y'^2 - x^2 - y^2)$$

b) $$\rho = 2a\varepsilon_0$$

22. En un campo eléctrico uniforme de intensidad $E = 4000$ V/m colocamos una capa eléctrica simple plana, de densidad $\sigma = \frac{1}{\pi} 10^{-6}$ C/cm², que forma un ángulo de 30° con el campo. Determínese el campo una vez colocada la carga.

Resp. A un lado de la capa: $E_x' = 2\sqrt{3} \cdot 10^3$ V/m; $E_y' = 2 \cdot 10^4$ V/m
Al otro lado: $E_x'' = 2\sqrt{3} \cdot 10^3$ V/m; $E_y'' = -16 \cdot 10^3$ V/m

23. Una esfera de $R = 2$ m está cargada con una densidad cúbica directamente proporcional a la distancia al centro. Sabiendo que la carga total es $Q = 10^{-8}$ C, determinar el potencial en el centro, suponiendo nulo el del infinito.

Resp. 60 V

24. Una esfera de radio 1 m cargada uniformemente con una densidad cúbica de 10^{-8} C/m³ tiene en su interior una cavidad esférica de radio 0,4 m, cuyo centro O' diste 0,4 m del de la esfera O. En el centro de la cavidad tenemos un electrón que lo mantenemos en reposo. Al soltarlo, parte de O' y se dirige a la pared de la cavidad. Determinar el tiempo empleado y la velocidad de llegada ($e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $m = 0{,}91 \cdot 10^{-30}$ kg).

Resp. $t = 0{,}17$ μs; $v = 4{,}51 \cdot 10^6$ m/s

25. Una esfera conductora está cargada con una densidad superficial $\sigma = 10^{-5}$ C/m². El radio es $R = 2$ m. Determinar la fuerza repulsiva entre los dos hemisferios que se obtienen al cortarla por un plano diametral.

Resp. 7,2 N

26. Dos conductores aislados, de capacidades C_1 y C_2, están suficientemente alejados para poder despreciar los fenómenos de influencia. Sus cargas son Q_1 y Q_2. Los unimos mediante un hilo muy delgado (capacidad des-

preciable). Determinar, *a*) las cargas de cada uno de ellos después del contacto; *b*) la carga que ha pasado de uno a otro.

Resp. *a*) $Q_1' = \dfrac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} C_1$; $\quad Q_2' = \dfrac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} C_2$;

b) $\dfrac{Q_1 C_2 - Q_2 C_1}{C_1 + C_2}$ (del 1.° al 2.°)

27. Para calibrar un electrómetro, operamos de la siguiente forma: Conectamos un conductor de capacidad $C_1 = 10^4$ pF con carga $q_1 = 45 \cdot 10^{-8}$ C a dicho electrómetro y éste se desvía 15 divisiones. A continuación, sin descargar el electrómetro, se conecta a otro conductor de capacidad $C_2 = 5$ nF, cargado con $2 \cdot 10^{-7}$ C, observando una desviación de 20 divisiones. Suponiendo que se han evitado los fenómenos de influencia y despreciando la capacidad de los cables de conexión, determinar, *a*) la capacidad del electrómetro; *b*) su constante.

Resp. *a*) $2 \cdot 10^{-8}$ F; $\quad$ *b*) $k = 1$ V/división

28. Dos esferas conductoras concéntricas tienen los radios respectivos de $R_1 = 1$ m, $R_2 = 2$ m y $R_3 = 3$ m. Si unimos la tercera con la primera, determinar la capacidad del sistema.

Resp. $(8/9)10^{-9}$ F

29. Una muestra de diamante tiene una densidad de 4 g/cm^3. Situada en un campo eléctrico uniforme se polariza uniformemente, siendo el momento dipolar por unidad de volumen igual a 10^{-6} C/m^2. Calcular el momento dipolar medio de cada átomo.

Resp. $0{,}497 \cdot 10^{-35}$ C·m

30. En un condensador plano en el que la distancia entre las armaduras es h, colocamos paralelamente a ellas una lámina dieléctrica de constante dieléctrica ε_r. Sabiendo que la ddp entre armaduras es V, determinar: *a*) El campo eléctrico en el interior de la lámina; *b*) las cargas de polarización. El espesor de la lámina es a.

Resp. *a*) $E = \dfrac{V}{\varepsilon_r (h-a) + a}$; $\quad$ *b*) $\sigma' = \dfrac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) V}{\varepsilon_r (h-a) + a}$;

$\rho' = 0$; $\quad \sigma_1' = -\sigma'$; $\quad \sigma_2' = \sigma'$

31. En un condensador plano, las armaduras distan 2 mm. Introducimos entre ellas una lámina paralela a las mismas y de $\varepsilon_r = 4$. Determinar el espesor de la lámina para que se duplique la capacidad del condensador.

Resp. 4/3 mm

32. Un condensador plano ideal, cuyas armaduras distan h, tiene una capacidad C_0. Introducimos una lámina de espesor a paralela a las armaduras. Determinar: *a*) La capacidad del condensador en estas condiciones. *b*) Si en vez de una lámina colocamos paralelamente a las armaduras n láminas de espesor a/n, determinar la capacidad.

Resp. *a*) $C = C_0 \dfrac{h}{h-a}$ b) Igual resultado

33. En un condensador plano, la constante dieléctrica varía con la distancia z a la armadura inferior según la ley $\varepsilon_r = k(z+h)/h$. Siendo h la distancia entre las armaduras. Determinar, *a*) la capacidad del condensador; *b*) las cargas de polarización.

Resp. *a*) $C = \dfrac{\varepsilon_0 k S}{h \ln 2}$; b) $\sigma_1' = -\sigma_2' = -\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)\dfrac{Q}{S}$

34. Un condensador esférico de radios R y R' tiene una capa dieléctrica esférica concéntrica de radios a y b. Siendo ε_r la constante dieléctrica de la capa, determinar *a*) la capacidad del condensador; *b*) las cargas de polarización.

Resp. *a*) $$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{a} + \frac{1}{\varepsilon_r}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{b} - \frac{1}{R'}\right]$$

b) $$\sigma'_a = -\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\frac{Q}{4\pi a^2}; \qquad \sigma'_b = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\frac{Q}{4\pi b^2}$$

35. Tenemos una esfera metálica de 0,5 m de radio, rodeada de otra concéntrica hueca de radios 1 m y 1,5 m, entre las cuales hay un dieléctrico de constante dieléctrica $\varepsilon_r = 2$. Rodeamos al conjunto con otra esfera hueca concéntrica cuyo radio interno es de 2 m. Entre la superficie externa de la anterior y la interna de esta última hay un dieléctrico de constante dieléctrica $\varepsilon_r' = 4$. Si entre la primera y la última establecemos una ddp $V = 1000$ V, determinar: *a*) la carga de la primera esfera; *b*) la ddp entre las dos primeras; *c*) la carga de la segunda.

Resp. *a*) 8/39 μC; b) 36/39 kV; c) 8/39 μC

36. Dos esferas metálicas concéntricas de radios R y R' (la segunda hueca) tienen entre las mismas una esfera hueca concéntrica de radios x y $x+b$. Determinar, sabiendo que la esfera intermedia también es conductora, *a*) la capacidad del conjunto y *b*) discutir el resultado según los valores de x comprendidos entre R y $R'-b$.

Resp. *a)* $$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} + \frac{1}{x+b} - \frac{1}{x}};$$

b) Si $x = R$ $\quad C = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{R'(R+b)}{R'-R-b}$

Si $x = R'-b$ $\quad C = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{R(R'-b)}{R'-R-b}$

37. Un condensador plano cuyas armaduras tienen una superficie de área S distan h. Posee una carga Q. Entre las armaduras y paralelamente a las mismas, colocamos una lámina dieléctrica de constante ε_r y espesor a. Hallar, *a)* la energía de dicho condensador; *b)* el trabajo necesario para extraer el dieléctrico.

Resp. *a)* $U = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\left(\dfrac{a}{\varepsilon_r} + h - a\right)$; *b)* $W = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{\varepsilon_0 S}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_r} - 1\right)$

38. Dos condensadores en paralelo, a determinada ddp poseen la energía U. En serie, con la misma ddp que antes, la energía total es $U/4$. Determinar, *a)* la razón de capacidades de dichos condensadores; *b)* cuál ha de ser dicha razón para que la energía en paralelo dividida por la energía en serie sea mínima.

Resp. *a)* $C_1 = C_2$; *b)* $C_1 = C_2$

39. Dos condensadores esféricos de radios $a = 2$ m, $b = 4$ m; $a' = 1$ m, $b' = 3$ m tienen las armaduras exteriores conectadas a tierra. La carga del primero es $Q = 10^{-5}$ C y la del segundo $Q' = 2 \cdot 10^{-6}$ C. Si unimos las armaduras interiores, determinar, *a)* las cargas que pasan de uno a otro; *b)* la variación de energía en este proceso.

Resp. *a)* 14/11 μC; *b)* 0,0065 J

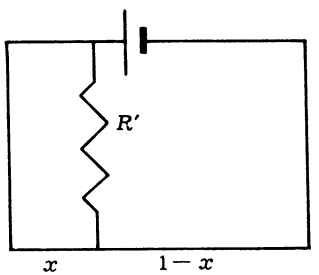
40. Un generador de fem constante e igual a 1 volt, resistencia interna r, se conecta a una resistencia R variable. Estudiar la potencia desarrollada en la resistencia R, dibujando una gráfica que represente la potencia en función de R.

41. Un aro de alambre homogéneo, tiene 1 m de radio y una resistencia por unidad de longitud de 1 ohm/m. Se conecta a una pila de fem E, por medio de alambres de resistencia despreciable, a dos puntos diametralmente opuestos. A otros dos puntos diametralmente opuestos se conecta una varilla de igual resistencia por unidad de longitud y que forma un ángulo θ con la dirección determinada por los dos puntos de conexión de la pila. Sabiendo que la resistencia interna de la pila es R_i, determinar la intensidad de la corriente que circula por la varilla.

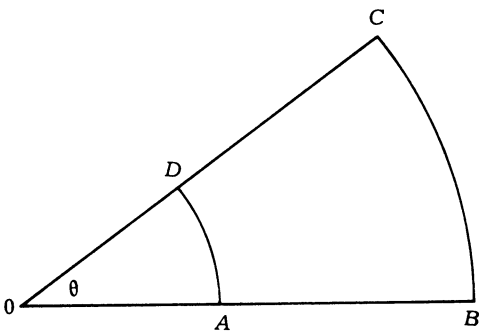
Resp. $$I = \frac{\pi - 2\theta}{\pi + 4} I_{\text{pila}}$$

42. Un hilo homogéneo de longitud 1 m y resistencia R se conecta a los polos de una pila de resistencia interna r. Desde el polo positivo de la pila se pone un hilo de resistencia R' que va a parar a cierto punto del hilo anterior. Determinar la posición de este punto para la cual sea mínima la intensidad de la corriente que circula por el primer hilo antes de dicho punto de contacto.

Resp. $$x = \frac{R + r}{2R}$$



Prob. 42



Prob. 43 y 44

43. De un disco de espesor c se recorta un sector de ángulo θ. Siendo γ la conductividad, determinar la resistencia de la corona $ABCD$, siendo AB y CD los electrodos.

Resp. $$R = \frac{\theta}{c\,\gamma \ln \dfrac{b}{a}}$$

44. El mismo problema 43, suponiendo ahora que los electrodos son AD y BC.

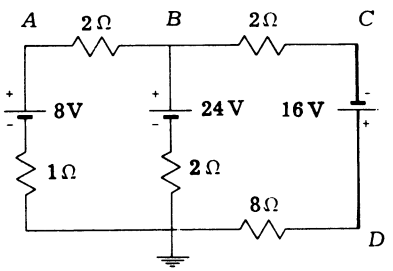
Resp. $$R = \frac{1}{\gamma\,\theta\,c} \ln \frac{b}{a}$$

45. Determinar la resistencia de una pieza en forma de tronco de cono de altura h, radios de las bases r_1 y r_2 y cuya conductividad es γ.

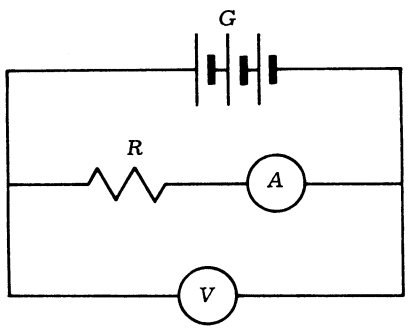
Resp. $$R = \frac{h}{\pi\,\gamma} \frac{1}{r_1 r_2}$$

46. Determinar la variación relativa de la resistencia de una varilla metálica al aplicarle un esfuerzo longitudinal. Aplicación: Esfuerzo = 2000 kp/cm², módulo de Young, $E = 20\,000$ kp/cm², coeficiente de Poisson $\sigma = 0{,}5$.

Resp. $$\frac{R'-R}{R} = \frac{1+2\sigma}{\frac{E}{\Phi} - 2\sigma}; \qquad \frac{R'-R}{R} = \frac{2}{9}$$



Prob. 47



Prob. 48

47. Los generadores del circuito representado en la figura se consideran con resistencia interna nula. Determinar los potenciales de los puntos *A*, *B*, *C* y *D*.

Resp. $V_A = 10$ V; $V_B = 14$ V; $V_C = 8$ V; $V_D = 24$ V

48. En el circuito representado, el generador de corriente continua *G* tiene una resistencia interna de 0,5 ohm, $R = 20$ ohm y el voltímetro tiene una resistencia de 100 ohm. El amperímetro marca 2 A y el voltímetro 41 V. Hallar, *a*) la fem del generador; *b*) la resistencia del amperímetro.

Resp. *a*) 42,2 V; *b*) 1 ohm

49. Un motor de 5 CV funciona a 220 V. A plena carga (es decir, cuando proporciona 5 CV) su rendimiento es del 83 %. A media carga es del 74 %. ¿Cuál será la intensidad de la corriente que atraviesa el motor en uno y otro caso?

Resp. $I = 20{,}4$ A; $i = 11{,}5$ A

50. Una varilla horizontal está recorrida por una corriente. Si está situada en una región del campo gravitatorio terrestre donde existe un campo magnético uniforme, horizontal, perpendicular a la varilla, determinar la densidad de corriente necesaria para que la varilla esté en equilibrio. La densidad de la varilla es *D*.

Resp. $J = Dg/B$

51. Una varilla se apoya sobre dos guías horizontales, perpendicularmente a las mismas, situadas en un campo magnético uniforme de intensidad $B = 0{,}1$ tesla, dirección vertical y sentido hacia abajo. Sabiendo que la densidad de la varilla es de 8 g/cm^3, el coeficiente de rozamiento con las guías de la varilla $k = 0{,}2$ y que la densidad de corriente en ésta es $J = 0{,}3$ A/mm^2, determinar el movimiento de la varilla.

Resp. La varilla desliza sobre las guías con una aceleración constante de 1,79 m/s^2.

52. Disponemos de una balanza de uno de cuyos platillos pende un cuadro vertical por cuyos lados puede circular una corriente eléctrica. El lado inferior, horizontal, se encuentra en un campo magnético uniforme, perpendicular al plano del cuadro. Dicho lado inferior tiene una longitud de 1 cm y la corriente que circula tiene por intensidad 0,49 A. Si teníamos la balanza equilibrada previamente, para restablecer el equilibrio cuando circula la corriente hay que modificar en 0,5 g la masa de uno de los platillos. Determinar el campo magnético. Si invertimos el sentido de la corriente, ¿cómo restableceremos el equilibrio?

Resp. $B = 1$ T

53. En el interior de un solenoide de 10 espiras por centímetro, tenemos un condensador plano con las armaduras paralelas al eje del solenoide. Se aplica una ddp $V = 1000$ V entre dichas armaduras. Se desprende un electrón de la armadura negativa y se dirige a la positiva, pero al llegar a la mitad de la distancia entre armaduras se desconecta la tensión y en cambio se conecta el solenoide a un generador que hace circular por él una corriente de 2 A. Determinar el camino que sigue el electrón. Valor de la carga específica del electrón: $e/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ C/kg.

Resp. Circunferencia de $R = 0{,}305$ cm situada en plano normal al eje del solenoide.

54. Dos espiras circulares iguales de radio a se colocan una frente a otra separadas por una distancia a (espiras de Helmholtz). Demostrar que la variación del campo magnético creado por dos corrientes (una en cada espira) de iguales intensidad y sentido es mínima en la parte central.

55. Dos hilos rectos, paralelos, muy largos, se unen por un extremo mediante un alambre de forma semicircular de radio a igual a la mitad de la distancia entre los hilos. Determinar el campo magnético en el centro de la semicircunferencia cuando circula una corriente de intensidad I.

Resp. $B = \mu_0 I\,(2+\pi)/4\,\pi\,a$

56. Determinar el valor de μ_0 en un sistema de unidades en donde la fuerza se mida en kp y la intensidad de la corriente en unidades electromagnéticas (1 u.e.m. = 10 A).

Resp. $\mu_0 = 39{,}2\ \pi \cdot 10^{-9}$ kp/(u.e.m.)^2

57. Determinar el campo magnético en el centro de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio R, constituido por

alambre fino, por cuyos lados circula una corriente de intensidad I. Compruébese que cuando el número de lados tiende a infinito, el campo coincide con el de una espira circular.

Resp. $$B = \frac{\mu_0}{2\pi} I n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

58. Una esfera de material no magnético se bobina con hilo fino, con N espiras por unidad de longitud. Siendo R el radio de la esfera e I la intensidad de la corriente en el hilo, determinar el campo magnético en el centro.

Resp. $$B = \frac{2}{3} \mu_0 N I$$

59. Por los lados de un triángulo ABC, rectángulo en A, circula una corriente de intensidad 600 A. Sabiendo que $AB = c = 3$ cm, $AC = b = 4$ cm, determinar el campo magnético en el punto O tal que BO sea paralelo a AC y CO lo sea a AB.

Resp. $B = 10^{-3}$ T y normal al plano del triángulo

60. Determinar la fuerza que se ejercen dos cargas q que llevan velocidades del mismo módulo y direcciones perpendiculares.

Resp. $$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \sqrt{1 + \left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2}$$
dirección arc tg (v^2/c^2)

61. Determinar la fuerza que se ejercen dos cargas móviles que llevan velocidades de igual módulo que son paralelas y del mismo sentido.

62. Un electrón describe una órbita circular de radio R. Calcular la razón del momento magnético al momento cinético.

Resp. $M/L = e/2m$

63. Una varilla conductora se desliza sin rozamiento con velocidad constante a lo largo de dos guías paralelas, situadas en un plano horizontal, separadas una distancia b, en una región donde existe un campo magnético **B** uniforme, vertical y hacia abajo. En el extremo de las guías tenemos una resistencia R que cierra el circuito. Despreciando la resistencia de la varilla y de las guías, determinar: *a*) la intensidad de la corriente inducida; *b*) la potencia necesaria para mover la varilla; *c*) la potencia disipada por efecto Joule en el circuito.

Resp. *a*) $I = Bbv/R$; b) $P = B^2b^2v^2/R$; c) igual que b)

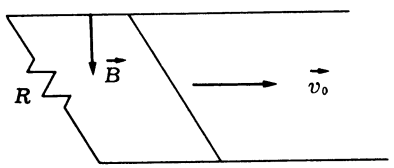
64. Determinar el coeficiente de autoinducción de un solenoide largo de n espiras, sección recta S y longitud l.

Resp. $L = \mu_0 Sn^2/l$

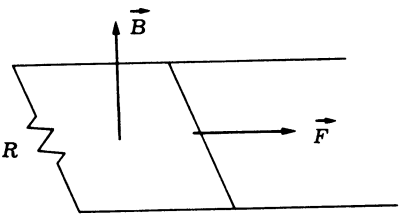
65. Hallar la energía almacenada en un solenoide recorrido por una corriente de intensidad I, análogo al del problema 64.

Resp. $$U = \frac{1}{2}\mu_0 S n^2 I^2 / l$$

66. Dos carriles horizontales, paralelos, están unidos en un extremo por una resistencia eléctrica R, siendo despreciable la de los carriles. Colocamos una varilla metálica de masa m apoyada en los carriles perpendicularmente a la dirección de los mismos, de resistencia despreciable y exenta de rozamientos. Comunicamos a dicha varilla una velocidad inicial v en la dirección de los carriles y hacia la derecha (véase figura). Dejando deslizar libremente la varilla una vez comunicada la velocidad inicial y sabiendo que existe un campo magnético uniforme **B** normal al plano de los carriles y hacia abajo, siendo b la separación de dichos carriles, determinar: *a*) la velocidad de la varilla en función del tiempo; b) comprobar que la pérdida de energía cinética es igual al efecto Joule en la resistencia, en el intervalo de tiempo considerado.
Sugerencia: Véase el problema 51.



Problema 66



Problema 67

67. Dos guías horizontales de resistencia eléctrica despreciable están unidas por un extremo mediante una resistencia $R = 0{,}1$ ohm. Encima de aquéllas colocamos una varilla que puede desplazarse sin rozamiento a lo largo de ellas, manteniéndose perpendicular a las mismas. La separación de las guías es de 0,5 m. Establecemos un campo magnético de 0,2 tesla y aplicamos una fuerza constante $F = 0{,}1$ kp horizontal y perpendicular a la varilla, observándose que al principio ésta se acelera hasta alcanzar una velocidad constante. Determinar: *a*) Esta velocidad; b) la potencia consumida en el experimento.

Resp. *a*) $v = 9{,}8$ m/s; b) $P = 4{,}8$ W

68. Una varilla de longitud l puede girar en un plano vertical en torno a un eje horizontal normal al plano del movimiento, estando situada en un campo magnético **B** paralelo al eje de rotación y uniforme en toda la región del movimiento. Determinar la ddp que aparece entre los extremos de la varilla en el instante en que forma un ángulo de 45° con la

vertical. La posición inicial de la varilla es horizontal y la soltamos sin velocidad inicial.

Resp. $$V = \frac{1}{2} B \sqrt{\frac{3\sqrt{2}\, g}{2\, l}} R^2$$

69. Un solenoide de 200 espiras por cm está conectado a una pila de fem 100 V y resistencia interna 1 ohm. La resistencia del hilo del solenoide es de 3 ohm. Dentro de este solenoide, colocamos un circuito circular de 1 cm de radio normal al eje del solenoide. Sabiendo que la resistencia de este circuito es de 0,5 ohm, determinar la cantidad de electricidad inducida al interrupir la corriente en el solenoide.

Resp. $Q = 4 \cdot 10^{-4}$ C

70. Un electrón gira en torno de un protón describiendo una órbita circular. Siendo el momento cinético $h/\sqrt{2}$, determinar el momento magnético de dicha órbita electrónica. Datos: $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J.s; $e/m = 17{,}6 \cdot 10^{10}$ C/kg.

Resp. $M = 13 \cdot 10^{-24}$ A.m^2

71. Tenemos una impedancia desconocida. Al aplicarle una tensión continua de 120 V circula por ella una corriente de intensidad 2 A, mientras que si aplicamos una tensión alterna eficaz de 125 V, la intensidad eficaz de la corriente es de 1,25 A. *a*) Determinar la reactancia inductiva. b) Sabiendo que la frecuencia es de 50 Hz, hallar el coeficiente de autoinducción.

Resp. *a*) $X = 80\ \Omega$; b) $L = 0{,}25$ H

72. Aplicando una ddp alterna de valor eficaz 125 V a un condensador, circula una corriente de intensidad eficaz 2 mA. Sabiendo que la frecuencia es de 50 Hz, *a*) hallar la capacidad del condensador. b) ¿Cuál sería la intensidad eficaz de la corriente, si colocamos entre las armaduras del condensador una lámina dieléctrica, del mismo espesor que la distancia entre las armaduras, cuya constante dieléctrica sea 4?

Resp. *a*) $C = 0{,}05\ \mu$F; b) $I = 8$ mA

73. Tenemos en serie una resistencia R, una bobina y un condensador. La bobina tiene resistencia despreciable y un coeficiente de autoinducción de 25 mH. El condensador tiene una capacidad de 50 μF. Sabiendo que la tensión instantánea es $v = 120$ sen $400\ t$ y que la intensidad está adelantada 60° respecto a la tensión, hallar: *a*) la resistencia, b) la caída de tensión en ella y c) el diagrama de tensiones.

Resp. *a*) $R = 23{,}09\ \Omega$; b) 40,43 V

74. Un circuito consta de una resistencia $R = 20$ ohm, en serie con una bobina de coeficiente de autoinducción $L = 0{,}01$ H y un condensador de capacidad $C = 20\ \mu$F. Determinar: *a*) La intensidad de la corriente; b) su diferencia de fase con una tensión de 100 V eficaces aplicada entre los extremos, siendo la frecuencia de la corriente $f = 50$ Hz. c) Deter-

minar cuál será la frecuencia de resonancia y *d*) cuánto valdrá la intensidad de la corriente en la resonancia.

Resp. *a*) 0,64 A; *b*) 82° 41' 40"; *c*) 2240 s^{-1}; *d*) 5 A

75. Dada una bobina de resistencia $R = 10$ ohm y coeficiente de autoinducción $L = 0{,}5$ H, determinar la capacidad de un condensador que, conectado en paralelo con dicha bobina, produzca resonancia, siendo la pulsación $\omega = 500\ s^{-1}$.

Resp. $C = 7{,}98\ \mu F$

76. Tenemos dos bobinas en paralelo. La primera tiene una resistencia $R = 20$ ohm y una reactancia de 30 ohm. La segunda, una resistencia de 30 ohm y una reactancia de 20 ohm. Si la pulsación es de 100 π, determinar: *a*) la impedancia equivalente. *b*) Si se aplica una tensión eficaz de 200 V, determinar la potencia consumida.

Resp. *a*) $R_e = 13\ \Omega$, $L_e = 41{,}4$ mH; *b*) 1540 W

77. En paralelo con las bobinas del problema 76, conectamos un condensador para producir resonancia. *a*) Determinar su capacidad. *b*) ¿Cuál debería ser su capacidad si se conectara en serie?

Resp. *a*) 122,4 μF; *b*) 245 μF

78. Un tubo fluorescente 20 W conectado a una línea de corriente alterna de frecuencia 50 Hz y tensión eficaz 120 V. El factor de potencia del aparato fluorescente es de 0,8. Calcular la capacidad del condensador que hay que conectarle en paralelo, para que el conjunto tenga un factor de potencia igual a la unidad.

Resp. $C = 3{,}3\ \mu F$

79. Para medir la potencia que consume un circuito alimentado por corriente alterna, se conecta en paralelo con él una resistencia no inductiva de 100 ohm. Tres amperímetros de impedancias despreciables se conectan, uno en la línea de alimentación, otro en la rama de la resistencia de 100 ohm y el tercero entre el punto de conexión de ésta y el circuito problema. Las intensidades que señalan son, respectivamente, 15 A, 5 A y 12 A. Hallar el factor de potencia del circuito y la potencia que consume.

Resp. $\cos\varphi = 0{,}47$; $P = 2820$ W

80. Un cierto generador de corriente alterna tiene una impedancia interna que puede considerarse como una resistencia pura de 90 kilohm. Alimenta a otra resistencia pura de 900 ohm a través de un transformador cuyo primario está conectado al generador y cuyo secundario está cerrado por la resistencia de 900 ohm. *a*) ¿Cuánto ha de valer la razón de transformación para que la potencia disipada dentro del generador sea igual a la que se entrega a la resistencia exterior? *b*) Si no se utilizara el transformador y se conectara la resistencia exterior directamente a

los terminales del generador, ¿cuántas veces mayor sería la potencia perdida dentro del generador que la entregada a la resistencia externa?

Resp. *a*) $N_1/N_2 = 10$; *b*) 100

81. La energía que se suministra a una instalación la transporta un sistema de corrientes trifásicas cuya tensión eficaz entre hilos de la línea es de 220 V. La instalación consta de un conjunto de lámparas de incandescencia agrupadas en triángulo que absorbe una potencia de 3 kW con un factor de potencia igual a 1 y un motor trifásico, conectado en estrella, de 10 CV, cuyo factor de potencia es 0,8. Los circuitos están siempre equilibrados. Calcular: *a*) La intensidad eficaz en cada hilo de la línea cuando sólo funcionan las lámparas. *b*) Lo mismo cuando sólo funciona el motor. *c*) Lo mismo cuando están encendidas todas las lámparas y el motor funciona. *d*) El factor de potencia del conjunto de la instalación en el caso *c*).

Resp. *a*) 7,87 A; *b*) 24,1 A; *c*) 30,8 A; *d*) 0,88

82. Una emisora emite a una frecuencia de 1,5 MHz. Sabiendo que su potencia es de 1 kW, hallar el número de fotones emitidos por segundo.

Resp. 10^{30}

83. La longitud de onda umbral para el potasio es $4{,}36 \cdot 10^{-7}$ m. Determinar el trabajo de extracción.

Resp. 2,85 eV

84. El cátodo de una célula fotoeléctrica es de cinc ($W = 4{,}11$ eV). Iluminando con luz monocromática de $\lambda = 3000$ Å, determinar: *a*) la energía máxima de los electrones emitidos; *b*) la celeridad máxima; *c*) el potencial de detención; *d*) la longitud de onda umbral.

Resp. *a*) 0,031 eV; *b*) $1{,}04 \cdot 10^5$ m/s; *c*) 2,85 V; *d*) 302 nm

85. La energía de extracción de la plata es de 3,82 eV. Determinar la frecuencia umbral y dibujar la gráfica del potencial de detención en función de la frecuencia.

Resp. $9{,}23 \cdot 10^{14}$ Hz

86. En el wolframio, la frecuencia crítica vale $1{,}30 \cdot 10^{15}$ Hz. Determinar: *a*) La longitud de onda crítica; b) la energía de extracción; *c*) el potencial de detención cuando se ilumina con luz de $\lambda = 200$ nm.

Resp. *a*) $2{,}3 \cdot 10^{-7}$ m; *b*) 5,38 eV; *c*) 8,28 V

87. Un haz monocromático de luz de longitud de onda $\lambda = 589$ nm incide sobre un iceberg que flota en el mar. El índice de refracción del hielo es $n_h = 1{,}32$ y el del agua del mar en aquellas condiciones es $n' = 1{,}34$. Determinar, en el interior del iceberg y en el agua, *a*) la celeridad, b) la longitud de onda y c) la frecuencia, de la luz considerada. Tómese como celeridad de la luz en el aire $c_a = 2{,}98 \cdot 10^8$ m/s. *d*) ¿Qué error se cometería si se tomase $c = 3 \cdot 10^8$ m/s?

Resp. a) $v_l = 2{,}26 \cdot 10^8$ m/s, $v_a = 2{,}24 \cdot 10^8$ m/s; b) $\lambda_l = 446$ nm, $\lambda_a = 439$ nm; c) $5{,}06 \cdot 10^{14}$ Hz; d) $< 0{,}5$ %

88. Un pescador ve la luz de un submarino cuando pasa por su vertical y continúa viéndola hasta que se ha desplazado 50 m. Sabiendo que el índice de refracción del agua del mar lo tomamos igual a 1,4 determinar: a) la profundidad del submarino. b) ¿A qué profundidad lo vio al pasar por la vertical?

Resp. a) 49 m; b) 35 m

89. Desde un avión se observa la imagen de un submarino a 90 m de aquél en su misma vertical. Sabiendo que el avión se halla a 85 m sobre el nivel del agua, determinar la profundidad del submarino. Dato: Indice de refracción del agua del mar, $n = 1{,}4$.

Resp. 7 m

90. El avión del problema 89 mantiene el vuelo horizontal y va observando al submarino. ¿A qué distancia lo verá si lo observa según un ángulo de 60°?

Resp. 103,5 m

91. Un rayo luminoso incide en una esfera de 6 cm de radio e índice de refracción $n = 2$. Determinar a qué distancia del centro corta a la recta que, trazada por el centro, es paralela al rayo incidente si éste dista 2 cm de dicha recta.

Resp. 5,83 cm

92. Suponiendo que el iceberg del problema 87 es una lámina de caras planas y paralelas, determinar el ángulo entre el rayo incidente y el emergente al llegar al agua, siendo el ángulo de incidencia 45° y el espesor 2 m.

Resp. 13° 9′ cm

93. Tenemos una lámina de caras planas y paralelas de espesor 3 cm, constituida por un vidrio de índice de refracción tal que si incide un rayo luminoso en la lámina con un ángulo de 45°, dicho rayo se desplaza lateralmente 9 mm. Determinar el ángulo que ha de tener un prisma del mismo vidrio para que la mínima desviación sea de 45°.

Resp. 75° 35′ 31″

94. Tenemos un prisma de vidrio de ángulo 30° e índice de refracción 1,5. Determinar la desviación de un haz monocromático que incide perpendicularmente a una cara del prisma.

Resp. 18° 35′ 25″

95. En el prisma del problema 94, determinar para qué ángulo de incidencia el rayo emergente tiene igual dirección que el que atraviesa el vidrio.

Resp. 48° 35′ 25″

96. Un prisma de ángulo refringente 45° está sumergido en agua. El índice de refracción del vidrio del prisma es $n_v' = 1{,}52$ y el del agua $n_a = 1{,}33$. Un haz luminoso monocromático incide sobre una cara del prisma con un ángulo $i = 30°$. Determinar el valor de la desviación.

Resp. 6° 54′ 30″

97. Tenemos una esfera de vidrio de radio 60 mm. En la parte central hemos practicado una ranura en forma de prisma de ángulo 3° y en la misma ponemos un líquido de índice $n' = 1{,}73$. El índice del vidrio es de 1,52. Determinar qué distancia debe haber entre un rayo incidente paralelo a un eje que pase por el centro de la esfera, perpendicularmente a la bisectriz del ángulo del prisma y dicho eje, para que el citado rayo no sufra desviación al atravesar el sistema refringente.

Resp. 0,63 mm

98. Un largo bloque de vidrio, de índice $n = 1{,}5$ termina en una forma esférica convexa de radio $R = 12$ cm. Colocamos un pequeño objeto luminoso a 30 cm del vértice. Determinar: *a*) la posición, *b*) la naturaleza de la imagen y *c*) el aumento angular. Resolver el problema gráfica y analíticamente.

Resp. *a*) $x' = 180$ cm; *b*) real, invertida y mayor; *c*) $-1/6$

99. En una pecera con agua de índice de refracción 4/3 tenemos un pez de 2 cm de largo situado a 20 cm del centro y en una horizontal que pasa por el centro. Determinar: *a*) la posición y *b*) el tamaño de la imagen, sabiendo que $R = 60$ cm.

Resp. *a*) $x' = -36$ cm; *b*) 2,4 cm

100. Plateamos un hemisferio de una esfera de vidrio de radio 2 cm y $n = 1{,}5$. Colocamos un objeto luminoso en un punto situado a 6 cm del centro (del lado del hemisferio no plateado). Determinar la imagen de dicho punto.

101. Un bloque de vidrio de índice 1,80 termina en una superficie convexa, la cual está sumergida en un líquido de índice de refracción 1,44. Colocando un pequeño objeto luminoso a 24 cm del vértice, alineado con el centro, su imagen se forma a 15 cm del vértice dentro del dioptrio. Determinar: *a*) el radio del dioptrio; *b*) el aumento.
Resp. *a*) 2 cm; *b*) $\beta = -0{,}5$

102. Un bloque de vidrio de índice de refracción 1,53 termina en una superficie cóncava de radio 2 cm. Colocando dicho bloque en agua de índice 1,33 determinar la imagen de un pequeño objeto luminoso colocado a 20 cm del vértice, en el agua y alineado con el centro. Resolución gráfica y analítica.

Resp. $x' = -9{,}19$ cm, $\beta = 0{,}4$, virtual, derecha y menor

103. Un dioptrio esférico de radio 10 cm está constituido por vidrio de índice de refracción 1,50 (en la parte convexa) y cierto líquido. Colocando un

objeto luminoso en el eje del dioptrio y a 40 cm del vértice, dentro del líquido, *a*) determinar la posición de la imagen en función del índice de refracción del líquido; *b*) representar gráficamente la variación de x' con n; *c*) hallar para qué índice no tendremos imagen.

Resp. *a*) $x' = \dfrac{12}{1{,}2-n}$; *c*) $n = 1{,}2$

104. Una lente delgada biconvexa, de radio 1 m, tiene aire en su cara de entrada y agua en la de salida. Colocamos un objeto luminoso a 3 m de la cara de entrada. Sabiendo que el índice de refracción del agua es 4/3 y que el del vidrio es 3/2, determinar la posición, aumento y naturaleza de la imagen.

Resp. A 4 m del vértice de la lente, dentro del agua, real, invertida y del mismo tamaño

105. Una lente biconvexa de espesor 5 cm tiene sus radios $R_1 = 4$ cm y $R_2 = -2$ cm. La cara de radio R_2 está en contacto con agua ($n = 4/3$) y la otra en el aire. Determinar el sistema óptico equivalente, sabiendo que el índice de refracción del vidrio de la lente es 1,5.

Resp. $f = -5{,}76$ cm, $HH_1 = 1{,}6$ cm
$f' = 7{,}68$ cm $H_2'H' = -3{,}2$ cm

106. Una lente biconvexa de radios iguales a 60 cm tiene un espesor de 50 cm. En la cara de entrada hay un líquido de índice de refracción igual a 1,3, en la de salida otro cuyo índice es 1,4 y el vidrio tiene por índice de refracción 1,5. Colocando un objeto pequeño a 3 m del vértice y en el eje, determinar: *a*) la posición de la imagen; *b*) el aumento.

Resp. *a*) La imagen dista de la cara de salida $x' = 2003{,}1$ cm;
b) $\beta = 6{,}0$

107. Una lente planocóncava de radio 10 cm y otra planoconvexa del mismo radio, se unen por la cara plana. El índice de refracción de la primera es de 1,5 y el de la segunda 1,8. Determinar el sistema óptico equivalente, sabiendo que el espesor de la primera es de 6 cm y el de la segunda de 12 cm.

Resp. $d = \dfrac{32}{3}$ cm $HH_1 = 11{,}74$ cm $f = -13{,}76$ cm

$D = \dfrac{109}{6}$ cm $H_2'H' = 7{,}34$ cm $f' = 13{,}76$ cm

108. Un jarrón de 40 cm de ancho está a 80 cm de un espejo plano. Un observador está situado a 1 m del espejo y el pie de la perpendicular al espejo dista 1,20 m del pie de la perpendicular del extremo próximo del jarrón al espejo. Determinar la anchura mínima de espejo que permita al observador ver justamente el ancho de la imagen del jarrón.

Resp. Anchura del espejo 2/9 m, estando su borde más próximo al pie de la perpendicular del observador al espejo a 2/3 m de dicho pie.

109. Tenemos un espejo cóncavo de 25 cm de radio. Colocamos un pequeño objeto de 1 cm de altura a 50 cm del objeto. Determinar: *a*) gráfica y analíticamente la posición y b) el tamaño de la imagen. *c*) ¿Para qué posición del espejo la imagen es doble?

Resp. *a*) $-50/3$ cm; b) $\beta = -1/3$; c) $x = -25/4$ cm

110. Un espejo convexo de radio 10 cm está sumergido en un líquido de índice de refracción $n = 1{,}5$. *a*) Determinar el sistema óptico equivalente. b) Colocamos un punto luminoso a 20 cm del espejo: determinar la posición de la imagen final.

Resp. *a*) $d = 0$, $D = 24$ cm, $H_1H = 0$, $f = 6$ cm, $H_2'H' = 0$, $f' = 4$ cm; b) $x' = 40/13$ cm

111. Entre un objeto luminoso y una pantalla distante 1 m tenemos una lente convergente de distancia focal 16 cm. Determinar: *a*) para qué posiciones de la lente se formará una imagen en la pantalla y b) hallar la razón de los tamaños de las imágenes.

Resp. *a*) $x_1 = 80$ cm, $x_2 = 20$ cm; b) 1/16

112. Un hemisferio de vidrio de índice de refracción 1,5 y radio 2 cm está situado en el aire (o en el vacío) de forma que la luz entre por su parte convexa. Determinar: *a*) los planos principales, b) focos, c) centro óptico y *d*) la posición de la imagen de un objeto situado a 5 cm del vértice en el eje principal.

Resp. *a*) $HH_1 = 0$, $H_2'H' = -4/3$ cm b) $f' = 4$ cm; *c*) $x_c = 0$; *d*) $p' = 20$ cm

113. Tenemos un hemisferio de vidrio de índice 1,5 colocado de manera que la luz entre por la cara plana. Delante de ésta tenemos un líquido de índice de refracción 1,25 y después de la cara convexa otro de índice 4/3. Determinar el sistema equivalente sabiendo que el radio es de 6 cm.

Resp. $H_2'H' = 0$, $H_1H = 5$ cm, $f = -45$ cm, $f' = +48$ cm

114. En el hemisferio del problema 113, determinar: *a*) cuál ha de ser el índice de refracción N del vidrio para que el plano principal objeto sea equidistante de la cara plana y del plano principal imagen. Colocando un pequeño objeto a 7 cm de la cara plana, determinar: b) la posición y *c*) el aumento de la imagen.

Resp. *a*) $N = 2{,}50$; b) $p' = 19{,}22$ cm; c) $\beta = -2{,}05$

115. Tenemos dos lentes delgadas convergentes de la misma potencia de 5 dioptrías. Las lentes distan 50 cm. Un punto luminoso está a la izquierda de la primera a 30 cm. *a*) Determinar la posición de la imagen b) Acercamos el objeto 10 cm a la lente: determinar la nueva posición de la imagen. *c*) Hallar el sistema óptico equivalente.

Resp. *a*) $p'' = 20/3$ cm; b) p'' a 20 cm de la 2.ª; *c*) $D = 10$ cm, $HH_1 = -100$ cm, $H_2'H' = 100$ cm, $f = +40$ cm, $f' = -40$ cm

116. El punto remoto de un ojo miope está a 80 cm. Determinar la distancia focal y la potencia de una lente que permita al miope ver, *a*) un objeto muy lejano sin acomodar; b) un objeto situado a 40 m, también sin acomodar.

Resp. *a*) $-1{,}25$ dioptrías; b) $-1{,}275$ dioptrías

117. Necesitamos una lupa que nos dé la imagen de un objeto ampliado tres veces. La imagen debe formarse a la distancia mínima de la visión neta (20 cm) colocando el centro óptico del ojo a 2 cm de la lupa. Determinar la potencia de esta lupa, supuesta lente delgada

Resp. 11,1 dioptrías

118. Disponemos de una lente convergente de distancia focal 40 cm y a su derecha otra divergente de igual distancia focal. Determinar a qué distancia debemos colocar las lentes (supuestas delgadas) para que la imagen de un objeto situado a la izquierda de la convergente, a 2,4 m, forme la imagen final 20 cm a la izquierda de la divergente.

Resp. 88 cm

119. Tenemos una lente delgada convergente de distancia focal 20 cm y otra divergente de distancia focal 40 cm, separadas 1,2 m. Determinar: *a*) el sistema óptico equivalente y b) la posición de la imagen de un objeto situado a 1 m de la primera. Resolución gráfica y analítica.

Resp. *a*) $D = 140$ cm, $HH_1 = -120/7$ cm, $H_2'H' = -240/7$ cm, $f = -40/7$ cm, $f' = 40/7$ cm;
b) Se forma a 27,38 cm a la izquierda de la lente divergente

120. Un ojo miope tiene el punto remoto a 150 cm. ¿Qué potencia deberá tener la lente que habrá que colocar delante para que los rayos que vienen del infinito converjan en la retina?

Resp. $-0{,}66$ dioptrías

121. Un ojo miope tiene el punto remoto a 10 cm. ¿Qué gafas necesita para leer a 25 cm?

Resp. De -6 dioptrías

122. Un hipermétrope tiene el punto próximo a 75 cm. ¿Qué gafas ha de usar para poder leer distintamente a 25 cm?

Resp. De $+2{,}66$ dioptrías

123. Determinar la menor dimensión de un objeto para que sus extremos aparezcan, para un ojo normal, como dos puntos separados, sabiendo que el ángulo mínimo correspondiente es de 1′ y que el punto próximo para el ojo normal es de 25 cm.

Resp. 0,0075 cm

124. En una pantalla tenemos dos orificios separados 2,4 micras. Iluminamos con luz monocromática de longitud de onda igual a 6000 Å, normalmente

a la pantalla. Determinar las direcciones para las cuales tendremos máximos de intensidad de las franjas de interferencia en puntos muy lejanos.

Resp. 0°, 14° 28′ 39″, 30°, 48° 35′ 25″, 90°

125. En el experimento de Young el foco dista 20 cm del plano de los orificios, los cuales están separados 1 mm. La pantalla donde se forman las franjas de interferencia dista 2 m del plano de los orificios. Estando el foco en la mediatriz del segmento determinado por los dos orificios, el máximo principal ($k = 0$) está sobre la pantalla en la dirección de aquella mediatriz. Si desplazamos el foco 0,5 mm hacia el plano de los orificios y 0,5 mm paralelamente al segmento que los une, determinar el desplazamiento del máximo antes citado.

Resp. -5 mm

126. Un objetivo de cámara fotográfica tiene un recubrimiento o película antirreflectora de espesor 0,0758 micras, cuyo índice de refracción es 1,8. Sabiendo que el índice del vidrio del objetivo es menor que 1,8, *a*) determinar la longitud de onda eliminada por interferencia. *b*) Si fuese mayor que 1,8 ¿cuál debería ser el espesor de tal película para que eliminase la misma longitud de onda?

Resp. *a*) 5460 Å (verde); *b*) 0,1516 micras

127. En el experimento de Young un orificio es mayor que otro, de manera que la amplitud de la onda luminosa que llega a la pantalla actuando sola es doble que la que llega del otro, también cuando actúa sola. Determinar: *a*) la intensidad en función del ángulo θ o de la posición z en la pantalla. *b*) La intensidad máxima I_m.

Resp. *a*) $I = \dfrac{I_m}{9\,(5 + 4\cos\theta)} = \dfrac{I_m}{9\left(5 + 4\cos\dfrac{2\,hz}{D}\right)}$;

b) $I_m = 9\,I_2$

128. En el experimento de los anillos de Newton usamos una lente planoconvexa de 10 cm e índice de refracción 1,6. Iluminamos con luz de $\lambda = 6000$ Å. *a*) Determinar el radio del tercer anillo oscuro. *b*) Si introducimos un líquido de índice 2, hallar el radio del tercer anillo oscuro, sabiendo que el vidrio sobre el que descansa la lente tiene un índice de 1,8.

Resp. *a*) 0,424 mm; *b*) 0,273 mm

129. El ángulo de los espejos de Fresnel es de 0,01 radianes. Iluminado con luz de $\lambda = 5890$ Å, determinar la distancia entre máximos consecutivos, sabiendo que el foco dista 20 cm de la intersección de los espejos y que la pantalla se encuentra a 1 m de tal intersección.

Resp. 1,767 mm

130. La antena de radar de un barco (supuesta foco puntiforme) dista 10 m de la superficie del mar. Considerando los fenómenos de interferencia como en el espejo de Lloyd, ¿a qué distancia será igual a 10 cm la separación de los máximos? La longitud de onda es de 2 cm.

Resp. Separación $= D\lambda/2d$, $D = 100$ m

131. Una rendija de anchura 1 mm se ilumina normalmente con luz monocromática de $\lambda = 5000$ Å. Determinar el ángulo del primer mínimo. Si colocamos una lenta convergente de distancia focal $f = 2$ m, determinar la separación de los dos primeros mínimos.

Resp. $\theta_1 = 0{,}0005$ rad; $\theta_2 = 0{,}001$ rad;
Separación $= f\,(\text{tg}\,\theta_2 - \text{tg}\,\theta_1) = 1$ mm

132. Sobre una red de difracción de 6000 trazos/cm incide luz azul del mercurio cuya longitud de onda es $\lambda = 4358$ Å. Determinar la desviación de la imagen difractada de segundo orden.

Resp. 31° 31′ 48″

133. El ángulo de polarización para el diamante es de 67° 34′. ¿Cuál es su índice de refracción?

Resp. $n = 2{,}422$

134. La potencia radiada por el Sol en forma de ondas electromagnéticas es de $3{,}8 \cdot 10^{26}$ W. La distancia del Sol a la Tierra es de $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m. Determinar la constante solar o valor medio teórico de la cantidad de calor por cm² y minuto que llega a la Tierra.

Resp. 1,929 cal/cm² · min

135. Determinar la densidad de energía en J/cm³ entre el Sol y la Tierra, utilizando el valor de la constante solar obtenido en el problema 134.

Resp. $4{,}47 \cdot 10^{-6}$ J/m³

136. Del análisis de la composición espectral de la luz solar (procedente de la fotosfera) se observa que presenta un máximo de intensidad para una longitud de onda de 5000 Å (luz verde del espectro visible). Determinar la temperatura de la superficie del Sol.

Resp. $T \simeq 5800$ K

137. Indíquese en cuánto debe elevarse la temperatura de una esfera de cobre para que emita una energía 16 veces superior.

Resp. $T_2 = 2\,T_1$

138. ¿Cuántas calorías por segundo emitirá la esfera anterior si su poder emisivo es $e = 0{,}3$, tiene un diámetro de 10 cm y está a una temperatura de 127 °C?

Resp. 3,3 cal/s

139. Una lámpara puntual uniforme tiene una intensidad de 400 cd y está colocada en la normal al plano de un círculo levantada desde el centro de éste. La distancia de la lámpara al plano es de 4 m y el radio del círculo es de 3 m. Calcular: *a*) El flujo luminoso que recibe el círculo. *b*) La iluminancia en el centro del círculo. *c*) La iluminancia en un punto de su borde.

Resp. *a*) 503 lm; b) 25 lx; c) 12,8 lx

140. En el vértice A de un triángulo equilátero ABC de lado 1 m hay una lámpara puntual de intensidad 2 cd. ¿Cuál será la iluminación producida por esta lámpara en un elemento infinitesimal de superficie (un punto) de la base BC muy próximo al vértice C y situado en el plano normal a esta base del triángulo?

Resp. $\sqrt{3}$ lx

141. Dos lámparas de 25 y 50 candelas están separadas 100 cm. ¿En qué punto situado entre ellas será iluminada una pantalla igualmente por ambas caras?

Resp. El normal a la pantalla y distante 0,414 m de la lámpara de 25 cd.

142. A una distancia $a = 1$ m de una pantalla colocamos un foco luminoso puntiforme de intensidad $I = 60$ cd. Por un punto de la normal a la pantalla que pasa por el foco citado situado a una distancia de 2 m de dicha pantalla, hacemos pasar un espejo plano inclinado 30° respecto a la normal mencionada. Determinar la iluminación en la intersección de dicha normal con la pantalla.

Resp. $10\,(6+\sqrt{3})$ lx

143. Una lámpara ideal irradia por igual, en todas direcciones, un flujo total de 20 lm. Colocamos dicha lámpara a 1 m de un espejo plano. Determinar la iluminación en el punto medio del segmento perpendicular a la pantalla limitado por ésta y la lámpara.

Resp. 7,073 lx

144. Una lámpara cuya intensidad luminosa es de 100 cd está colocada a una distancia de 1 m por encima de una mesa horizontal. *a*) ¿Cuál es la iluminancia del punto de la mesa situado directamente debajo de la lámpara? *b*) ¿Qué distancia ha de moverse la lámpara en dirección horizontal para reducir la iluminancia en dicho punto a una mitad del valor anterior?

Resp. *a*) 100 lx; b) 0,76 m

145. Una superficie plana MN pasa por el vértice O de un triángulo rectángulo isósceles AOB y está orientada de manera que es perpendicular a la bisectriz del ángulo recto AOB. En A y en B se colocan dos focos luminosos de igual intensidad $I = 50\sqrt{2}$ cd. Calcular la iluminación del punto O de la superficie, conociendo la altura $OH = 50$ cm.

Resp. 200 lx

146. Un manantial puntual luminoso, uniforme, está suspendido 4 m por encima de una mesa. La iluminancia de la mesa en el punto que se encuentra en la misma vertical es $E = 100$ lx. Se pide: *a*) ¿Cuál es la iluminancia E' en un punto de la mesa situado a 3 m del primero? b) ¿A qué distancia x del primer punto será la iluminancia de la mesa $E'' = 20$ lx?

Resp. *a*) $E' = 51{,}2$ lx; b) $x = 5{,}55$ m

147. Encima de cada vértice de una mesa cuadrada de 4 m de lado y a tres metros de altura sobre ella, tenemos una lámpara de intensidad 500 cd. Encima del centro y a la misma altura que las otras existe una quinta lámpara que emite uniformemente un flujo luminoso de 6283,2 lm. Determinar la iluminación en un vértice cualquiera.

Resp. 114,5 lx

148. Un manantial luminoso puntual se encuentra en el centro de una caja cúbica de 4 m de arista. En una cara se perfora un orificio de diámetro 10 cm. El orificio se practica de manera que sea perpendicular a la recta que une su centro con el manantial y éste manda a través del orificio un flujo luminoso de 0,05 lm. *a*) ¿Cuál es el ángulo sólido subtendido por el orificio desde el manantial? b) ¿Cuál es la intensidad del manantial en la dirección del orificio? *c*) Si el manantial emite uniformemente en todas direcciones, calcular el flujo total que emite. *d*) El rendimiento luminoso total del manantial es de 20 lm/W. ¿Cuál es el flujo radiante emitido?

Resp. *a*) $\dfrac{\pi}{16}\,10^{-2}$ sr; b) 25,46 cd; *c*) 320 lm; *d*) 16 W

149. ¿A qué altura por encima del centro de una mesa circular de radio R ha de colocarse un manantial luminoso puntual para producir la iluminación máxima en los bordes de la mesa?

Resp. $R/\sqrt{2}$

150. Demostrar que la relación existente entre el semiángulo de abertura θ de un cono y el ángulo sólido Ω correspondiente es $\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta)$.

151. Un disco de 10 cm de diámetro transmite difusamente. Si se considera como manantial puntual, ¿cuál es su intensidad en una dirección que forma 45° con la normal a su superficie, si presenta una luminancia o brillo de 0,57 cd/cm²?

Resp. 32 cd

152. Se admite que un disco luminoso puede considerarse foco luminoso puntual, con un error inferior al 1 %, para cualquier distancia superior a 10 veces su radio en un punto del eje del disco. Determinar la iluminación producida por un foco de 40 cm de radio y de luminancia $3 \cdot 10^4$ nt en un punto de su eje, con un error no superior al 1 %.

Resp. $300\,\pi/4$ lx

153. Un vidrio tien un índice de refracción $n_F = 1{,}600$, $n_C = 1{,}580$ y $n_D = 1{,}560$. Determinar: *a*) el poder dispersivo y *b*) el número de Abbe.

Resp. *a*) 0,035; *b*) 28

154. Determinar: *a*) la longitud de onda y *b*) la frecuencia, del límite de la serie de Lyman.

Resp. *a*) $\lambda_\infty = 91{,}176$ nm; *b*) $f = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ Hz

155. Determinar la longitud de onda de la cuarta raya de la serie de Balmer.

Resp. 486,27 nm

156. Determinar la longitud de onda mínima del espectro continuo de la radiación emitida por un tubo de rayos X al que se aplica una tensión de 65 kV.

Resp. 0,19 Å

157. Un electrón se acelera mediante una ddp de 10 kV y luego choca contra un metal. Suponiendo que el 80 % de su energía se transforma en un fotón de rayos X, determinar *a*) la frecuencia y *b*) la longitud de onda, de éste.

Resp. *a*) $1{,}93 \cdot 10^{18}$ Hz; *b*) 1,55 Å

158. Se desea obtener rayos X cuya longitud de onda mínima del espectro continuo sea de 0,5 Å. Determinar que ddp debe aplicarse al tubo.

Resp. 24,758 kV

159. Un haz monocromático de rayos X incide sobre la superficie de un cristal de cloruro sódico. La reflexión de Bragg de primer orden se presenta para un ángulo de 8° 30'. Determinar la longitud de onda de la radiación incidente, sabiendo que los planos atómicos sucesivos en el ClNa están separados 2,81 Å.

Resp. 0,830 Å

160. Determinar: *a*) La longitud de onda asociada a un electrón cuya celeridad sea igual a la mitad de la de la luz. *b*) Igual cuestión para el caso en que la partícula sea un protón.

Resp. *a*) 0,0485 Å; *b*) $2{,}64 \cdot 10^{-5}$ Å

161. Determinar la celeridad que ha de llevar un neutrón para que su onda asociada tenga una longitud de onda igual a la mínima del espectro continuo de rayos X emitidos por un tubo sometido a una tensión de 6,2 kV.

Resp. $v = 1977{,}8$ m/s

162. Determinar la longitud de onda asociada a un proyectil de 50 g que se mueve a 600 m/s.

Resp. $2{,}207 \cdot 10^{-33}$ m

163. Determinar: *a*) la cantidad de movimiento de un fotón cuya frecuencia es de 10^6 Hz; *b*) la longitud de onda.

Resp. *a*) $2{,}20 \cdot 10^{-26}$ kg · m/s; *b*) 30 nm

164. Un electrón se refleja entre dos paredes verticales siguiendo un camino horizontal. Siendo $b = 100$ Å la distancia que separa las paredes, determinar: *a*) el nivel de energía más bajo y *b*) la longitud de onda de la radiación emitida al pasar del nivel $n = 2$ al $n = 1$.

Resp. *a*) $6{,}02 \cdot 10^{-22}$ J; *b*) $1{,}07 \cdot 10^{-4}$ m

165. Entre dos paredes verticales separadas $2 \cdot 10^{-15}$ m tenemos *a*) un neutrón y *b*) un protón, que se reflejan en las paredes siguiendo un camino horizontal. Determinar los correspondientes niveles de energía más baja.

Resp. *a*) 51 MeV; *b*) 51,25 MeV

166. Tenemos, *a*) un protón y *b*) un electrón, confinados en un recinto de 1 Å. Hallar en cada caso la indeterminación de la celeridad. *c*) ¿Y si estuviesen confinados en un recinto de 1 cm?

Resp. *a*) $6{,}3 \cdot 10^2$ m/s; *b*) $1{,}16 \cdot 10^6$ m/s; *c*) $1{,}16 \cdot 10^{-2}$ m/s

167. Una partícula de polvo de 0,01 g se mueve a (80 ± 1) m/s. Determinar la indeterminación de su posición.

Resp. $1{,}05 \cdot 10^{-29}$ m

168. ¿Qué error cometemos al tomar como masa del átomo de hidrógeno la del protón, despreciando la del electrón?

Resp. 0,054 %

169. El potasio tiene tres isotopos de $A = 39$, 40 y 41, cuyas abundancias respectivas son del 93 %, 0,012 % y 6,88 %. Determinar la masa atómica del potasio.

Resp. $m = 39{,}1$

170. Un positón se aniquila con un electrón, convirtiéndose sus masas en energía. Determinar ésta.

Resp. 1,02 MeV

171. Determinar la masa del fotón correspondiente a una longitud de onda de 600 nm.

Resp. $3{,}6 \cdot 10^{-36}$ kg

172. Sabiendo que el período de semidesintegración del Ra es de 1590 años, determinar: *a*) su constante radiactiva y *b*) su vida media.

Resp. *a*) $\lambda = 1{,}38 \cdot 10^{-11}\ s^{-1}$; *b*) $\tau = 2294$ años 135 días $2^h\ 52^{min}\ 48^s$

173. ¿Cuántos átomos radiactivos quedan al cabo de un tiempo igual a la vida media?

Resp. $N = N_0/e$

174. Sabiendo que, en un instante, hay 10^{10} átomos de un elemento radiactivo, ¿cuántos átomos se desintegrarán entre un tiempo igual al período de semidesintegración y otro igual a la vida media?

Resp. $1{,}32 \cdot 10^9$

175. ¿Qué velocidad debe tener un cuerpo en movimiento para que la disminución relativista de su longitud sea del 25 %?

Resp. 198 000 km/s

176. Un cohete tripulado de 25 m de longitud se mueve a 4320 km/h respecto a un sistema S. *a*) ¿Cuál es la contracción relativista que experimenta? *b*) ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que su tripulante observe que el reloj de un observador fijo en S atrasa 10^{-6} s respecto al reloj del cohete?

Resp. *a*) 2 Å b) 1,45 días

177. Dos partículas se mueven en sentidos contrarios con velocidades de igual módulo c/n (c = celeridad de la luz en el vacío, n = número cualquiera). Determinar la velocidad de una partícula relativa a la otra. Aplicar lo anterior al caso de los electrones procedentes de dos aceleradores, de los cuales unos se dirigen hacia el este y otros hacia el oeste, ambos con la misma celeridad respecto al laboratorio $2{,}5 \times 10^8$ m/s.

Resp. $2{,}95 \times 10^8$ m/s

178. Dos sucesos se efectúan en puntos que mantienen una separación constante de 9×10^6 km. Para un observador en reposo respecto a dichos puntos, los sucesos son simultáneos. ¿Cuál será el intervalo de tiempo transcurrido entre ambos sucesos para un segundo observador que lleva una celeridad constante de 0,8 c y se mueve: *a*) paralelamente a la recta determinada por los dos puntos, *b*) perpendicularmente a dicha recta.

Resp. *a*) 40 s b) 0

179. La masa de un electrón en movimiento es 3 veces mayor que su masa en reposo. Hallar la energía cinética y la celeridad de dicho electrón.

Resp. $T = 1{,}6 \times 10^{-13}$ J $v = \sqrt{8} \times 10^8$ m/s

180. Expresar en eV la energía cinética de una partícula β dotada de una celeridad igual a 11/12 de la de propagación de la luz en el vacío.

Resp. $T = 7{,}69 \times 10^5$ eV

181. Calcular la ddp necesaria para acelerar un electrón de manera que alcance una celeridad tal que la obtenida mediante cálculos clásicos supere en un 1 % a la que da la Mecánica relativista.

Resp. 6980 V

182. Una partícula que posee una masa en reposo m_0 (conocida) en un sistema S, choca contra otra igual que está en reposo en dicho sistema. Am-

bas quedan reunidas formando una partícula final que lleva una celeridad $c/2$. Calcular: *a*) La celeridad de la partícula incidente, *b*) la masa en reposo de la partícula resultante y *c*) la pérdida de energía cinética en el proceso.

Resp. *a*) $v = \frac{4}{5}\, c$ *b*) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\, m_0$ *c*) $\frac{4\sqrt{3}-3}{3}\, m_0 c^2$

Índice alfabético

Abbe, Condición de, 390.
– Número de, 425
Aberración de las estrellas, 277.
Absorbancia, 440.
– monocromática, 440.
Absorción de la luz, 351.
Aceptador, 84.
Acumulador, Capacidad de carga de un, 99.
– Rendimiento de un, 99.
– de plomo, 98.
Agudeza visual, 336.
Aislador, 1, 5, 81.
Aislantes, 5.
ALHAZEN, 272.
Alternador, 213.
Amortiguamiento crítico, 183.
AMPERE, A.,M., 50, 156.
– absoluto, 132.
– Corrientes de, 141, 145.
– Ley de, 126.
Ampere-espira, 159.
Ampere-metro, 157.
Amperímetro, 206.
– electromagnético, 207.
– térmico, 206.
Amplificación, 244, 247.
– de intensidad, Factor de, 248.
– Factor de, 241.
Amplificador con emisor a tierra, 247.
– con emisor común, 247.
– de potencia, 244.
– de tensión, 244.
– de tríodo, 245.
– realimentado, 249.
Amplitud, 350.
Análisis espectral, 431.
Analizador, 400.
ANDERSON, C. D., 278, 500, 502, 555.
ÅNGSTRÖM, A. J., 472.
Ángulo del prisma, 298.
– límite, 284.
Ángulo refringente, 298.
Anillos de Debye-Scherrer, 437.
– de Newton, 365.
Aniones, 85.
Aniquilamiento de materia, 501.
Anisotropía accidental, 417.
– por deformación, 417.
Ánodo, 85, 231.
Anteojo astronómico, 342.
– – Aumento del, 343.
– – Campo del, 344.
– de Galileo, 344.
– terrestre, 344.
Anticátodo, 268.
Antihidrógeno, 501.
Antihiperón, 503.
Antimateria, 501.
Antineutrino, 500.
Antipartícula, 501.
Antiprotón, 501, 555.
Antirresonancia, 197.
Aparato de proyección, 347.
Apertura numérica, 391.
Aplanetismo, 303.
– Condición de, 390.
Arco eléctrico, 105.
ARRHENIUS, S. A., 88.
– Teoría de, 84, 88.
Asociación de condensadores, 45.
– – generadores, 61.
– – lentes, 324.
– – resistencias, 68.
Astigmatismo, 336.
Átomo excitado, 101.
Audión, 239.
Aumento angular, 293, 309, 311, 320.
– de un telescopio, 346.

Aumento de una cámara fotográfica, 346.
– de una lupa, 338.
– del anteojo astronómico, 343.
– del microscopio, 341.
– lateral, 292, 306, 310, 319, 329, 330, 341.
Autocolimación, 427.
Autoinducción, 175.
– Coeficiente de, 175.
– Fem. de, 175.

Bainbridge, Espectrógrafo de, 116.
Balanza de Coulomb, 7.
BALMER, J. J., 472, 473.
Banda de conducción, 80.
– de valencia, 80.
– energética, 80.
Barión, 503.
BARKLA, C. G., 475.
Barrera de potencial, 233.
BARTHOLIN, E., 400.
BASOV, 487.
Bastoncitos, 333.
BECQUEREL, A. H., 491.
BECKER, H., 494.
BENOIT, 371.
Betatrón, 171.
Bicuarzo, 421.
Bioluminiscencia, 450.
BIOT, J. B., 123, 421.
– Ley de, 420.
– y Savart, Ley de, 126, 129.
Birrefringencia, 400.
– eléctrica, 418.
– magnética, 419.
BITTER, F., 154.
Blanco de orden superior, 358.
– normal, 463.
BLOENBERGEN, N., 487.
Bobina de inducción, 177.
Bobinas de excitación, 214.
BOHR, A., 498.
BOHR, N., 275, 472, 476, 485, 498.
Bombeo, Frecuencia de, 487.
BOTHE, W., 494.
BRADLEY, J., 277, 516.
– Experimentos de, 508, 509.
BRAGG, W. H., 436.
BRAGG, W. L., 436.
BRAUN, K. F., 132.
BREWSTER, D., 398.
BUCHERER, 551.
Bunsen, Fotómetro de, 457.
BUTLER, C. C., 503.

Cadena metálica, 90.
Caída de tensión, 65.
– óhmica, 65.
Caldeo directo, 231.
– indirecto, 232.
Cámara fotográfica, 346.
– – Aumento de una, 346.
Camino óptico, 280.
Campo angular, 347.
– coercitivo, 149.
– de nitidez, 347.
– – un solenoide, 129.
– del anteojo astronómico, 344.
– eléctrico, 11, 12.
– electromagnético, 252.
– electrostático, 23.
– magnético, 109.
– – de excitación, 126.
– – – inducción, 110.
– – giratorio, 226.
– total, 347.
Candela, 453.
Cañón de electrones, 29.
Capacidad a tierra, 40.
– de carga de un acumulador, 99.
– de un condensador, 40.
– – – conductor, 38.
– Unidad electrostática de, 38.
Característica de placa, 240.
– – transferencia, 240.
– – un tríodo, 240.
– estática, 240.
Características de colector, 248.
– – un diodo, 232.
Carga del condensador, 73.
– eléctrica, 1, 3.
– – Conservación de la, 3.
– Recta de, 245.
– Resistencia de, 245.
– de prueba, 11.
– eléctrica elemental, 4, 31.
– específica del electrón, 114.
Cargas de polarización, 33.
Cassegrain, Telescopio de, 346.
Catalejo, 344.
Cationes, 85.
Cátodo, 85, 231.
Cavidad resonante, 487.
Celda fundamental, 433.
Celeridad de grupo, 480.
– – propagación, 259.
Centímetro, 39.
Centro de masa, sistema del, 557.
– óptico, 321.
Ciclo de histeresis, 149.

Ciclotrón, 112.
Cinemática cuadrivectorial, formulación, 545.
– relativista, 532.
Circuito magnético, 158.
– Marx, 47.
– serie de c. a., 186, 191.
– tapón, 198.
CLEETON, 432.
Coeficiente de arrastre de Fizeau, 541, 542.
– – autoinducción, 175.
– – Hall, 137.
– – inducción mutua. 174.
– – luminosidad, 458.
– – temperatura, 56.
– – Thomson, 93.
– – visibilidad, 458.
Coeficientes de distribución, 465.
– – un triodo, 241.
– tricromáticos, 464.
Coherencia, 352.
Colector, 215.
Color, 350, 460.
– Determinación del, 469.
– de un cuerpo, 469.
– saturado, 468.
– Temperatura de, 462.
Colores complementarios, 463.
– del espectro, 461.
– Mezcla de, 463.
Colorimetría, 460.
Componentes tricromáticas, 464.
Composición de velocidades, 538.
Comprobación experimental de la dilatación del tiempo, 537.
COMPTON, A. H., 269.
Condensador, 39.
– Carga del, 73.
– cilíndrico, 43.
– Descarga aperiódica de un, 183.
– Descarga del, 75.
– Descarga oscilante de un, 180.
– electrolítico, 41, 48.
– Energía de un, 43.
– equivalente, 45.
– esférico, 42.
– plano, 41.
– variable, 41
Condensadores, asociación de, 45.
– en montaje mixto, 45.
– – paralelo, 45.
– – serie, 45.
Condición de Abbe, 390.
– – aplanetismo, 390.
– – estigmatismo, 287.
Conducción, banda de, 80.
– en gases, 120.
– – líquidos, 84.
– – sólidos, 77.
Conductancia, 55.
– de placa, 241.
Conductividad, 54.
– del electrolito, 87.
– Dimensiones de la, 56.
– molecular, 88.
– – límite, 88.
Conductor, 1, 5.
– activo, 217.
– en equilibrio, 19, 24.
Conexión en estrella, 224.
– – triángulo, 225.
Conmutador, 213.
Cono de luz, 529, 530.
Conos, 333.
Conservación de la carga, 3.
Constante de Curie, 150.
– – la red, 384.
– – Planck, 266.
– – Rydberg, 474.
– Constante de tiempo, 75, 76, 176.
– dieléctrica, 35.
– permanente, 204.
– radiactiva, 492.
– solar, 441.
Constringencia, 425.
Contracción de Lorentz, 532, 533.
Contraste de fase, 392.
– – – Microscopio de, 392.
Convergencia de una lente, 326.
Coordenadas de cromaticidad, 465, 467.
Córnea, 333.
Coroides, 333.
Corriente activa, 201.
– alterna, 184, 186.
– – Ley de Ohm para la, 189, 191.
– – Potencia de una, 200.
– de desplazamiento, 256.
– – reja, 239.
– – saturación, 233.
– Densidad de, 51, 52.
– dewattada, 201.
– eléctrica, 49.
– inducida, 163.
– Intensidad de la, 50.
– reactiva, 201.
– wattada, 201.
Corrientes de Ampère, 141, 145.
– – Foucault, 170.
– trifásicas, 223.
COULOMB, C. A., 7, 9, 157.

Coulomb, Balanza de, 7.
– Ley de, 157.
COWAN, C., 502.
Cristales anisótropos, 400.
– biáxicos, 401.
– birrefringentes, 400.
– uniáxicos, 401.
Cristalino, 333.
Cuadriaceleración, 546.
Cuadrivector velocidad, 545.
Cuerpo gris, 449.
– negro, 442.
– – Espectro del, 443.
– – Radiación del, 446.
– no negro, 449.
– ortotropo, 459.
Cuerpos eléctricos, 1.
– neutros, 4.
CURIE, M. y P., 491.
– Constante de, 150.
– Punto de, 150.
Curie-Weiss, Ley de, 150.
Curva de primera imanación, 148.
CHADWICK, J., 495.
CHAMBERLAIN, O., 501.
CHEN NING YANG, 506.
CHIEN-SHIUNG WU, 506.

DALTON, J., 472.
D'ARSONVAL, J. A., 203.
DAVISSON, C. J., 275, 481.
DE BROGLIE, L. V., 275, 480, 481.
Defecto de masa, 496, 561.
Delgas, 215.
DEMÓCRITO, 472.
Densidad de corriente, 51, 52, 231.
– – energía, 179, 441, 444.
– – – electrostática, 44.
– – – monocromática, 441.
– – flujo, 111.
– – probabilidad, 483.
Descarga aperiódica, 183.
– automantenida, 103.
– de Townsend, 103.
– – un condensador, 75, 180.
– disruptiva, 102, 103.
– luminosa, 103.
– oscilante, 180.
DESCARTES, R., 272.
Desintegración de partículas, 559.
– espontánea, 560.
– radiactiva, 491, 492.
Desplazamiento, Corriente de, 256.
– Ley del, 448.
Desviación, 299, 387.
– mínima, 300, 387.
Devanado de excitación, 214.
Diafragma, 346.
Diagrama de cromaticidad, 467.
– – Minkowski, 527.
– hiperbólico, 531.
Diamagnetismo, 141, 144.
Dicroísmo, 415.
Dieléctrico, 32.
– material, 36.
Dieléctricos, 5.
Difracción de electrones, 481.
– – Fraunhofer, 372, 374.
– – Fresnel, 372.
– – la luz, 371.
– en el infinito, 372, 374.
– Factor de, 382.
– por dos rendijas, 380.
– – una abertura circular, 379.
– – – rendija, 374.
– Red de, 383.
Difusión, 459.
Dilatación del tiempo, 536, 537.
– – – Comprobación experimental de la, 537.
Dinámica relativista, 547.
Dinamo, 214.
– de excitación compuesta, 216.
– – – separada, 216.
– Excitación de la, 216.
– F.e.m. de una, 216.
– paralelo, 216.
– serie, 216.
Diodo, 231.
– Características de un, 232.
– de gas, 233.
– – vacío, 231.
– – Zener, 235.
– semiconductor, 233.
Dioptría, 326.
Dioptrio, 286.
– esférico, 288.
– plano, 294.
Dipolo eléctrico, 14.
– magnético, 142.
DIRAC, P. A. M., 231, 275, 500.
Disociación, Grado de, 87.
Dispersión, 350, 425.
– rotatoria, 421.
– – magnética, 424.
Distancia focal imagen, 290, 307.
– – objeto, 290, 307.
División de amplitud, 354.
– – ondas, 354.

Doble refracción, 400.
Dominios de Weiss, 150.
– ferromagnéticos, 151.
Donante, 83
Doppler, efecto, 542.
Dualismo onda-corpúsculo, 275, 480.
Duane y Hunt, Ley de, 269.
DUFAY, C. F., 1, 2.
Dushman, Ley de, 231.

Ecuación de Maxwell-Ampère, 254.
– – Maxwell-Faraday, 254.
– – onda, 482, 483.
– – Schrödinger, 484.
Ecuaciones de Laue, 435.
– – Maxwell, 253.
EDGE, 278.
EDISON, T. A., 230.
Efecto Barkhausen, 154.
– cortical, 171.
– Compton, 269.
– Doppler, 542.
– Edison, 231.
– fotoconductor, 264, 267.
fotoeléctrico, 253, 264.
– fotoemisor, 264.
– fotovoltaico, 264.
– Hall, 136.
– – anómalo, 137.
– Joule, 58.
– Kerr, 419.
– Peltier, 90.
– Seebeck, 90.
– Thomson, 92.
Efluvios, 21.
EINSTEIN, A., 253, 266, 446, 480, 486, 516, 517, 519.
– Fórmulas de, 553.
– Relatividad de, 509.
Eje óptico, 400.
– principal, 288, 301, 317.
– secundario, 288.
Electricidad negativa, 2.
– positiva, 2.
Eléctricos, Cuerpos, 1.
Electrización por frotamiento, 1.
Electrodinamómetro, 211.
Electrodo normal de H, 96.
– Potencial de, 96.
Electrodos, Polarización de los, 97.
Electrolisis, 86.
Electrolito, 84.
– Conductividad del, 87.
Electroluminiscencia, 451.
Electrón, 4.
– Carga específica del, 114.
– Energía potencial de un, 77, 78, 79.
Electrón-volt, 31.
Electrones de conducción, 5.
– – valencia, 80.
– Difracción de, 481.
– libres, 5.
Electrones ligados, 5.
Electrónica, 230.
Electroscopio, 6.
Elemento de corriente, 118, 124.
Elementos cardinales, 311.
– correspondientes, 37.
Elipsoide de índices, 405.
Emisión estimulada, 486.
– termoiónica, 230.
Emisor a tierra, Amplificador con, 247.
– común, Amplificador con, 247.
Emitancia, 439, 454.
– monocromática, 439.
Energía, Densidad de, 179, 441, 444.
– electromagnética, 178.
– de enlace, 496, 561.
– – extracción, 88, 231, 267.
– – ionización, 102.
– – un condensador, 43.
– – una partícula, 553.
– – – – cargada, 28.
– electrostática, Densidad de, 44.
– en reposo, 495, 550.
– luminosa, 452.
– Materialización de la, 500, 501.
– nuclear, 496.
– potencial de un electrón, 77, 78, 79.
– radiante, 439.
Enlace, energía de, 561.
Esclerótica, 333.
Espacio de Minkowski, 522.
– imagen real, 287.
– – virtual, 287.
– objeto real, 287.
– – virtual, 287.
– Propiedades del, 508.
Espectro acanalado, 358.
– atómico, 431.
– Colores del, 461.
– Continuo, 429.
– – de rayos X, 269.
– de absorción, 431.
– – – de bandas, 431.
– – – – rayas, 431.
– – arco, 430.
– – bandas, 430, 431.
– – chispa, 430.

Espectro de emisión, 429.
– – masas, 117.
– – rayas, 430, 431.
– del cuerpo negro, 443.
– electromagnético, 263.
– Estructura fina del, 478.
– – hiperfina del, 490.
– magnético, 155.
– molecular, 431.
– normal, 429.
– óptico, 425.
Espectrografía de rayos X, 432.
Espectrógrafo, 425, 426.
– de masas, 116.
Espectrómetro, 425.
– de microondas, 432.
Espectroscopía de microondas, 432.
Espectroscopio de prisma, 425.
– de red, 428.
Espejo, 329.
– de Lloyd, 360.
Espejos de Fresnel, 359.
ESSEN, 278.
Estabilidad de los núcleos, 560.
Estigmatismo perfecto, 302.
Estímulo acromático, 463.
Estrella, Conexión en, 224.
Estructura fina, 478.
– hiperfina, 490.
Eter, 274, 508.
EUCLIDES, 272.
Ewing, Modelo de, 151.
Excitación, Bobinas de, 214.
– compuesta, 216.
– de las dinamos, 216.
– independiente, 216.
– magnética, 124, 126.
– paralelo, 216.
– separada, 216.
– serie, 216.
Excitatriz, 216.
Experiencias de Hertz, 262.
Experimento de Millikan, 29.
– de Oersted, 108.
– de Young, 354.
Extracción, Energía de, 88.
Extrañeza, 507.

FABRY, 371.
Fabry-Pérot, Interferómetro de, 371.
Factor de amplificación, 241.
– – – de intensidad, 248.
– – calidad, 197.
– – difracción, 382.
Factor de ganancia, 243.
– – interferencia, 382.
– – luminancia, 459.
– – potencia, 200.
– – transmisión, 469.
– – visibilidad, 452.
Familias radiactivas, 492.
Farad, 38.
FARADAY, M., 26, 162, 424.
Faraday, 87.
– Ley de, 86, 165, 167.
– Jaula de, 26.
FEATHER, N., 495.
Fenómeno de Purkinje, 459.
FERMAT, P., 273.
– Principio de, 276.
FERMI, E., 231, 500.
– Nivel de, 84.
Ferritas, Teoría de las, 155.
Ferromagnetismo, 142, 147.
FEYNMAN, R. P., 275.
Fibra óptica, 284.
Filtro, 461.
– eléctrico, 238.
– en L, 239.
– en π, 239.
Fisión, 497.
FIZEAU, H. L., 277.
– Coeficiente de arrastre de, 541, 542.
FLEMING, J. A., 231, 239.
Flujo eléctrico, 17.
– de inducción, 36, 111.
– luminoso, 453.
– radiante, 439.
– útil por polo, 217.
Fluorescencia, 451.
Foco imagen, 290, 305.
– objeto, 290, 305.
Focos coherentes, 352.
Fórmula de Gauss, 290.
– de Rayleigh-Jeans, 444.
Formulación cinemática cuadrivectorial, 545.
Fórmulas de Einstein, 553.
– – Newton, 306.
Fosforescencia, 451.
Fotoelasticidad, 418.
Fotoemisión, Umbrales de, 266.
Fotoluminiscencia, 450.
Fotometría, 452.
Fotómetro de Bunsen, 457.
– – Lummer-Brodhun, 458.
Fotón, 266.
FOUCAULT, J. B. L., 277.
– Corrientes de, 170.

FRANKLIN, B., 2, 21.
FRAUNHOFER, J., 374.
– Difracción de, 372, 374.
– Rayas de, 431.
Frecuencia, 350.
– ciclotrónica, 113.
– de bombeo, 487.
– – resonancia, 195.
– reducida, 473.
– umbral, 265.
FRESNEL, A. J., 274, 349, 396, 420.
– Difracción de, 372.
– Espejos de, 359.
Fresnel, Zonas de, 372.
Fuerza contraelectromotriz, 62.
– – de un motor, 218.
Fuerza electromotriz, 60.
– – de autoinducción, 175.
– – – temperatura, 92.
– – – una dinamo, 216.
– – Hall, 136.
– – Peltier, 91.
– – Seebeck, 95.
– magnetomotriz, 159.
Fuerzas de corto alcance, 498.
– – intercambio, 151.
– electromotrices trifásicas, 223.
– internas, 498.
– nucleares, 498.
Función de onda, 482.
Fusión nuclear, 497.
Futuro, 529, 530.

GALILEO, 276.
– Principio de relatividad de, 511, 512.
– Transformación de, 510.
Galvanómetro, 109, 203.
– Constante permanente del, 204.
– Sensibilidad del, 204.
Ganancia de intensidad, 243.
Gas electrónico, 50.
Gauss, Fórmula de, 290.
– Teorema de, 17.
GELL-MANN, M., 507.
Generador eléctrico, 59.
– electromagnético de c.a., 213.
– – de c. c., 214.
– electrostático, 27.
– magnetohidrodinámico, 140.
– termoeléctrico, 93.
– van de Graaf, 27.
Generadores, Asociación de, 61.
– en paralelo, 62.
– – serie, 61.
GERMER, L. H., 275, 481.
GILBERT, W., 1, 5, 107.
Glazebrook, Prisma de, 408.
Gran angular, 347.
Grado de disociación, 87.
– sacarimétrico, 423.
GRIMALDI, F. M., 273.

HALL, E. H., 136.
– Campo eléctrico de, 136.
– Coeficiente de, 137.
– Efecto, 136.
– Fuerza electromotriz, 136.
HALLWACHS, W., 264.
HEISENBERG, W., 151, 275, 482, 485.
HEITLER, 482.
Helmholtz, Invariante de, 294.
Henry, 174, 175.
HENRY J., 162, 163.
HERÓN DE ALEJANDRÍA, 272.
HERTZ, H. R., 252, 274.
Experiencias de, 262.
HESS, V., 502.
Hipermetropía, 335.
Hiperón, 503.
Histeresis magnética, 149.
HOOKE, R., 273.
Hueco, 81.
Humor acuoso, 333.
HUYGENS, C., 273, 349, 396.

Iluminación, 454.
Iluminancia, 454.
Imagen real, 286.
– virtual, 286.
Imanación espontánea, 151.
– fácil, 152.
– Intensidad de, 144.
– remanente, 148.
Imanes permanentes, 154.
Impedancia, 190.
Impedancia en paralelo, 193.
– en serie, 192.
Impureza aceptadora, 84.
– donante, 83.
Incidencia brewsteriana, 398.
Indice de refracción, 279, 283.
Indices de Miller, 433.
– de refracción principales, 402.
– principales, 404.
Inducción eléctrica, 35.
– electromagnética, 162.
– electrostática, 5.
– magnética, 110.
– – Flujo de, 111.
– mutua, 173.

Inducción residual, 150.
Inducido, 214, 228.
Inductancia, 176.
Inductor, 214.
Influencia electrostática, 6.
– total, 6, 39.
Intensidad de imanación, 144.
– – de la corriente,50.
– – polo, 157.
– – una onda, 262.
– luminosa, 350, 453.
– media esférica, 454.
– radiante, 440.
Interacción, 555.
Interacciones débiles, 503.
– fuertes, 503.
Intercambio, Fuerzas de, 151.
Interferencia, Factor de, 382.
– múltiple, 353.
Interferencias en láminas, 361.
– luminosas, 351.
Interferómetro de Fabry-Pérot, 371.
– – Michelson, 369.
– – Morley, Experimento del, 509, 513, 514, 516.
– Zeiss, 368.
Interpretación geométrica de la transformación de Lorentz, 526.
Intervalo óptico, 314.
Invariante de Helmholtz, 294.
Ion, 84.
Ionización, Energía de, 102.
– por choque, 101.
– Potencial de, 102.
Iris, 333.
Isoclinas, 418.
Isocromáticas, 418.
Isotopos, 117.

Jamin, Refractómetro de, 368.
JASEVA, 516.
Jaula de Faraday, 26.
JAVAN, 488, 516.
JOLIOT-CURIE, 494.
Joule, Efecto, 58

KASTLER, 487.
KAUFMANN, 551.
KELVIN,92
KERR, J., 418.
KERST, D. W., 172
KIRCHHOFF, G. R., 441.
– Ley de, 441.
Leyes de, 65.

LAMBERT, 454.
Lámina cuarto de onda, 412.
Lámina de caras paralelas, 297.
– – onda entera, 411.
– semionda, 411.
LANGEVIN, 151.
LAPLACE, P. S., 118, 123.
Laser, 488.
– de inyección, 488.
– – rubí, 488.
LATTES, C. M. G., 502.
LAUE, MAX VON, 433, 436.
– Ecuaciones de, 435.
– Ley de, 433.
Laurent, Polarímetro de, 423.
LAWRENCE, E. O., 112.
LEE DE FOREST, 239.
Lente, Centro óptico de una, 321.
– Convergencia de una, 326.
– delgada, 326.
– esférica, 317.
Lentes, Asociación de, 324.
LENZ, H. F. E., 162, 169.
– Ley de, 169.
Leptón, 502.
Ley de Ampère, 126.
– – Biot, 420.
– – Biot y Savart, 124, 126.
– – Bragg, 436.
– – Brewster, 398.
– – Coulomb, 157.
– – Curie-Weiss, 150.
– – Duane y Hunt, 269.
– – Dushman, 231.
– – Faraday, 86, 165, 167.
– – Joule, 57, 58.
– – Kirchhoff, 441.
– – Lambert, 454.
– – Laplace, 118, 124.
– – Laue, 433.
– – Lenz, 169.
– – los metales intermedios, 92.
– – Malus, 400.
– – Ohm, 53, 54, 55, 64.
– – – para c. a., 189, 191.
– – Planck, 445, 446.
– – Richardson-Dushman, 231.
– – Stefan-Boltzmann, 499.
– – Volta, 90.
– – Wien, 445, 448.
– del desplazamiento, 448.
Leyes de Kirchhoff, 65.
– – la reflexión, 282.
– – – refracción, 283.
– – Soddy, 491.

Límite de una serie, 473.
Línea de universo, 527.
Líneas isoclinas, 418.
– isocromáticas, 415, 418.
LIPPMANN, G., 366.
Líquidos, Conducción en, 84.
Longitud de onda. 350.
– – – de DeBroglie, 481.
– – – dominante, 460, 468.
LORENTZ, H. A., 263, 509, 513, 517.
Lumen, 453.
Luminancia, 454.
– Factor de, 459.
Luminosidad, Coeficiente de, 458.
Lummer-Brodhun, Fotómetro de, 458.
Lupa, 337.
– Aumento de una, 338.
– Potencia de una, 339.
Lux, 454.
Luxmetro, 458.
Luz, 272.
– en un medio en movimiento, 541.
– polarizada, 395.
– – circularmente, 412.
– – linealmente, 396.
– Rayo de, 276.
– Teoría corpuscular de la, 273.
– Teoría de Newton de la, 273.
– Teoría electromagnética de la, 252, 274.
Luz, Teoría ondulatoria de la, 349.
– Velocidad de la, 273, 276.

Lloyd, Espejo de, 360.

Magnetismo remanente, 150.
Magneto, 215.
Magnetohidrodinámica, 138.
MAIMAN, T. H., 487.
MALUS, E. L., 274.
– Ley de, 400.
– Teorema de, 276.
Malla, 65.
Mancha amarilla, 333.
Máquina van de Graaff, 27.
Masa en reposo, 495, 548.
– magnética, 107.
– relativista, 550.
Masas magnéticas, 156.
Maser, 486.
Materia, Aniquilación de la, 501.
Materialización de la energía, 500, 555.
Matiz, 460.
MAXWELL, J. C., 44, 162, 252, 274.
– Ecuaciones de, 253.
Mecánica cuántica, 482.
– ondulatoria, 479.
Mechero Auer, 450.
Medida de una resistencia, 72.
Medio en movimiento, Luz en un, 541.
MENDELEIEV, D. I., 472.
Mesón, 502.
Metales intermedios, Ley de, 92.
Metro prototipo, 371.
Mezcla de colores, 463.
Mho, 56.
Microondas, 432.
– Espectrómetro de, 432.
Microscopio, 339.
– Aumento del, 341.
– de contraste de fase, 392.
– Poder separador del, 392.
– Potencia del, 342.
MICHELSON, A. A., 277, 371, 514.
– Interferómetro de, 369.
Miller, Índices de, 433.
MILLIKAN, R. A., 4, 29, 502.
Mínima desviación, 387.
Minkowski, diagrama de, 527.
– Espacio de, 522.
– Tiempo intrínseco de, 545.
Miopía, 335.
Modelo atómico de Bohr, 476.
– – – Rutherford, 476.
– – – Thomson, 475.
– de Ewing, 151.
Modelo nuclear de la gota, 498.
– – estratiforme, 498.
Modelos nucleares, 498.
Momento eléctrico, 14.
– magnético, 122, 123.
Montaje mixto de condensadores, 45.
– – – resistencias, 68.
Motor de c. c., 218.
– – excitación paralelo, 218.
– – inducción, 227.
– monofásico, 229.
– polifásico, 228.
– serie, 218.
– shunt, 218.
MOTTELSON, B. R., 498.
Movilidad, 82.
Muón, 502.
MURRAY, 516.

NEDDERMEYER, 502.
NÉEL, 154, 155.

NE'EMAN, 507.
NERNST, W., 96.
NEUMANN, F. E., 165.
Neutrino, 502.
Neutrón, 4, 494.
NEWTON, I., 273, 349.
– Anillos de, 365.
– Fórmulas de, 306.
– Telescopio de, 346.
Nicol, Prisma de, 405.
Nit, 454.
Nivel de Fermi, 84.
Niveles de energía, 478, 485.
Núcleo atómico, 4, 476.
– – Propiedades del, 490.
Nucleón, 4, 496.
Núcleos atómicos Estabilidad de los, 560.
Nudo, 65.
Número atómico, 490.
– bariónico, 506.
cuántico principal, 477.
– de Abbe, 425.
– – ondas, 473.
– leptónico, 506.
– másico, 490.
Números mágicos, 499.

Objetivo, 339, 342, 344, 345, 346, 347, 367, 392.
– Abertura relativa del, 347.
Objeto de fase, 392.
– virtual, 287.
OCCHIALINI, G. P. S., 502.
Ocular, 339.
OERSTED, H. C., 107.
Ohm, 56.
– Ley de, 53, 54, 55, 64.
Ojo humano, 333.
Onda de probabilidad, 483.
– Función de, 482.
– luminosa, Celeridad de la, 350.
Ondas coherentes, 352.
– electromagnéticas, 252, 256.
– – Intensidad de las, 262.
– estacionarias, 366.
Óptica, 272.
– física, 273.
– geométrica, 272.
– – Principios de la, 275.
Ópticamente isótropo, sistema, 513.
Optotécnica, 273.
Oscilador, 249.
– Armstrong, 251.
– de realimentación, 249.
Oscilador sintonizado 250.
Osciloscopio, 132.

Pantalla eléctrica, 26.
Par astático, 109.
– de arranque, 219.
– electrón-hueco, 81.
– Producción de un, 500.
– termoeléctrico, 94.
Paramagnetismo, 141, 142.
Pararrayos, 21.
Pared de un dominio, 153.
Paridad, 503.
Partículas elementales, 500.
– α, 491.
– β, 491.
Pasado, 529, 530.
PAULI, W., 500.
Películas antirreflectoras, 366.
PELTIER, J. C. A., 90.
Peltier, Efecto, 90.
– F.e.m., 91.
Péndulo eléctrico, 1.
Pequeño angular, 347.
Pérdidas en el cobre, 220.
– – – hierro, 220.
Período, 350.
– de semidesintegración, 492.
Permeabilidad magnética, 124, 146.
– – relativa, 147.
Permitividad absoluta, 35.
– del vacío, 10.
PÉROT, 371.
Pickering, Serie de, 475.
Pila Davtyan, 100.
– de combustible, 99.
– eléctrica, 95.
– fotovoltaica, 267.
Pión, 502.
Pirómetros, 450.
PLANCK, M., 266, 438, 445, 480.
– Ley de, 445, 446.
Plano de polarización, 396.
– – vibración, 395.
– focal imagen, 305.
– – objeto, 305.
– reticular, 433.
Planos principales, 306.
Plasma, 138.
Pleocroísmo, 415.
Población, 486.
Poder absorbente, 440.
– de las puntas, 21.
– dispersivo, 350, 425.

Poder emisivo, 439.
– reflector, 441.
– rotatorio, 420.
– – específico, 420.
– separador, 346, 389, 427.
– – de la red de difracción, 391.
POINCARÉ, 509.
Polarimetría, 422.
Polarímetro, 422, 423.
Polarización, Cargas de, 33.
– circular, 412.
– cromática, 415.
– de los electrodos, 97.
– – un dieléctrico, 32.
– directa, 235.
– eléctrica, 33.
– elíptica, 409.
– inversa, 235.
– lineal, 396.
– parcial, 398.
– por reflexión, 396.
– rotatoria, 419.
– – magnética, 423.
– total, 398.
Polos de un imán, 107.
– magnéticos, 155.
Portadores mayoritarios, 83.
Positón, 497, 500.
Positonio, 501.
Potencia de una c. a., 200.
– – – lupa, 339.
– del microscopio, 342.
Potencial, Barrera de, 233.
– de contacto, 89.
– – detención, 265.
– – electrodo, 96.
– – extracción, 231.
– – ionización, 102.
– eléctrico, 23.
Potenciómetro, 209.
POWELL, C. F., 502.
Poynting, Vector de, 261.
Pozo de energía potencial, 499.
Precesión, 144.
Presbicia, 336.
Primario de un transformador, 220,
Primera imanación, Curva de, 148.
Principio de combinación, 474.
– – complementaridad, 485.
– – correspondencia, 478.
– – Fermat, 273, 276.
– – Heisenberg, 485, 500.
– – Huygens, 274.
– – incertidumbre, 500.
– – indeterminación, 485, 500.
Principio de relatividad de Galileo, 511, 512.
– – Ritz, 474.
Principios de conservación, 503, 506.
Prisma, 298.
– Ángulo del, 298.
– de Glazebrook, 408.
– – Nicol, 405.
Probabilidad, Densidad de, 483.
– Onda de, 483.
Producción de energía, 561.
– – un par, 500.
Profundidad de campo, 340, 347.
– – foco, 347.
PROKHOROV, 487.
Protón, 4.
Proyección, Aparato de, 347.
Puente de hilo, 72.
Pulsación, 350.
Punto ciego, 333.
– de Curie, 150.
– – de reposo, 245.
– – trabajo, 245.
– imagen, 302.
– objeto, 302.
– próximo, 335.
– remoto, 335.
Puntos conjugados, 287, 309.
– nodales, 309.
– principales, 306.
Pupila, 333.
Pureza de un color, 468.
Purkinje, Fenómeno de, 459.

Q de un circuito, 197.
Quantum, 446, 477.
Quimioluminiscencia, 450.

Radar, 432.
Radiación característica, 268.
– térmica, 438.
Radiactividad natural, 491.
Radiancia, 440.
– monocromática, 440.
Rayas de Fraunhofer, 431.
Rayleigh, Refractómetro de, 367.
Rayleigh-Jeans, Fórmula de, 444.
Rayo extraordinario, 401.
– luminoso, 276.
– ordinario, 401.
Rayos canales, 116.
– catódicos, Osciloscopio de, 132.
– – Tubo de, 114.
– cósmicos, 502.

Rayos paraxiales, 289.
– X, 253, 267.
– X, Espectro continuo de, 269.
– α, 491.
– β, 491.
– γ, 491.
Razón de transformación, 221.
Reacción nuclear, 496.
Reacciones de desintegración, 559.
– nucleares, Producción de energía en las, 561.
– secundarias, 86.
Reactancia, 190.
– capacitiva, 190.
– inductiva, 190.
Realimentación, Oscilador de, 249.
– positiva, 249.
Receptor, 62.
Recorrido libre medio, 101.
Recta de carga, 245.
Rectificación, 235.
Rectificador de media onda, 236.
– – onda completa, 236.
– – puente, 237.
Red de amplitud, 386.
– – difracción, 383.
– – – Constante de la, 384.
– – – Poder separador de la, 391.
– – fase, 386.
– eléctrica, 65.
Referencia absoluta, 512, 513.
Reflectancia, 441.
Reflexión, 328.
– Leyes de la, 282.
– total, 284.
Refracción, 282.
– Índice de, 279, 283.
– Leyes de la, 283.
Refractometría interferencial, 367.
Refractómetro de Jamin, 368.
– – Rayleigh, 367.
– interferencial, 371.
Reguladora de tensión, Válvula, 105.
REINES, F., 502.
Relatividad de Einstein, 509.
– – Galileo, Principio de, 512, 513.
– – la simultaneidad, 534.
– galileana, 509.
– generalizada, 517.
– restringida, 512, 517.
– – Principio de, 517.
Reluctancia, 158.
Reluctancias en paralelo, 161.
– – serie, 160.
Rendimiento de un acumulador, 99.
Rendimiento luminoso, 452.
Reostato de arranque, 219, 229.
Resistencia, 55.
– de carga, 245.
– – placa, 241.
– Dimensiones de la, 55.
– interna, 59, 62.
– Medida de una, 72.
– multiplicadora, 208.
– Termómetro de, 56, 57.
Resistencias, Asociación de, 68.
– en montaje mixto, 68.
– – paralelo, 68.
– – serie, 68.
Resistividad, 55.
– Dimensiones de la, 56.
Resonador de Hertz, 263.
Resonancia aguda, 197.
– eléctrica, 195.
– Frecuencia de, 195.
– paralelo, 197.
– serie, 195.
Retentividad, 150.
Retina, 333.
Richardson-Dushman, Ley de, 231.
Rigidez dieléctrica, 41.
RITZ, W., 474.
ROCHESTER, G. D., 503.
ROEMER, O., 277.
ROENTGEN, W. K., 253.
Rotor, 215.
ROWLAND, H. A., 386, 428.
RUTHERFORD, E., 476, 495.
Rydberg, Constante de, 474.
– Serie de, 475.

Saturación, Corriente de, 233.
– magnética, 148, 154.
SAVART, F., 123.
SCHAWLOW, A. L., 487.
SCHRÖDINGER, E., 275, 482.
– Ecuación de, 484.
Sección principal, 288.
– – de un cristal, 402.
Secundario de un transformador, 220.
SEEBECK, T. J., 90.
– Efecto, 91.
– F.e.m., 95.
SEGRÈ, E., 501.
Selector de velocidades, 116.
Semiconductores, 81.
– con impurezas, 83.
– intrínsecos, 83.
– tipo *n*, 83.

Semiconductores tipo *p*, 84.
Sensibilidad del galvanómetro, 204.
Serie de Pickering, 475.
– – Rydberg, 475.
Series espectrales, 472.
Shunt, 205.
Simetría, 505.
Simultaneidad, 519.
– Relatividad de la, 534.
Sincrociclotrón, 113.
Sistema afocal, 312, 343.
– aplanético, 303.
– convergente, 308.
– de partículas, 555.
– del centro de masa, 557.
– inercial preferente, 512.
– ópticamente isótropo, 513.
– divergente, 308.
– estigmático, 287.
– – perfecto, 302.
– giorgi, 10.
– – racionalizado, 10.
– óptico, 286.
– – centrado, 301.
– – Elementos cardinales de un, 311.
– telescópico, 312.
SITTER, DE, 513, 518.
SNELL, W., 272.
Sobretensiones, 195.
Soddy, Leyes de, 491.
Solenoide, 122.
– Campo de un, 129.
– tórico, 130.
SOMMERFELD, A., 231.
Spin, 478.
– isotópico, 506.
– nuclear, 491.
Statcoulomb, 9.
STEFAN, J., 449.
Stilb, 454.
Superposición, teorema de la, 70.
Susceptibilidad eléctrica, 34.
– magnética, 146.
Sustancias activas, 420.

TALES DE MILETO, 1.
Telescopio, Aumento de un, 346.
– de Cassegrain, 346.
– – Newton, 345.
– reflector, 345.
Temperatura de color, 462.
Tensión disruptiva, 103.
– eléctrica, 23.
Tensiones principales, 418.
Teorema de Gauss, 17.
– – la superposición, 70.
– – Malus, 276.
Teoría cuántica, 446.
– de Arrhenius, 84, 88.
– – la emisión de la luz, 273.
– electromagnética de la luz, 252.
Términos espectrales, 474.
Termoluminiscencia, 430.
Termómetro de resistencia, 56, 57.
Termopar, 95.
Tesla, 111.
THOMSON, G., 481.
THOMSON, J. J., 114, 264, 475, 551.
THOMSON, W., 92.
Thomson, Coeficiente de, 93.
– Efecto, 92.
Tiempo de relajación, 138.
– Dilatación del, 536, 537.
– intrínseco de Minkowski, 545.
Tinte sensible, 421.
TOLOMEO, 272.
TOWNES, C. H., 487, 516.
Townsend, Descarga de, 103.
Transconductancia, 241.
Transformación de Galileo, 510.
– – Lorentz, 521, 525.
– – – Interpretación geométrica de la, 526.
Transformador, 219.
– elevador, 221.
– reductor, 221.
Transistor, 242.
Transmutación radiactiva, 491.
Triángulo, Conexión en, 225.
Triboluminiscencia, 450.
Tricroísmo, 415.
Triodo, 239.
Trouton y Noble, 514, 516.
– – – Experimento de, 513.
TSUNG DAO LEE, 506.
Tubo Coolidge, 268.
– de rayos catódicos, 114.
Turmalina, 416.

Umbrales de fotoemisión, 266.
Unidad de masa atómica, 490.
– electrostática de capacidad, 39.
Unidades de carga, 9.
– electrostáticas, 9.
– giorgi, 10.
Unión *p-n*, 233.

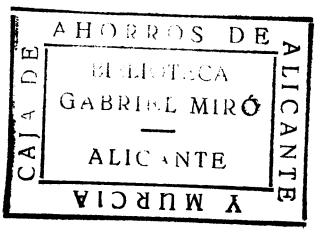
Valencia, Banda de, 80.

Valencia, Electrones de, 80.
– electroquímica, 88.
Valor eficaz, 185.
Valores propios, 482.
– triestímulo, 465.
Válvula reguladora de tensión, 105.
VanDeGraaff, Generador, 27.
Variable luminosa, 349, 351.
Vector de Poynting, 261.
– luminoso, 274, 395.
Velocidad de grupo, 480.
– – la luz, 273, 276.
Velocidades, Composición de, 538.
VERDET, 424.
Vida media, 494.
Viento eléctrico, 21.
Visibilidad, Coeficiente de, 458.
– Factor de, 452.
Volt, 24.
VOLTA, A., 90, 95.
– Ley de, 90.
Voltímetro, 208.
Wattímetro, 211.
Weber, 111.
WEISS, P., 151.
– Dominios de, 150.
Wheatstone, Puente de, 72.
WHEELER, J. A., 498.
WIEGAND, C., 501.
WIEN, W., 445.
– Ley de, 448.
Wiener, 366.
WILLIAMS, 432.
WRIGHT, W. D., 464.

YOUNG, T., 274, 354.
YPSILANTIS, T., 501.
YUKAWA, H., 502, 503.

ZEEMAN, P., 263.
ZERNICKE, F., 392.
Zonas de Fresnel, 372.

61544


CAJA DE AHORROS DE ALICANTE Y MURCIA
BIBLIOTECA
GABRIEL MIRÓ
ALICANTE

SEVERTÉ